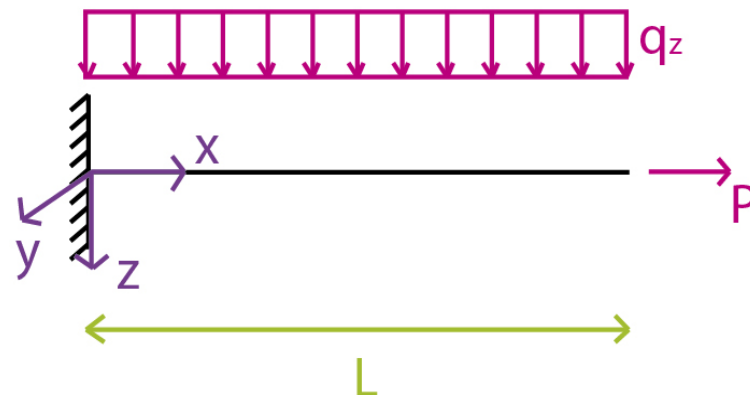
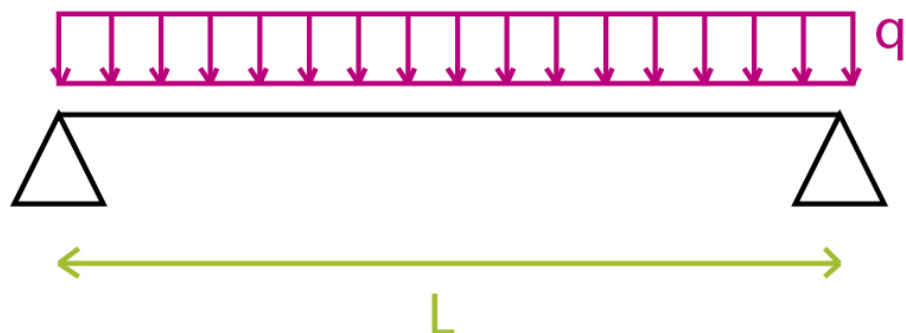




Solicitud por Flexión en Régimen Elástico

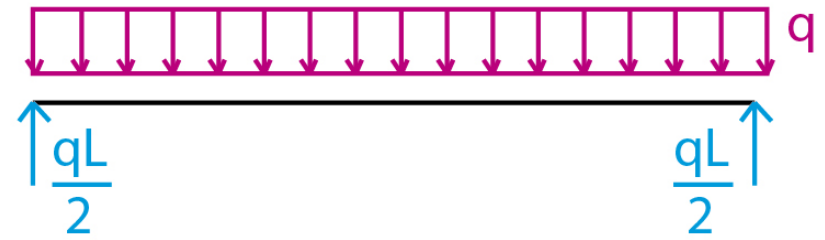
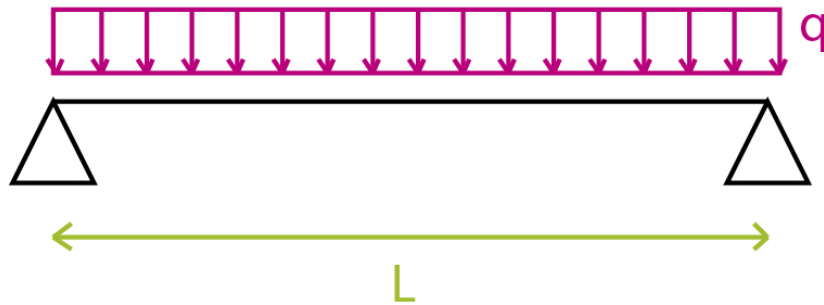


Catalina Urtenecche - Clara Zaccaria
Raúl Mendez – Marcos Spinella

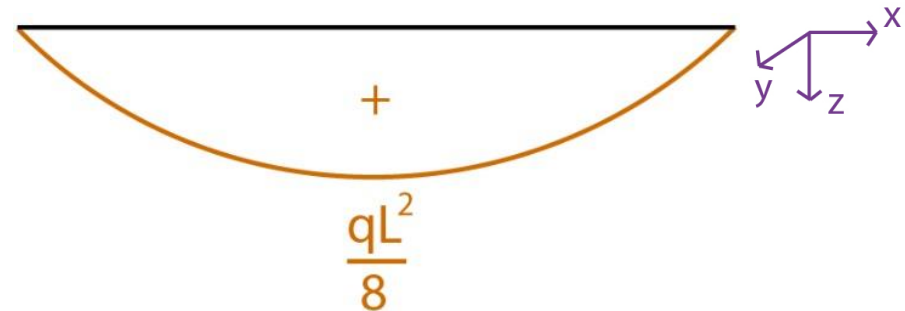
Flexión simple



Ejemplo: Viga simplemente apoyada



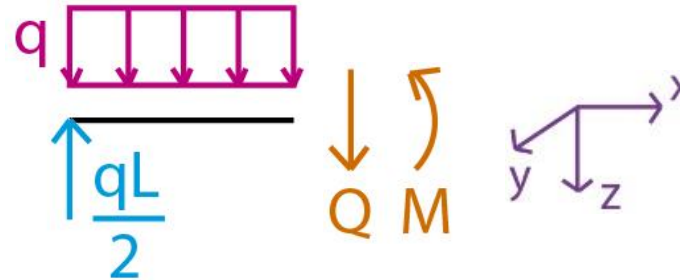
Realizamos el diagrama de momentos para conocer la sección más solicitada de la viga:



