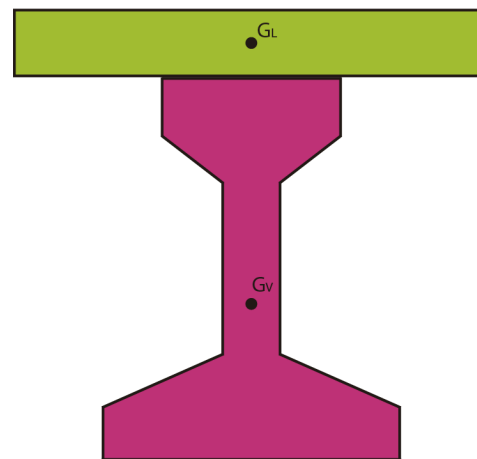




# Solicitud por Flexión en Régimen Elástico

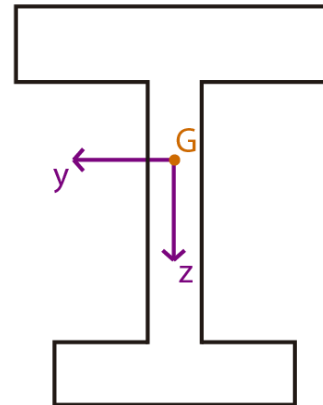


Catalina Urteche - Clara Zaccaria  
Raúl Mendez – Marcos Spinella



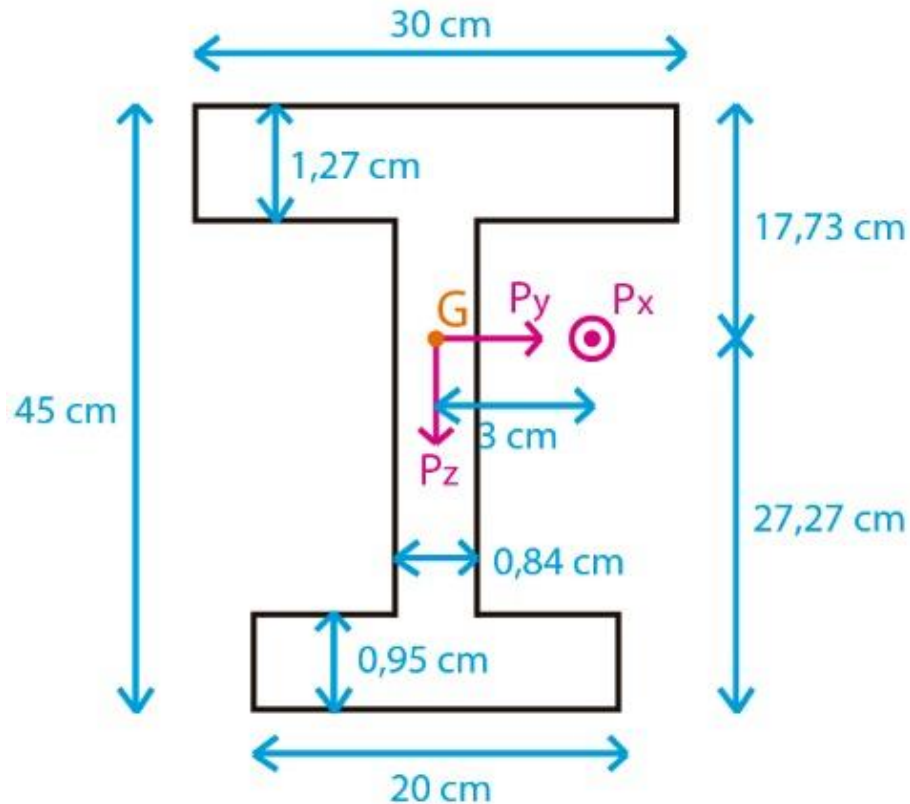
## Ejercicio 1: Calcular y hallar:

- 1)  $\sigma_{m\acute{a}x}$
- 2) Eje neutro, centro de presi3n y lnea de fuerzas



Datos:

- $P_x = 600 \text{ kN}$
- $P_y = 12 \text{ kN}$
- $P_z = 75 \text{ kN}$
- $L = 2 \text{ m}$
- *Acero F-36*
- $C.S. = 1,6$



Datos del perfil:

- $J_y = 29679,13 \text{ cm}^4$
- $J_z = 3493,41 \text{ cm}^4$
- $A = 84,31 \text{ cm}^2$
- $W_y^{SUP} = 1670,4 \text{ cm}^3$
- $W_y^{INF} = 1086,21 \text{ cm}^3$
- $W_z = 232,9 \text{ cm}^3$

**¡Observación!**

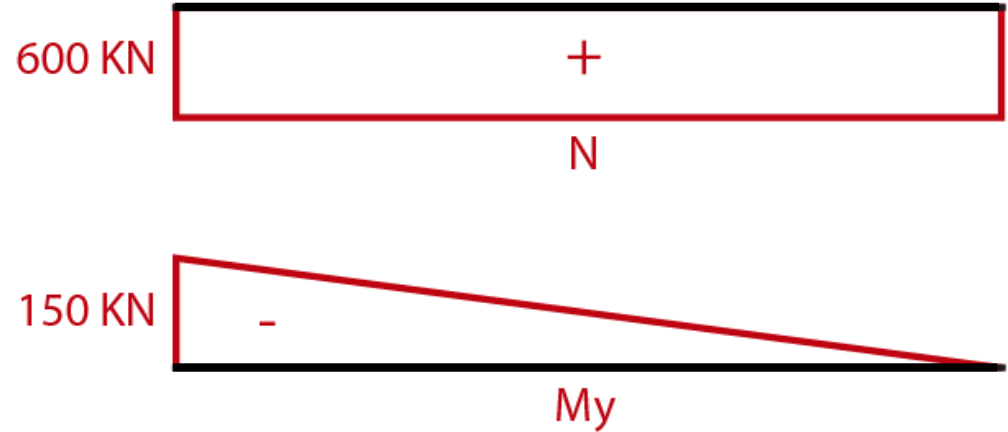
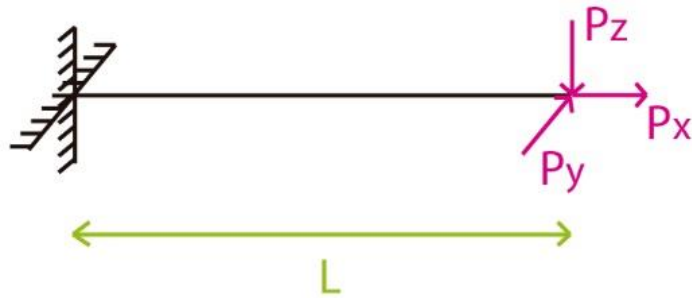
La carga  $P_x$  no está ubicada en el baricentro, sino que posee una excentricidad en el eje  $y$  de valor  $e_y = 3 \text{ cm}$ .