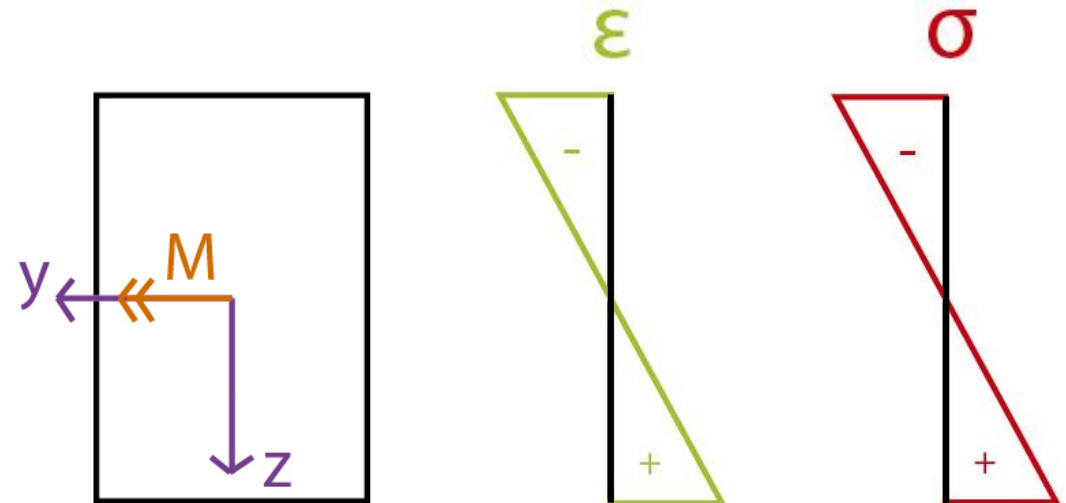


Flexión simple recta

Tomando una sección cualquiera de la viga, ponemos en evidencia las solicitaciones:



Trazamos los diagramas de tensiones y deformaciones de la sección analizada:



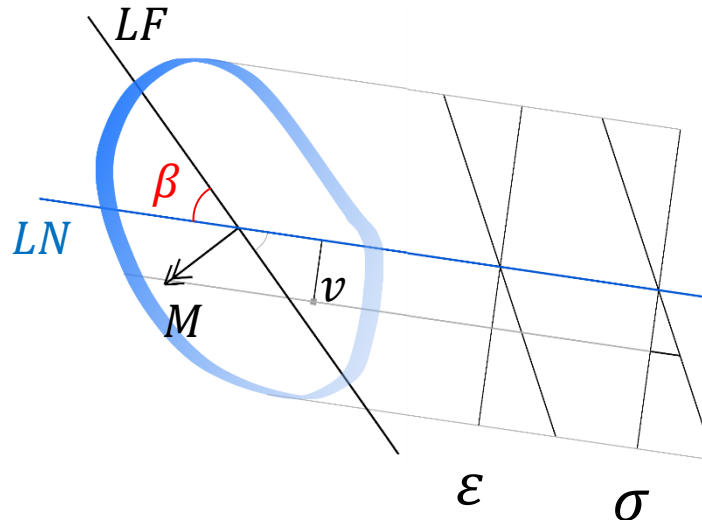
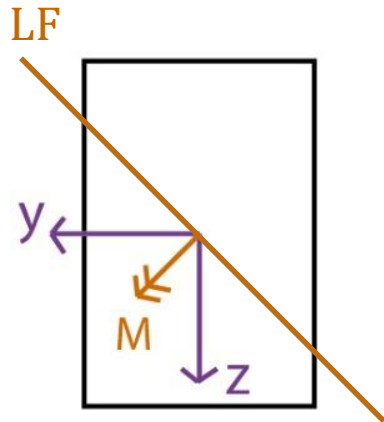
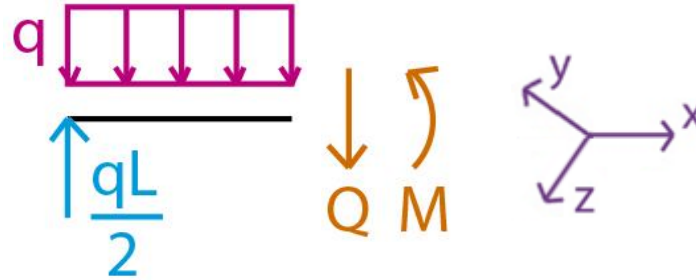
Hipótesis de flexión: Bernoulli – Navier \longrightarrow Deformaciones lineales

“Las secciones planas y normales al eje de la pieza se mantienen planas y normales al eje de la pieza, girando en torno a un eje denominado eje neutro”



Flexión simple oblicua

Lo que nos cambia es que M ya no es sobre un eje principal



LN y LF son ejes conjugados de inercia

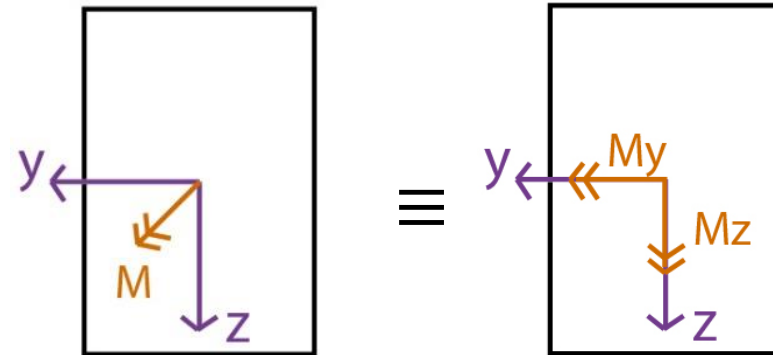
$$\sigma = \frac{M \cdot \text{sen}(\beta)}{J_{LN}} \cdot v$$

Al trabajar con una flexión oblicua, es conveniente descomponer en dos flexiones rectas



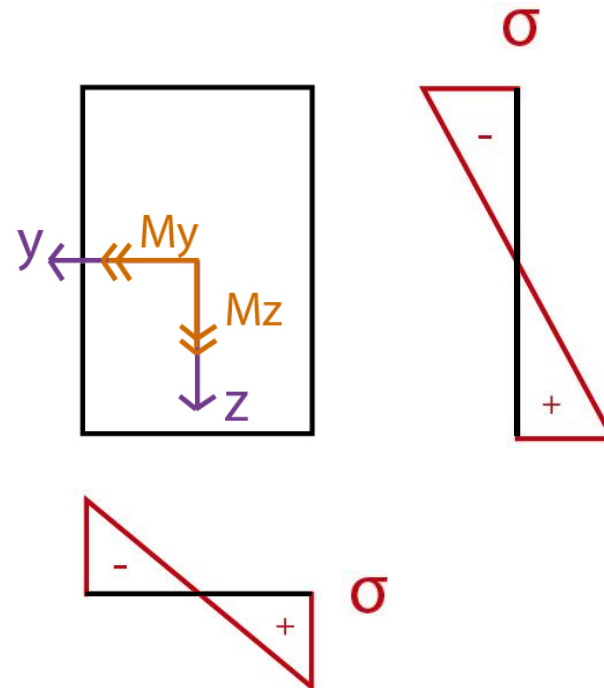
Flexión simple oblicua

Al trabajar con una flexión oblicua, la descomponemos en dos flexiones rectas:



Las tensiones totales las calculamos con la ecuación:

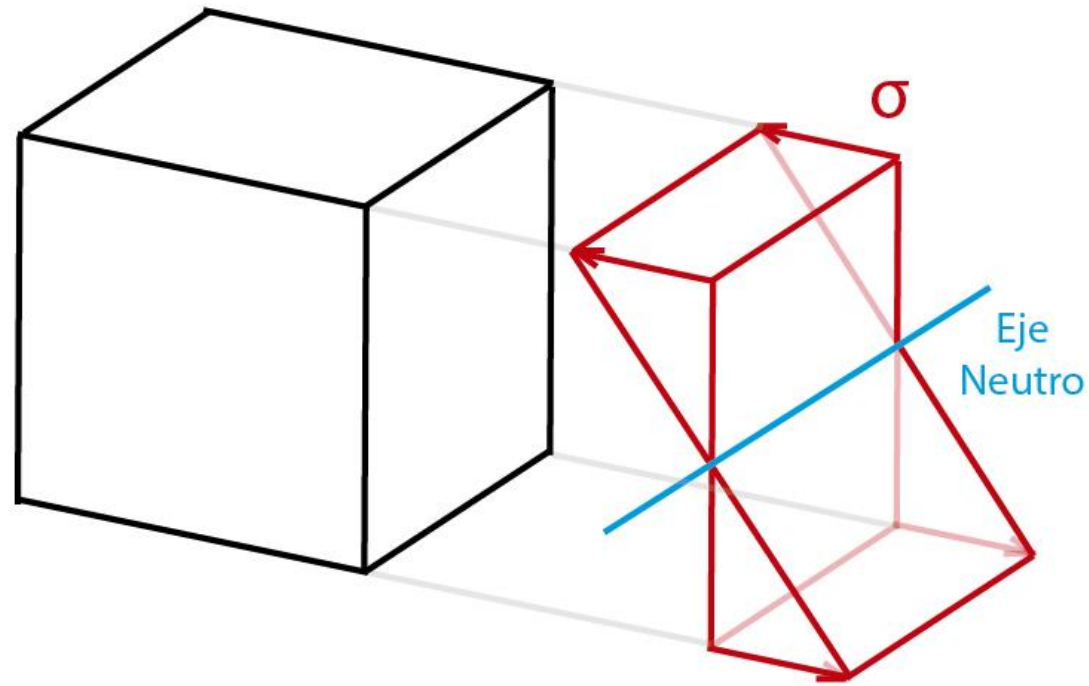
$$\sigma = \frac{M_y \cdot z}{J_y} - \frac{M_z \cdot y}{J_z}$$





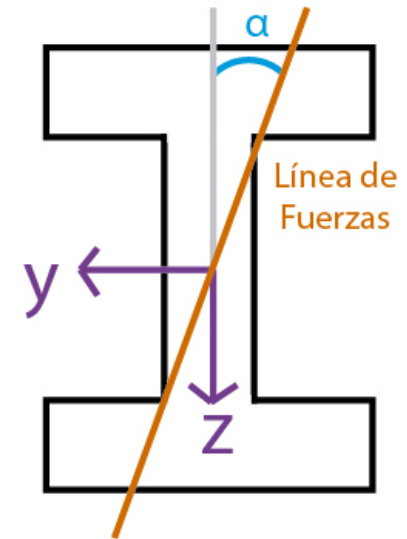
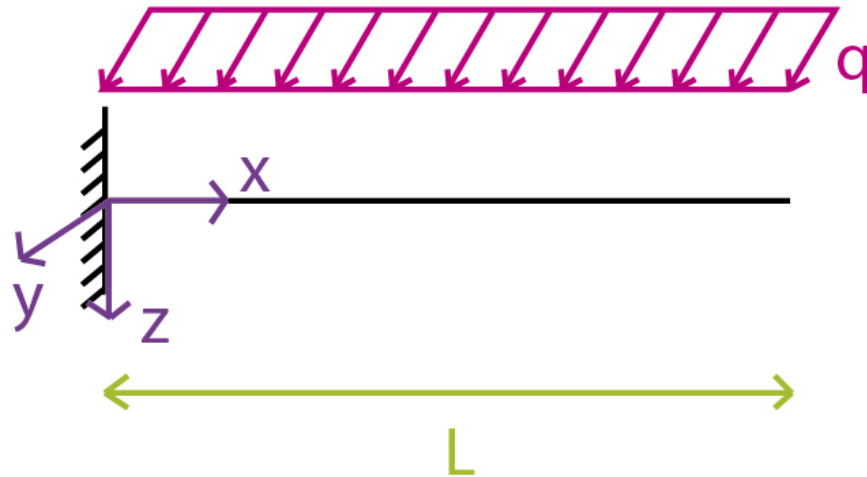
Eje neutro

El eje neutro es la recta respecto de la cual gira la sección.
Allí las deformaciones y tensiones son nulas.