Esto hace que dicha carga produzca un momento constante en el eje  $z$  de valor

$$M_z = -e_z \cdot P_x = 18 \text{ kN m}$$



Trazamos los diagrama de características:



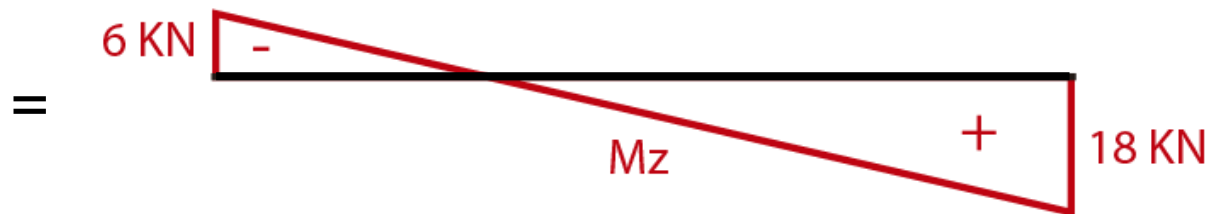
$M_z$  producido por la carga  $P_y$



$M_z$  producido por la excentricidad que posee la carga  $P_x$

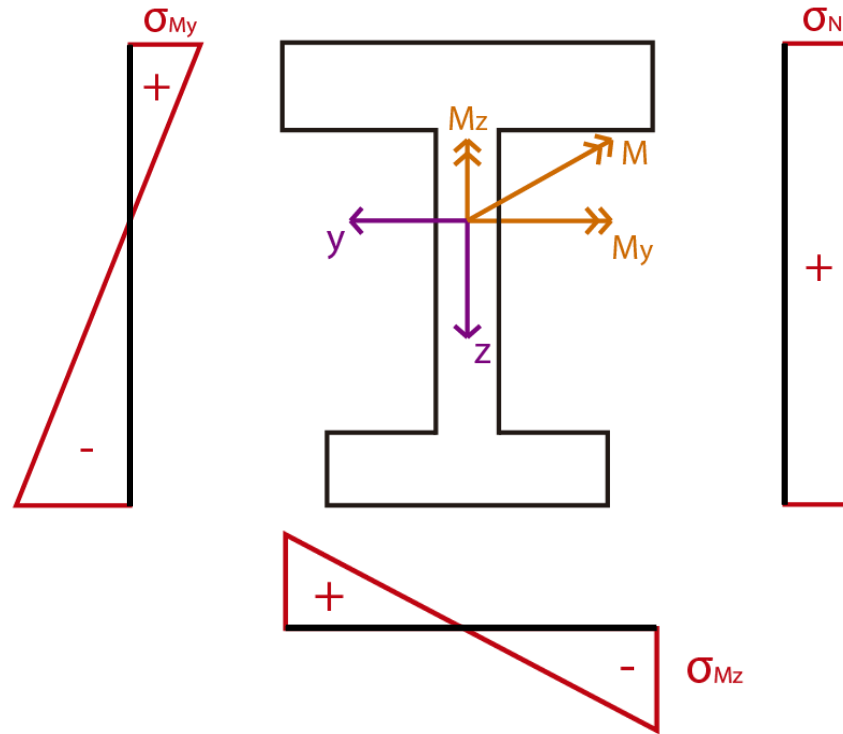


$M_z$  total por superposición de efectos





Trazamos los diagramas de tensiones:

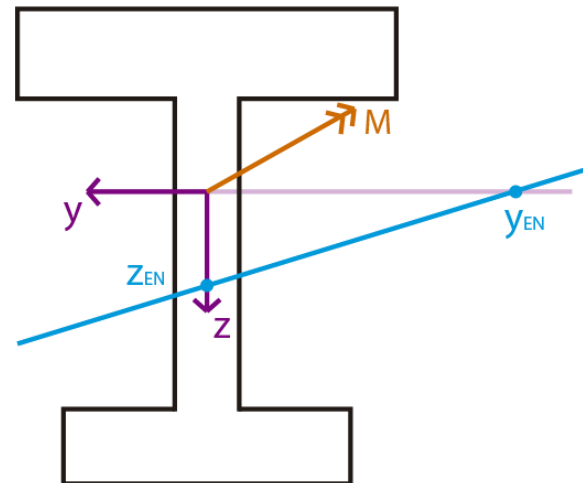


Eje neutro:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} - \frac{M_z \cdot y}{J_z} = 0$$

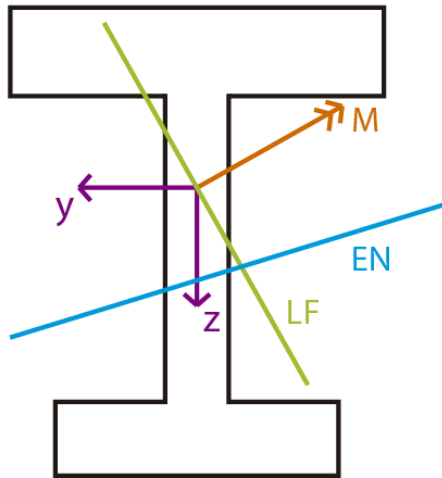
$$(y_{LN}; 0) \Rightarrow y_{LN} = \frac{N}{A} \cdot \frac{J_z}{M_z} = -41,4 \text{ cm}$$

$$(0; z_{LN}) \Rightarrow z_{LN} = -\frac{N}{A} \cdot \frac{J_y}{M_y} = 14 \text{ cm}$$





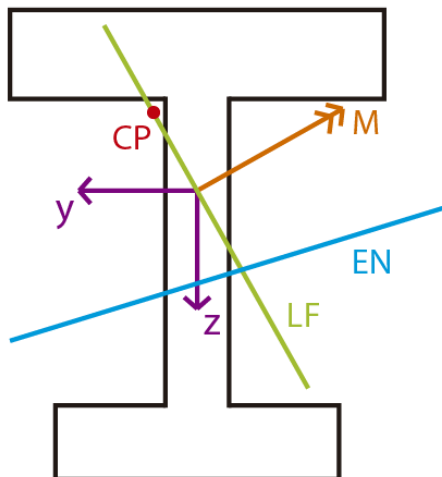
Ubicamos la línea de fuerzas:



¡Recordatorio!

El eje neutro y la línea de fuerzas son ejes conjugados de inercia.

Centro de presión:

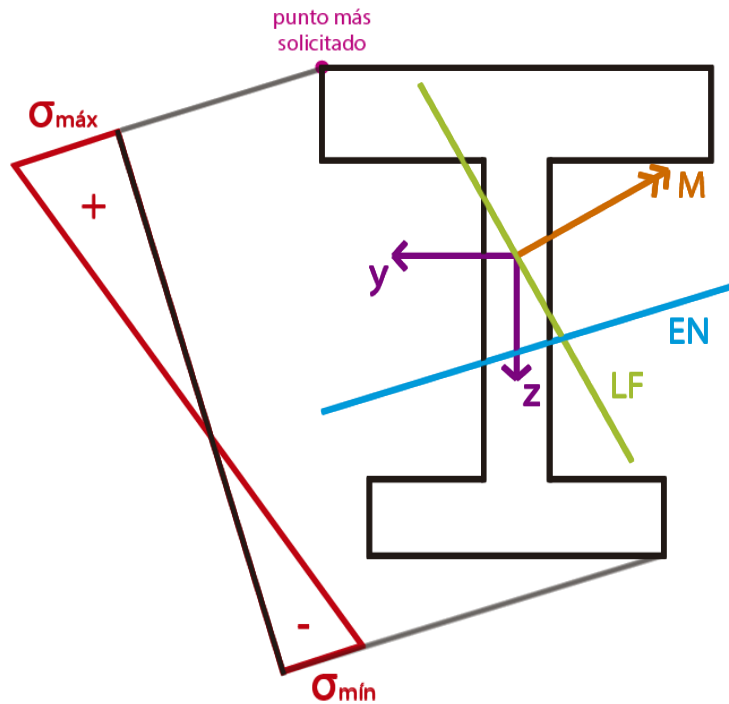


$$M_y = N \cdot e_z \Rightarrow e_z = \frac{M_y}{N} = -25 \text{ cm}$$

$$M_z = -N \cdot e_y \Rightarrow e_y = -\frac{M_z}{N} = 1 \text{ cm}$$



Trazamos el diagrama de tensiones totales:



¡Observación!

El diagrama de tensiones totales se traza perpendicular al eje neutro.