Ejercicio 1: Dimensionar el perfil IPN



Datos:

- $\alpha = 30^\circ$
- $q = 5 \frac{kN}{m}$
- $\sigma_{adm} = 24 \frac{kN}{cm^2}$

$$\left\{ S_y = W_y = \frac{J_y}{z_{m\acute{a}x}} \right\}$$



Resolución:

Trazamos los diagramas de características, donde el diagrama Q es en la dirección de la carga distribuida y M en la perpendicular a la misma.

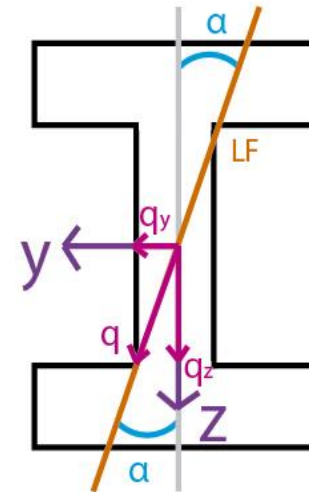
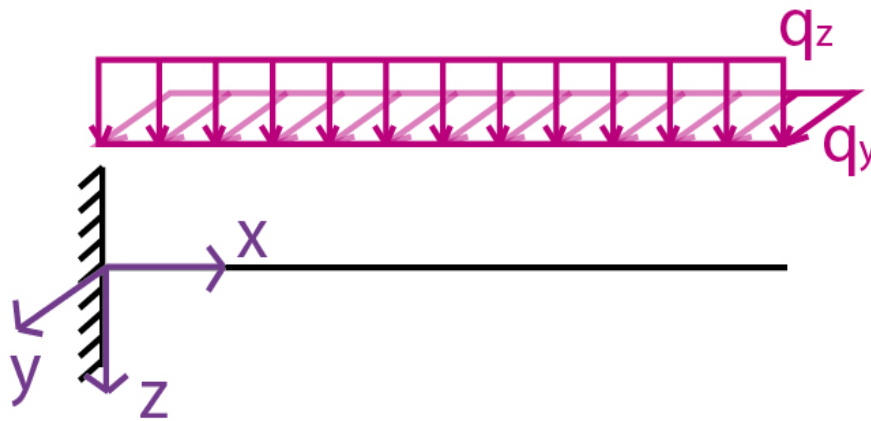


Sección más solicitada:
Empotramiento



Dimensionamos para la sección más solicitada descomponiendo la
1) fuerza y el 2) momento:

1) Descomponiendo la fuerza



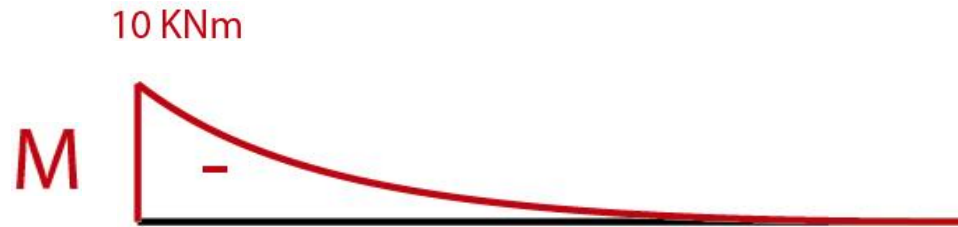
$$q_y = q \cdot \sin \alpha = 2,5 \frac{kN}{m}$$
$$q_z = q \cdot \cos \alpha = 4,33 \frac{kN}{m}$$



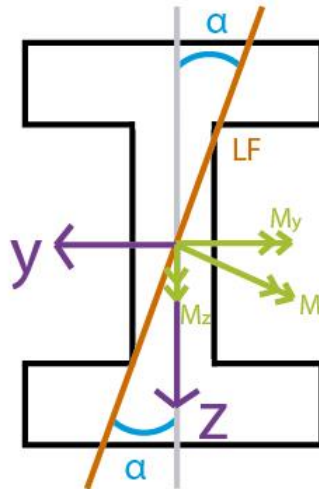
$$M_y = -q_z \cdot \frac{L^2}{2} = -8,66 \text{ kN m}$$
$$M_z = q_y \cdot \frac{L^2}{2} = 5 \text{ kN m}$$



2) Descomponiendo el momento



Del diagrama de momento total, obtenemos el momento del empotramiento
 $M = 10 \text{ kN m}$



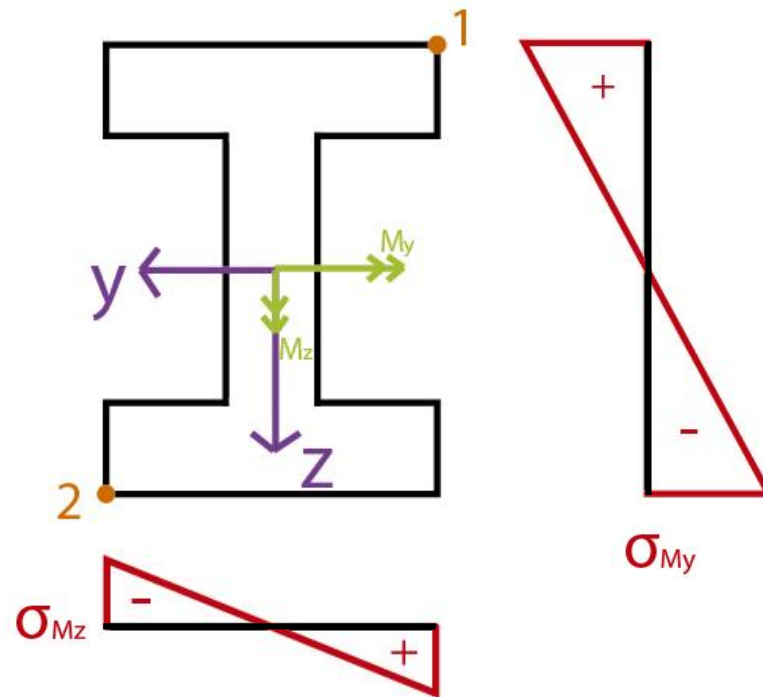
$$M_y = -M \cdot \cos \alpha = -8,66 \text{ kN m}$$

$$M_z = M \cdot \sin \alpha = 5 \text{ kN m}$$

Como era de esperar, por ambos caminos llegamos al mismo resultado



Trazamos los diagramas de tensiones:



Podemos notar que los puntos 1 y 2 son los más solicitados ya que allí, tanto las tensiones debido a M_y como las debido a M_z , presentan sus valores máximos y de igual signo.



Dimensionamos en base al punto 1



Calculamos las tensiones del punto 1:

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_{M_y}| &= \frac{|M_y \cdot z|}{J_y} = \frac{M_y}{W_y} \\ |\sigma_{M_z}| &= \frac{|M_z \cdot y|}{J_z} = \frac{M_z}{W_z} \end{aligned} \right\} \sigma_1 = \frac{M_y \cdot z_1}{J_y} - \frac{M_z \cdot y_1}{J_z} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}$$

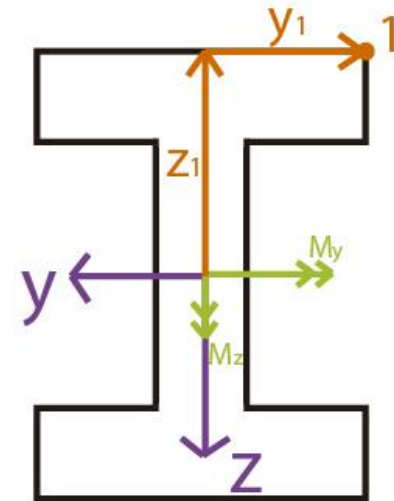
¡Observación!

Las variables involucradas en la ecuación general van siempre acompañadas con su signo



En este caso:

- M_y -
- z_1 -
- M_z +
- y_1 -





Para cumplir el criterio de resistencia:
$$\sigma_1 = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq \sigma_{adm}$$

Como $W_y \gg W_z \Rightarrow \frac{M_y}{W_y} \ll \frac{M_z}{W_z} \rightarrow \frac{M_y}{W_y}$ es mucho menor que $\frac{M_z}{W_z}$ en la ecuación, y para un iteración inicial lo despreciamos

Buscamos qué W_z cumple con la ecuación:
$$\frac{5 \text{ kN m}}{W_z} \leq 24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{5 \text{ kN m}}{24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \leq W_z$$

$$20,83 \text{ cm}^3 \leq W_z$$



El menor IPN que cumple con $W_z \geq 20,83 \text{ cm}^3$ es:

$$\text{IPN 200} \Rightarrow \begin{cases} W_z = S_z = 26 \text{ cm}^3 \\ W_y = S_y = 214 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

Verifico que este perfil cumpla con la ecuación completa:

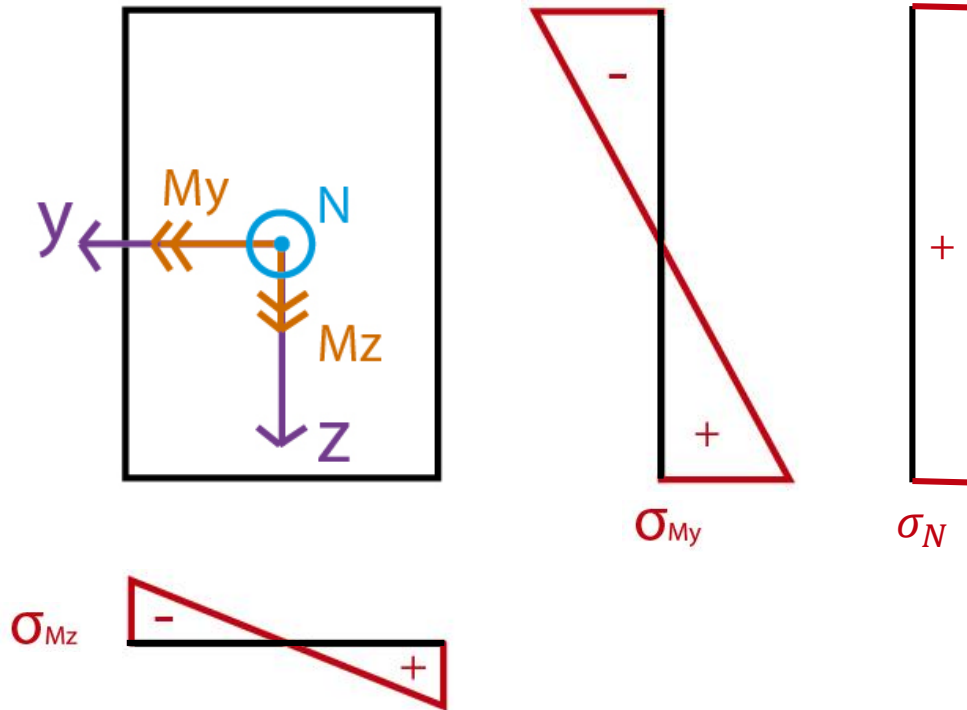
$$\sigma_1 = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_1 = \frac{8,66 \text{ kN m}}{214 \text{ cm}^3} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} + \frac{5 \text{ kN m}}{26 \text{ cm}^3} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 23,28 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < \sigma_{adm} = 24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Respuesta:

IPN 200

Flexión compuesta



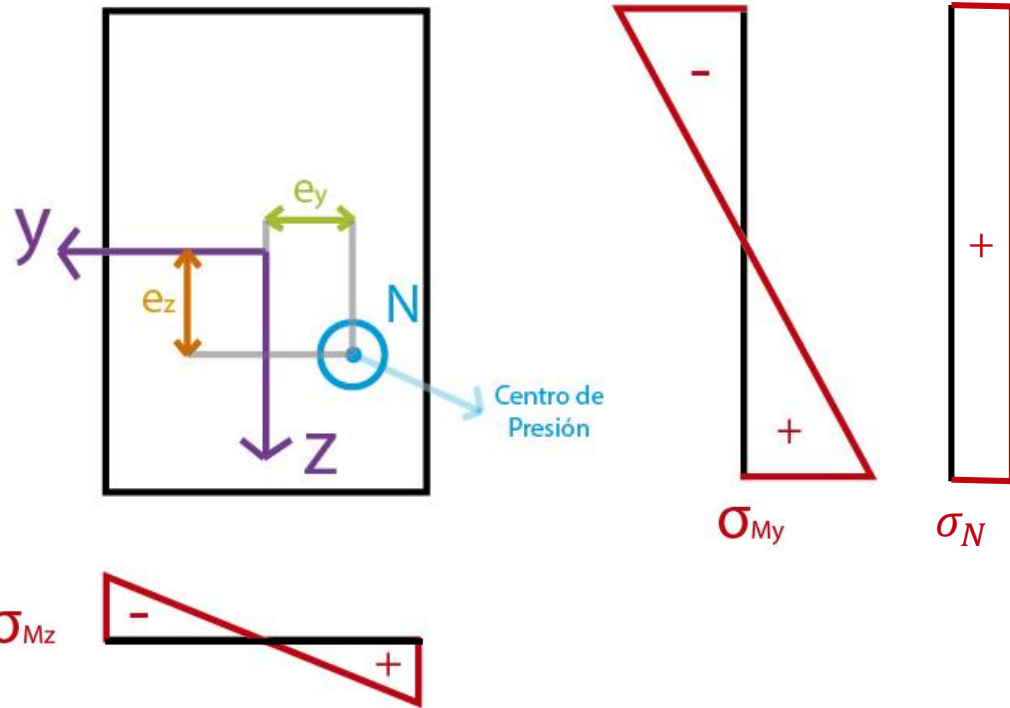
Tensiones:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} - \frac{M_z \cdot y}{J_z}$$

¡Observación!

Esta ecuación para el cálculo de tensiones se debe usar SIEMPRE en ejes principales

Centro de Presión



¡Observación!

El centro de presión está SIEMPRE ubicado sobre la línea de fuerzas

Para hallar el centro de presión:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_y^{cp} = -\frac{M_z}{N} \\ e_z^{cp} = \frac{M_y}{N} \end{array} \right.$$

Recordatorio: cada variable con los signos correspondientes



Eje Neutro

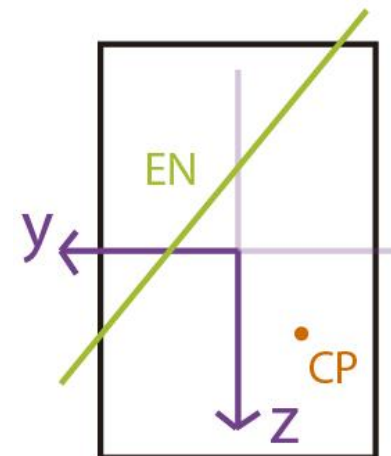
Allí las tensiones son nulas:

$$\sigma = N \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{e_z^{cp} \cdot z}{J_y} + \frac{e_y^{cp} \cdot y}{J_z} \right) = 0$$

$$\sigma = \frac{1}{A} + \frac{e_z^{cp} \cdot z}{J_y} + \frac{e_y^{cp} \cdot y}{J_z} = 0$$

¡Observación!

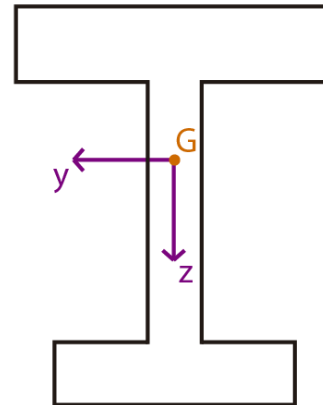
El eje neutro y el centro de presión
SIEMPRE están en semiplanos
opuestos. Ejemplo:





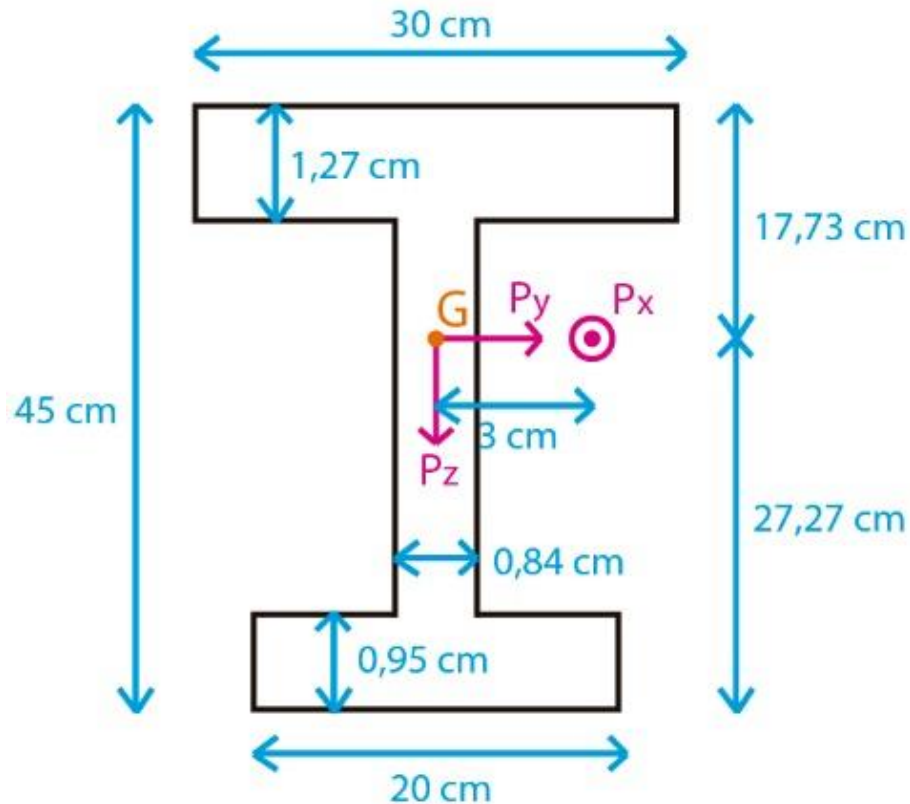
Ejercicio 2: Calcular y hallar:

- 1) $\sigma_{m\acute{a}x}$
- 2) Eje neutro, centro de presi3n y lnea de fuerzas



Datos:

- $P_x = 600 \text{ kN}$
- $P_y = 12 \text{ kN}$
- $P_z = 75 \text{ kN}$
- $L = 2 \text{ m}$
- *Acero F-36*
- $C.S. = 1,6$



Datos del perfil:

- $J_y = 29679,13 \text{ cm}^4$
- $J_z = 3493,41 \text{ cm}^4$
- $A = 84,31 \text{ cm}^2$
- $W_y^{SUP} = 1670,4 \text{ cm}^3$
- $W_y^{INF} = 1086,21 \text{ cm}^3$
- $W_z = 232,9 \text{ cm}^3$

¡Observación!

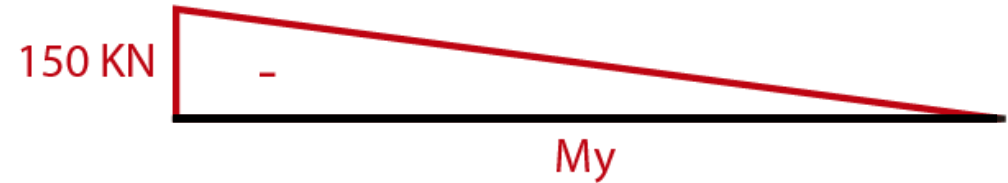
La carga P_x no está ubicada en el baricentro, sino que posee una excentricidad en el eje y de valor $e_y = 3 \text{ cm}$.

Esto hace que dicha carga produzca un momento constante en el eje z de valor

$$M_z = -e_y \cdot P_x = 18 \text{ kN m}$$



Trazamos los diagrama de características:



M_z producido por la carga P_y

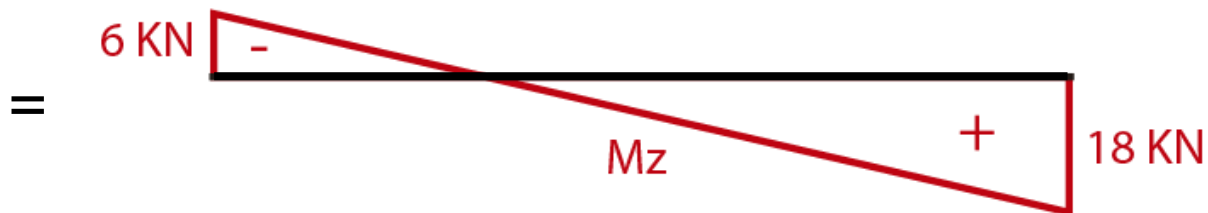


M_z producido por la excentricidad que posee la carga P_x

+

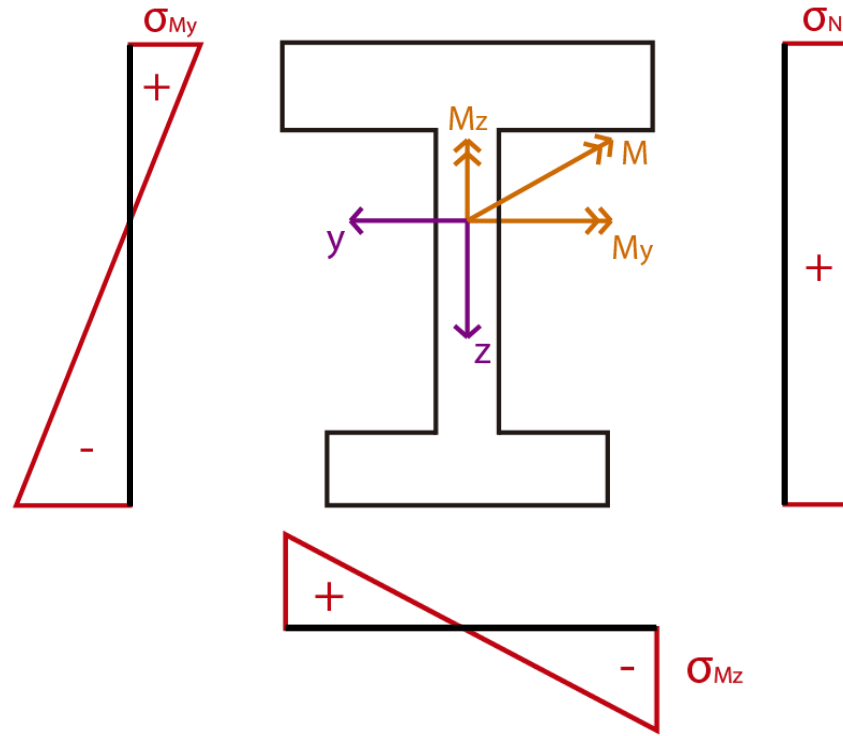


M_z total por superposición de efectos





Trazamos los diagramas de tensiones:

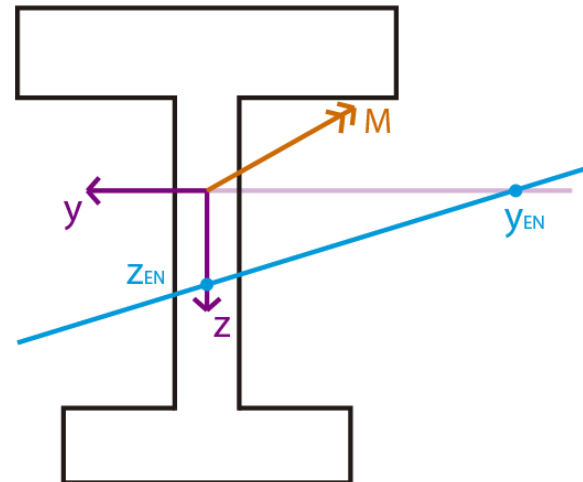


Eje neutro:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} - \frac{M_z \cdot y}{J_z} = 0$$