El punto más solicitado recibe las mayores tensiones positivas:

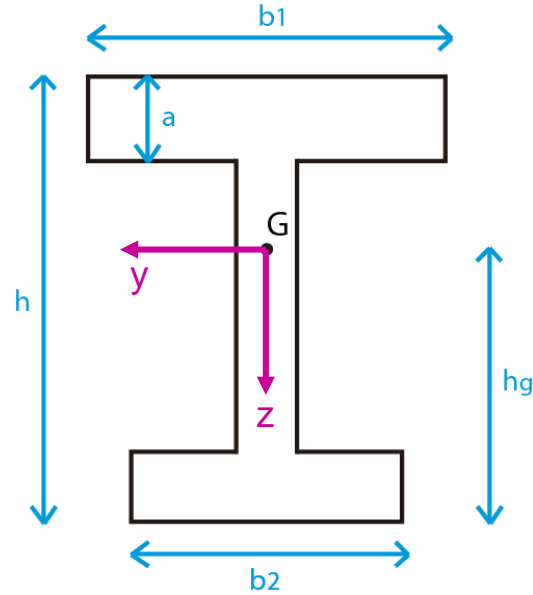
$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{600 \text{ kN}}{84,31 \text{ cm}^2} + \frac{(-150 \text{ kN m})}{29679,13 \text{ cm}^4} \cdot (-17,73 \text{ cm}) - \frac{(-6 \text{ kN m})}{3493,41 \text{ cm}^4} \cdot 15 \text{ cm}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 18,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < \sigma_{adm} = \frac{\sigma_F}{c.s.} = \frac{36 \text{ kN/cm}^2}{1,6}$$



# Núcleo central

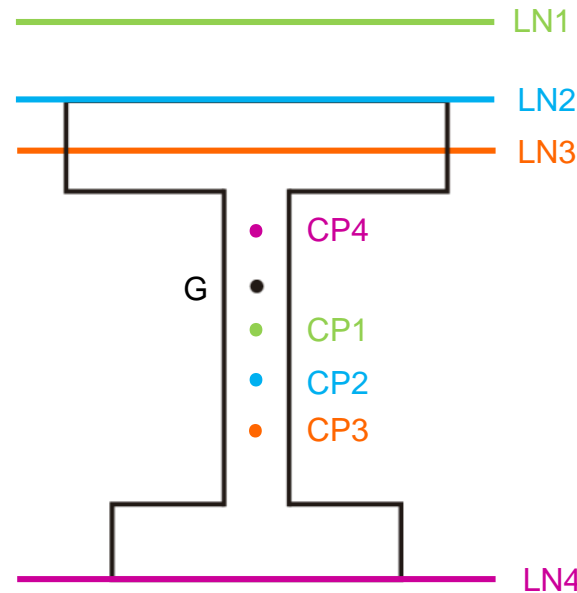
Tomamos como ejemplo la sección del ejercicio anterior:



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} - \frac{M_z \cdot y}{J_z} = 0 \rightarrow \sigma = \frac{1}{A} + \frac{e_z^{cp} \cdot z}{J_y} + \frac{e_y^{cp} \cdot y}{J_z} = 0$$

Si el centro de presión pertenece al eje  $z \rightarrow e_y^{cp} = 0$

$$z = -\frac{J_y}{A \cdot e_z^{cp}}$$

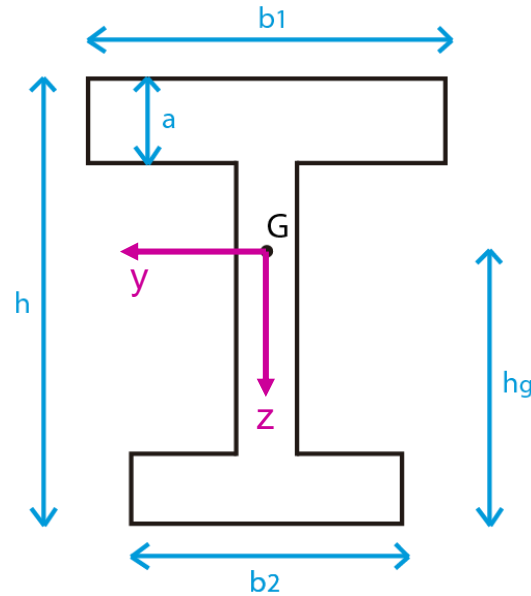






# Núcleo central

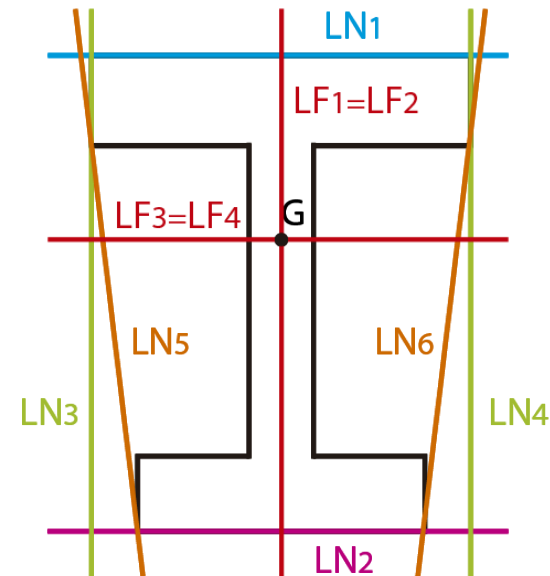
Tomamos como ejemplo la sección del ejercicio anterior:



Para hallar el núcleo central, sólo será necesario hallar los vértices de este. Para esto tenemos que ubicar las líneas neutras tangentes al contorno de la sección.

La  $LF_i$  es un eje conjugado de inercia de la  $LN_i$  y pasa por el baricentro. Además, el  $CP_i$  se encontrará sobre su  $LF_i$ .

Como  $LN_1$ ,  $LN_2$ ,  $LN_3$  y  $LN_4$  son paralelas a los ejes principales, las líneas de fuerza asociadas serán ortogonales a ellas.





Recordemos la ecuación de la línea neutra en función de la excentricidad del centro de presión:

$$\sigma = \frac{1}{A} + \frac{e_z^{cp} \cdot z}{J_y} + \frac{e_y^{cp} \cdot y}{J_z} = 0$$

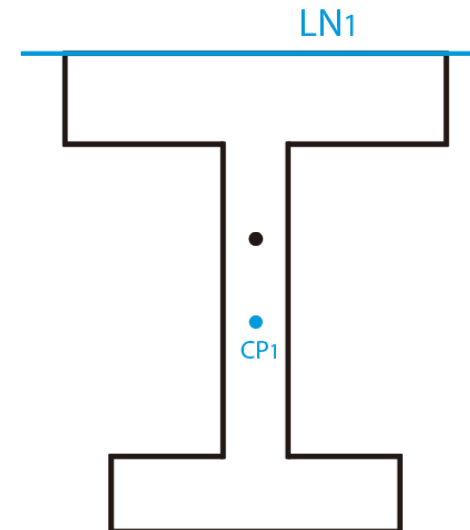
¡Observación!

El núcleo central NO depende de la carga, sólo de la geometría de la sección.

1)  $CP_1 \left\{ \begin{array}{l} e_y^1 = 0 \rightarrow \text{Lo sabemos ya que conocemos la ubicación de la } LF_1 \\ z_1 = -(h - h_G) = h_G - h \end{array} \right.$

$$\frac{1}{A} + \frac{e_z^1}{J_y} \cdot (h_G - h) = 0 \Rightarrow e_z^1 = -\frac{J_y}{A \cdot (h_G - h)}$$

$$CP_1 = \left( 0; -\frac{J_y}{A \cdot (h_G - h)} \right)$$





$$2) CP_2 \begin{cases} e_y^2 = 0 \rightarrow \text{Porque } LF_1 \equiv LF_2 \\ z_2 = h_G \end{cases}$$

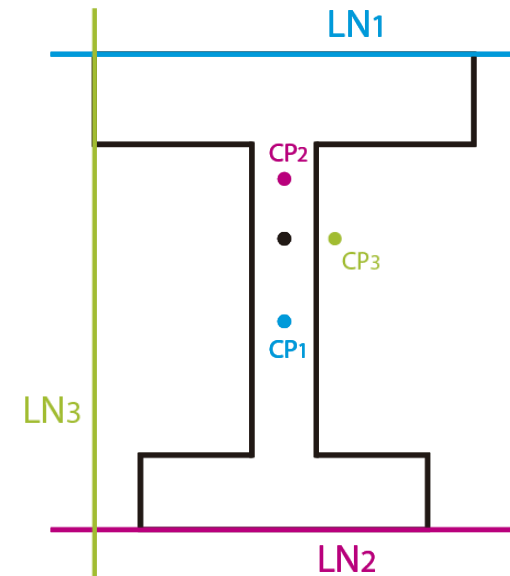
$$\frac{1}{A} + \frac{e_z^2}{J_y} \cdot h_G = 0 \Rightarrow e_z^2 = -\frac{J_y}{A \cdot h_G}$$

$$CP_2 = \left( 0; -\frac{J_y}{A \cdot h_G} \right)$$

$$3) CP_3 \begin{cases} e_z^3 = 0 \rightarrow \text{Lo sabemos ya que conocemos} \\ y_3 = b_1/2 \end{cases} \text{ la ubicación de la } LF_3$$

$$\frac{1}{A} + \frac{e_y^3}{J_z} \cdot \frac{b_1}{2} = 0 \Rightarrow e_y^3 = -\frac{J_z}{A \cdot b_1/2}$$

$$CP_3 = \left( -\frac{J_z}{A \cdot b_1/2}; 0 \right)$$





$$4) CP_4 \begin{cases} e_z^4 = 0 \rightarrow \text{Porque } LF_3 \equiv LF_4 \\ y_4 = -b_1/2 \end{cases}$$

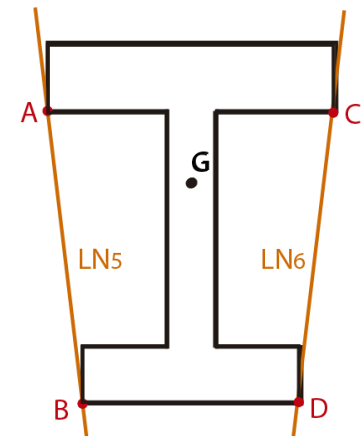
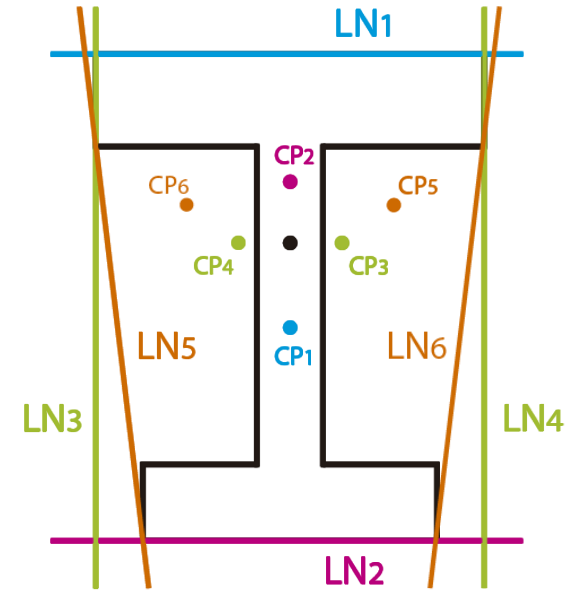
$$\frac{1}{A} + \frac{e_y^4}{J_z} \cdot \left(-\frac{b_1}{2}\right) = 0 \Rightarrow e_y^4 = \frac{J_z}{A \cdot b_1/2}$$

$$CP_4 = \left( \frac{J_z}{A \cdot b_1/2}; 0 \right)$$

5)  $CP_5$   
 6)  $CP_6$   $\rightarrow$  Como no es sencillo conocer alguna de las coordenadas de cada  $CP$ , debemos resolver un sistema de  $2 \times 2$  para cada uno, reemplazando las coordenadas de dos puntos conocidos por los que pasa su respectiva  $LN$  en la ecuación.

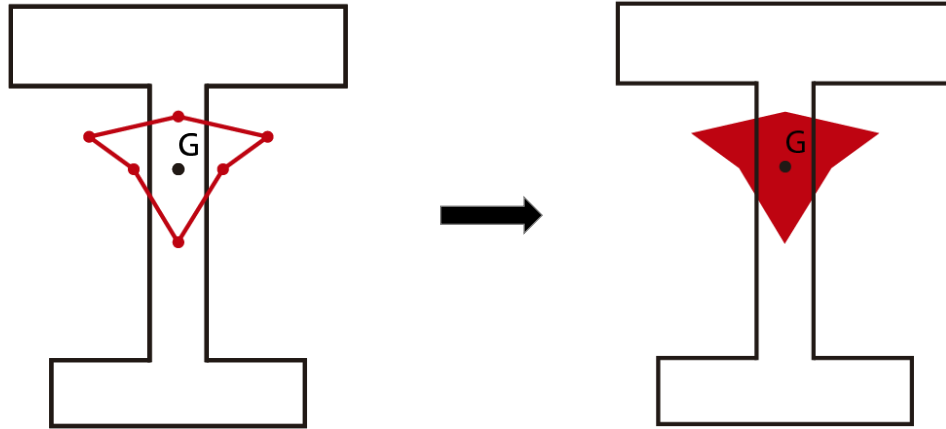
$$A = \left( \frac{b_1}{2}; -(h - h_G - a) \right) \quad B = \left( \frac{b_2}{2}; h_G \right)$$

$$C = \left( -\frac{b_1}{2}; -(h - h_G - a) \right) \quad D = \left( -\frac{b_2}{2}; h_G \right)$$





Las infinitas líneas que pivotean respecto a los vértices generan los infinitos puntos entre los vértices del núcleo central.



El núcleo central es el área definida por los puntos que, tomados como centro de presión, originan tensiones de un mismo signo en la sección.

### ¡Observación!

El baricentro siempre debe estar contenido dentro del núcleo central.



Recordemos que cuando  $e = 0 \Rightarrow LN \rightarrow \infty$  y estaremos ante una sollicitación axial pura, por lo tanto, tendremos tensiones de un solo signo.

¿Por que?

# Homogeneización

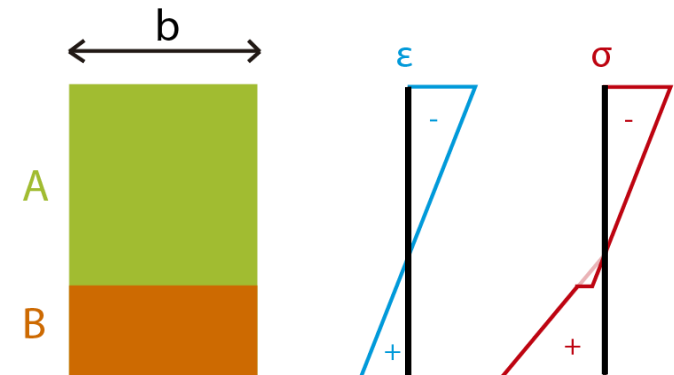
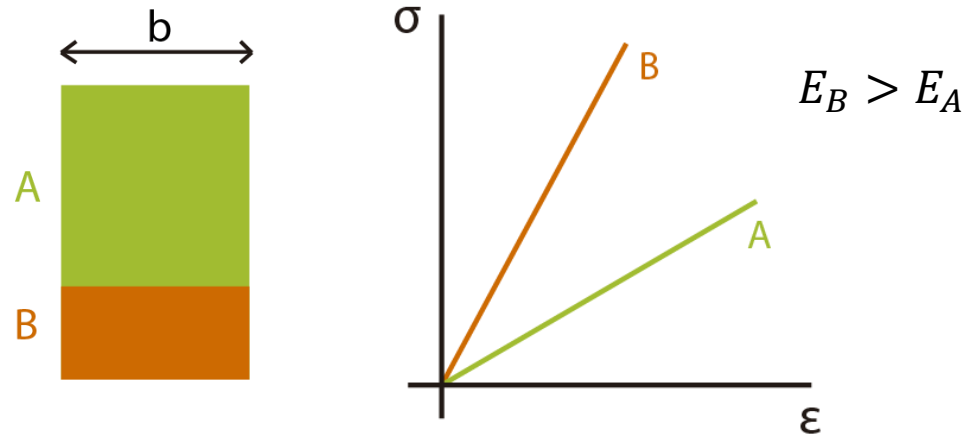


¿Por qué homogeneizamos en secciones compuestas por más de un material?

Porque al tener distintos módulos de elasticidad, no podemos utilizar la ecuación  $\sigma = \frac{M}{J} \cdot d$

¿Por qué?

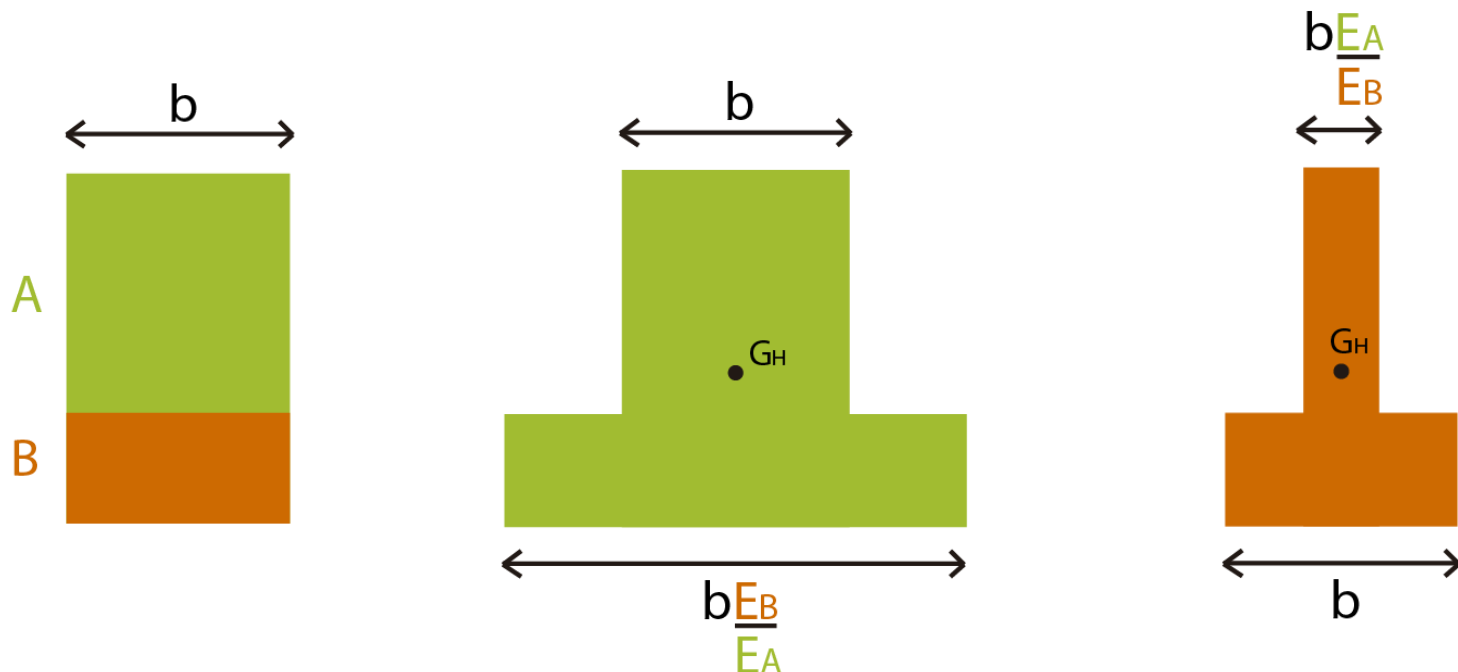
Porque  $\varepsilon$  sigue siendo lineal, Bernoulli-Navier sigue valiendo, y la ley de Hooke también, pero para cada material por separado.



Esto genera que si  $\varepsilon$  es lineal pero cambia el módulo de elasticidad con cada material, el diagrama de tensiones deja de ser lineal.

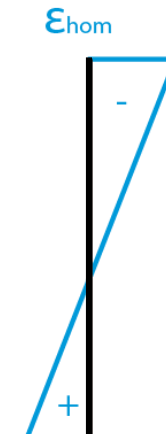
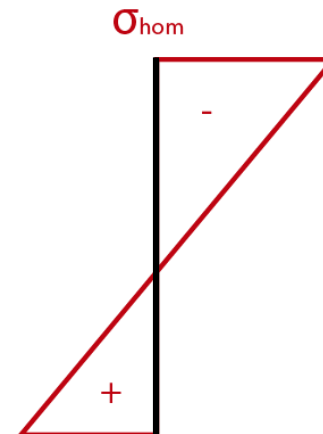
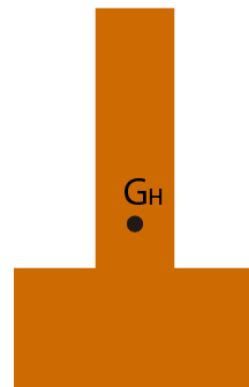
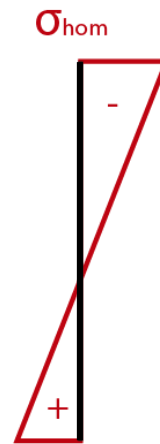
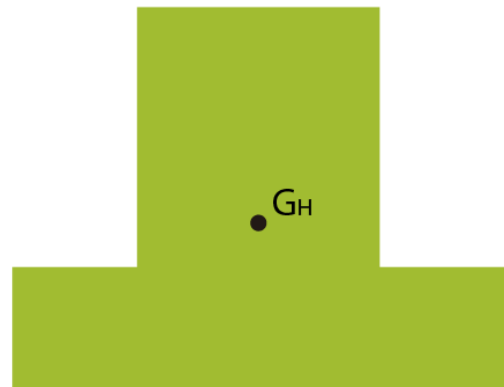


- Para resolver este “problema” de tener un diagrama de tensiones no lineal, homogeneizamos.
- Es indiferente cuál de los materiales homogeneizamos. El resultado debe ser el mismo.
- Para homogeneizar transformamos el lado paralelo al eje neutro, usando la ecuación:  $b_i = b \cdot \frac{E_i}{E_H}$ , donde  $i$  es el material que transformo y  $H$  el material al cual homogenizo.





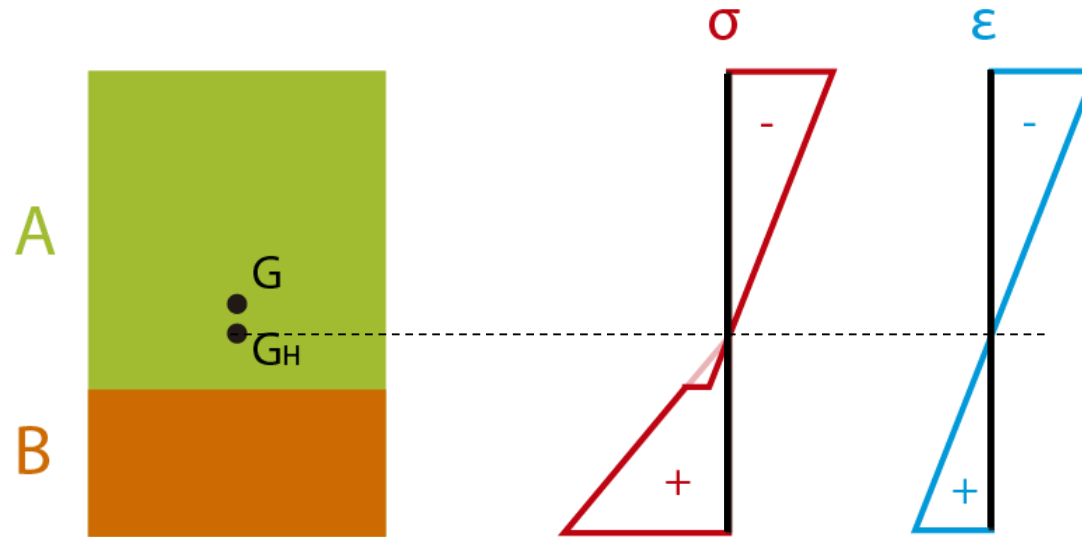
- Como ahora trabajamos con un material homogéneo, el diagrama de tensiones será lineal. Por lo tanto valdrán las fórmulas vistas anteriormente.
- Necesitamos hallar el baricentro y el momento de inercia de la sección homogenizada.
- Trazamos los diagramas utilizando la ecuación:  $\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z$





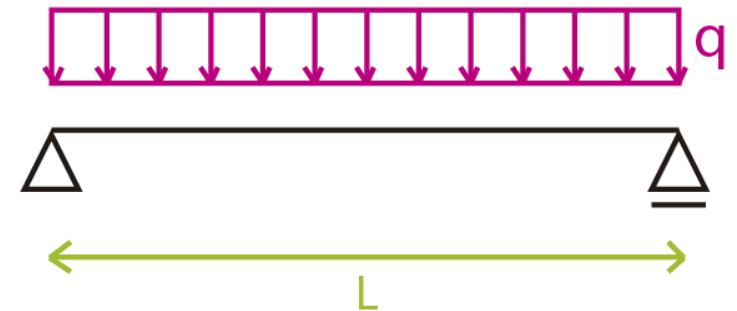
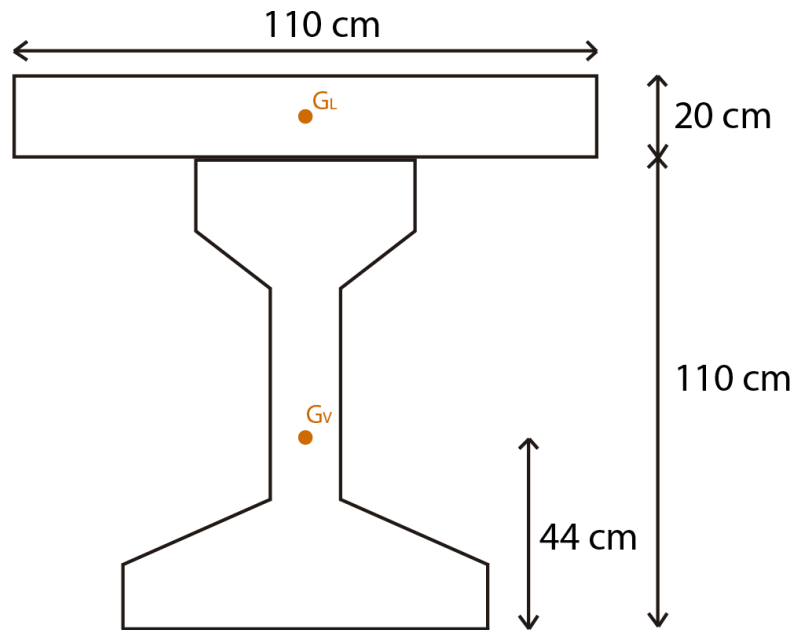


- Las tensiones calculadas anteriormente no son las tensiones reales de nuestra sección. Tenemos que des-homogeneizar y volver al original.
- Al volver a la sección orginial, el diagrama de deformaciones se mantendrá igual al de la sección homogeneizada.
- El diagrama de tensiones cambia según la ecuación:  $\sigma_i = \frac{E_i}{E_H} \cdot \sigma_H$
- La línea neutra pasará por el baricentro de la sección homogeneizada.



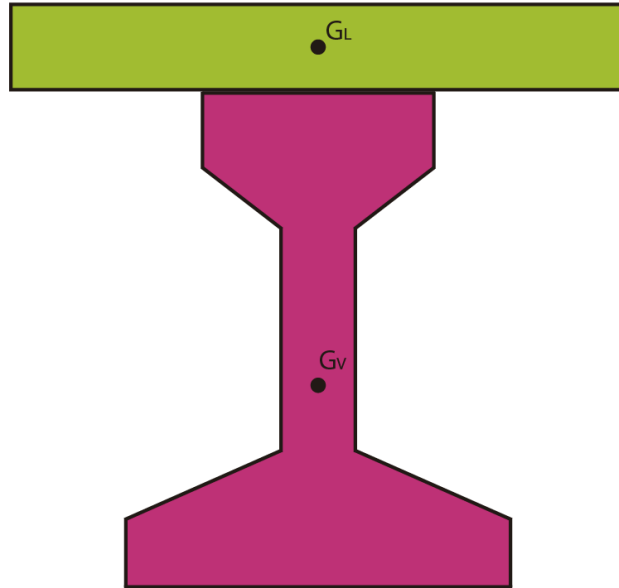


## Ejercicio 2: Trazar los diagramas de deformación y de tensión y verificar por resistencia.



Datos:

- $q = 4,05 \frac{t}{m}$
- $L = 25 m$



$$H30 \Rightarrow \sigma_{adm}^- = 135 \frac{kg}{cm^2}$$

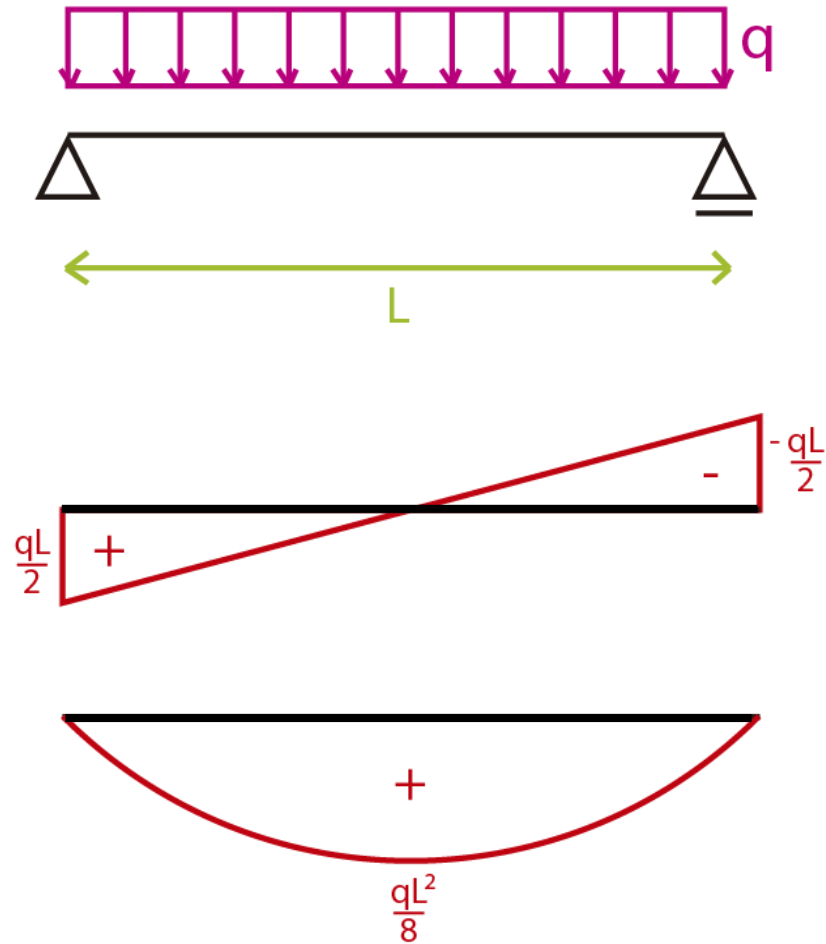
$$H38 \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_{adm}^- &= 160 \frac{kg}{cm^2} \\ \sigma_{adm}^+ &= 32 \frac{kg}{cm^2} \end{aligned}$$

Datos del perfil:

- $E_{H30} = 3,4 \cdot 10^5 \frac{kg}{cm^2}$
- $E_{H38} = 3,7 \cdot 10^5 \frac{kg}{cm^2}$
- $J_V = 0,0517 m^4$
- $A_V = 0,383 m^2$



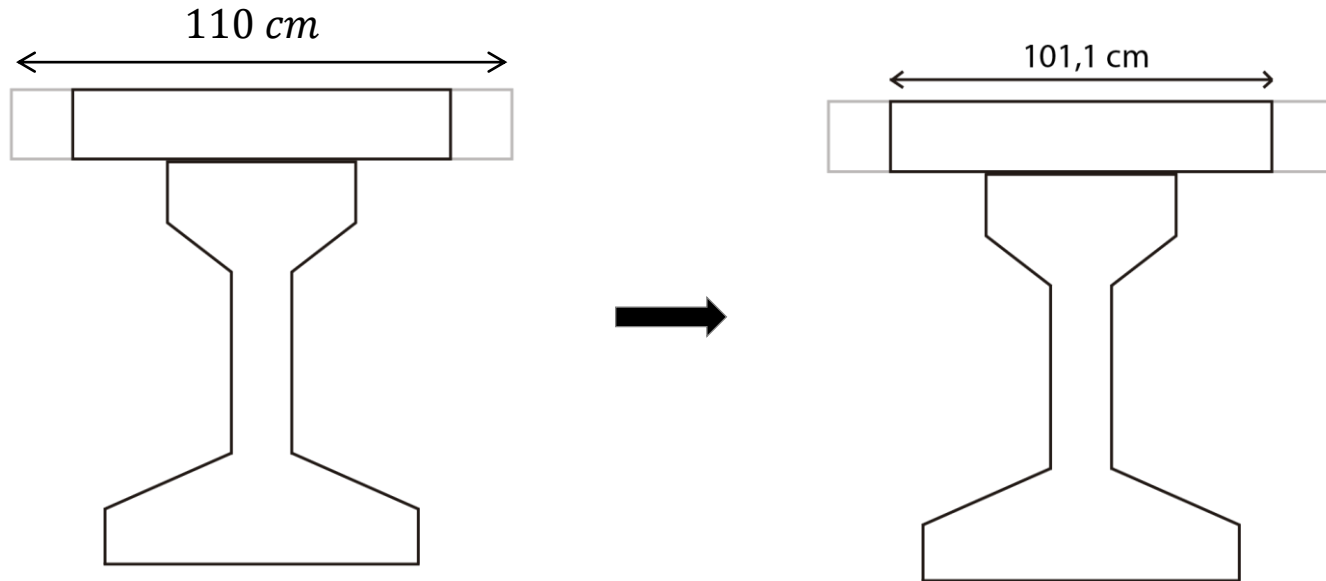
Trazamos los diagrama de características:



$$M = \frac{q \cdot L^2}{8} = 316 \text{ t m}$$



Homogeneizamos la losa al material de la viga por la simplicidad de su forma:

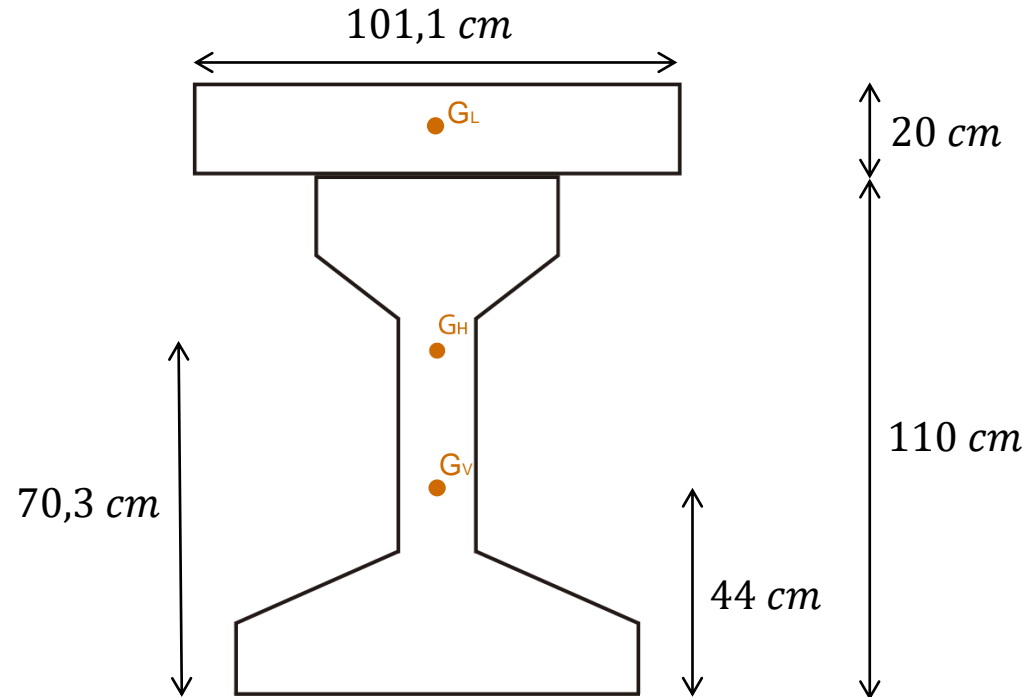


$$\eta = \frac{E_{H30}}{E_{H38}} = 0,919$$

$$b_{eq} = \eta \cdot b = 0,919 \cdot 110 \text{ cm} = 101,1 \text{ cm}$$



Calculamos el baricentro y el momento de inercia de la sección homogeneizada:

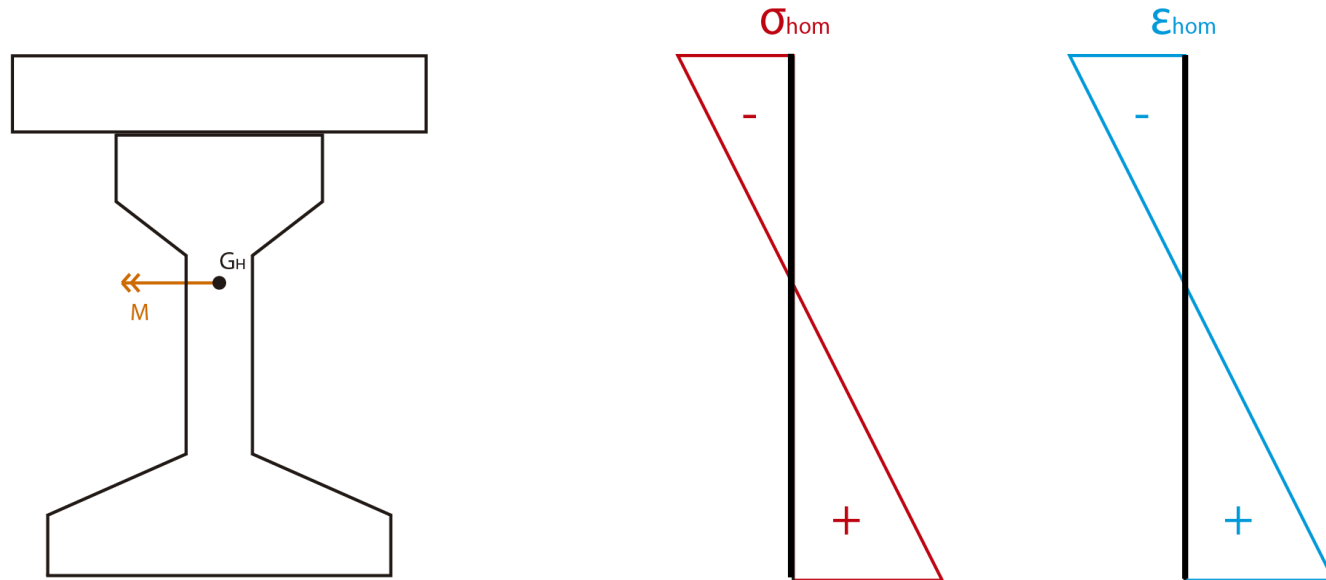


$$G_H = \frac{A_V \cdot G_V + A_L \cdot G_L}{A_V + A_L} = 70,3 \text{ cm}$$

$$J_H = J_V + (70,3 \text{ cm} - 44 \text{ cm})^2 \cdot A_V + \frac{101,1 \text{ cm} \cdot (20 \text{ cm})^3}{12} + (120 \text{ cm} - 70,3 \text{ cm})^2 \cdot A_L = 0,129 \text{ m}^4$$



Trazamos los diagramas de tensión y deformación de la sección homogeneizada:

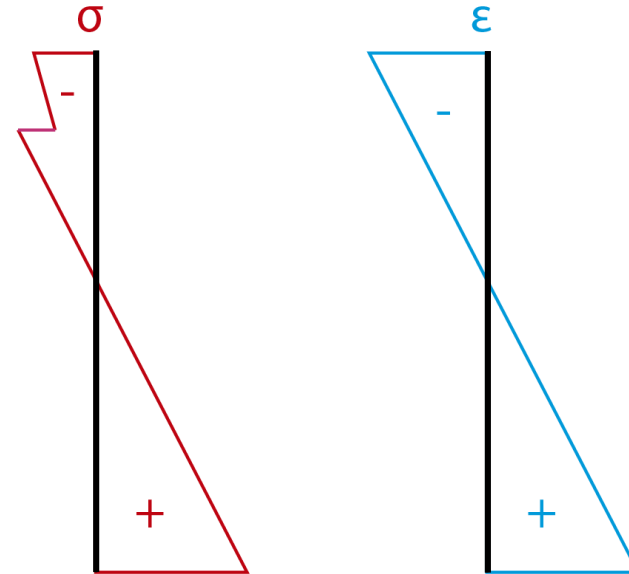
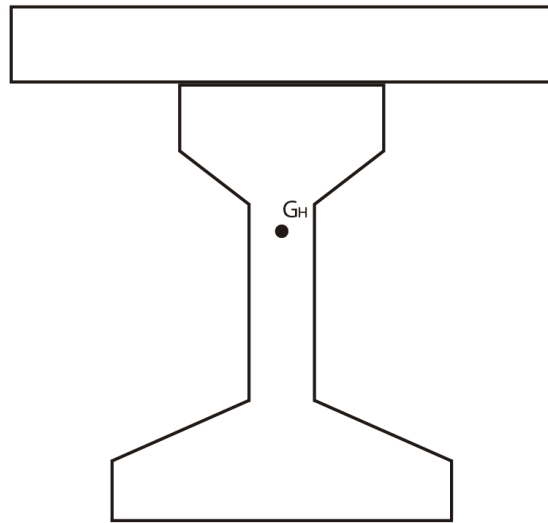


**¡Recordatorio!**

En la sección homogeneizada el diagrama de tensiones es continuo.



Trazamos los diagramas de tensión y deformación de la sección original:



**¡Recordatorio!**

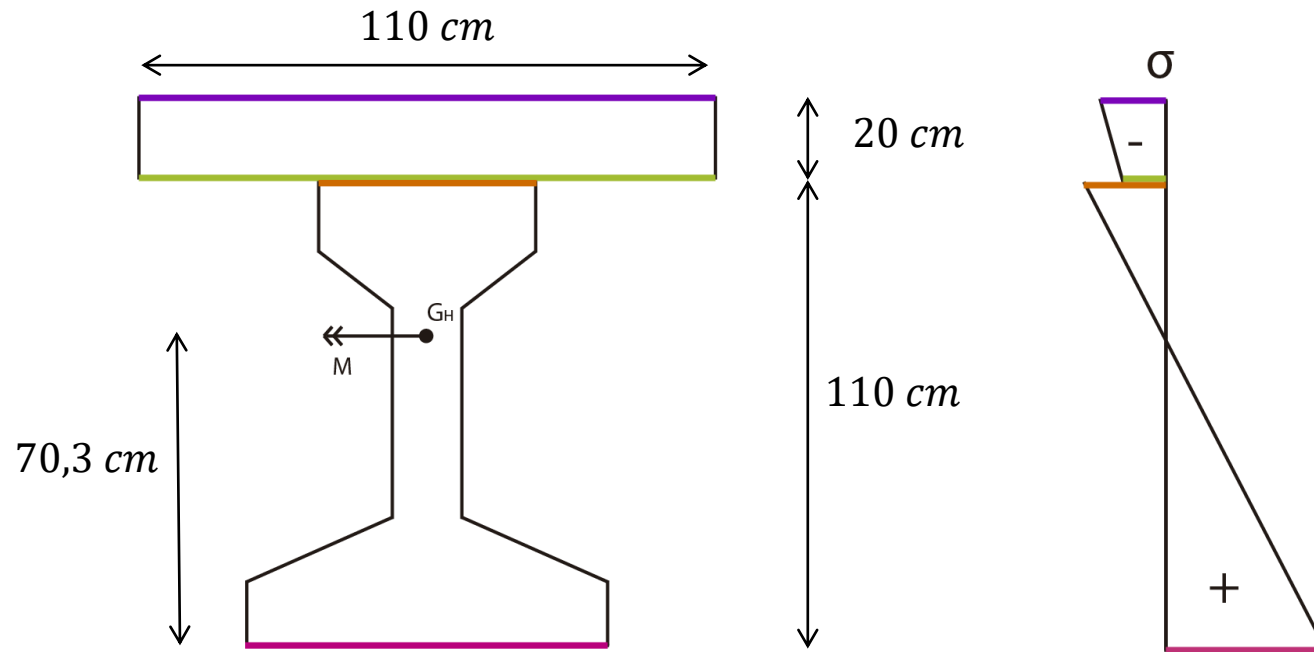
Los materiales más rígidos (de mayor  $E$ ) son los que toman más  $\sigma$ .



**¡Observación!**

Como homogeneizamos al material más rígido, el salto del diagrama de tensiones representa una disminución respecto al diagrama de la homogenizada.





$$\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z_1 \cdot \eta = -134 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_{H30}^- = 135 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z_2 \cdot \eta = -89 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_{H30}^- = 135 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z_2 = -97 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_{H38}^- = 160 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z_3 = 172 \frac{kg}{cm^2} > \sigma_{H38}^+ = 32 \frac{kg}{cm^2}$$

Verifica

No verifica  $\Rightarrow$  necesito  
agregar acero que  
resiste a tracción.