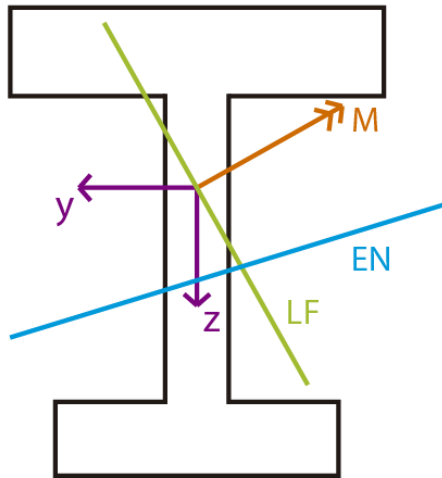
$$(y_{LN}; 0) \Rightarrow y_{LN} = \frac{N}{A} \cdot \frac{J_z}{M_z} = -41,4 \text{ cm}$$

$$(0; z_{LN}) \Rightarrow z_{LN} = -\frac{N}{A} \cdot \frac{J_y}{M_y} = 14 \text{ cm}$$





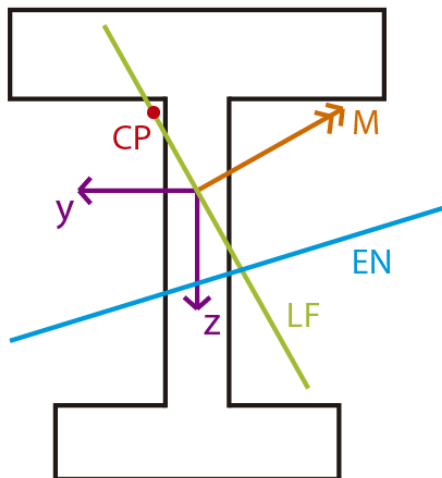
Ubicamos la línea de fuerzas:



¡Recordatorio!

El eje neutro y la línea de fuerzas son ejes conjugados de inercia.

Centro de presión:

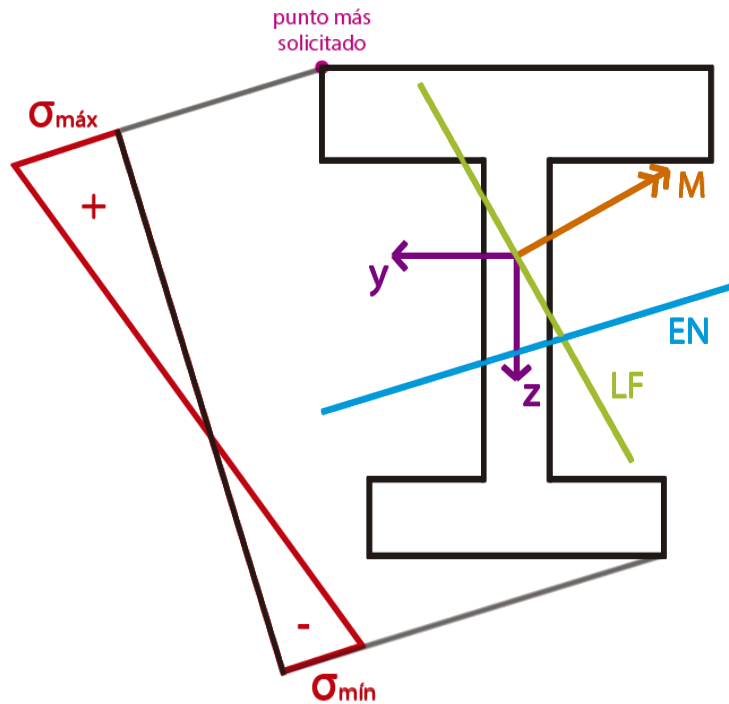


$$M_y = N \cdot e_z \Rightarrow e_z = \frac{M_y}{N} = -25 \text{ cm}$$

$$M_z = -N \cdot e_y \Rightarrow e_y = -\frac{M_z}{N} = 1 \text{ cm}$$



Trazamos el diagrama de tensiones totales:



¡Observación!

El diagrama de tensiones totales se traza perpendicular al eje neutro.

El punto más solicitado recibe las mayores tensiones positivas:

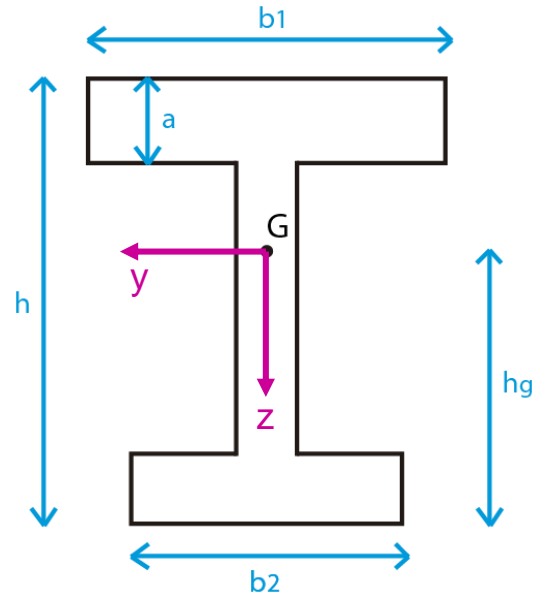
$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{600 \text{ kN}}{84,31 \text{ cm}^2} + \frac{(-150 \text{ kN m})}{29679,13 \text{ cm}^4} \cdot (-17,73 \text{ cm}) - \frac{(-6 \text{ kN m})}{3493,41 \text{ cm}^4} \cdot 15 \text{ cm}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 18,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < \sigma_{adm} = \frac{\sigma_F}{c.s.} = \frac{36 \text{ kN/cm}^2}{1,6}$$



Núcleo central

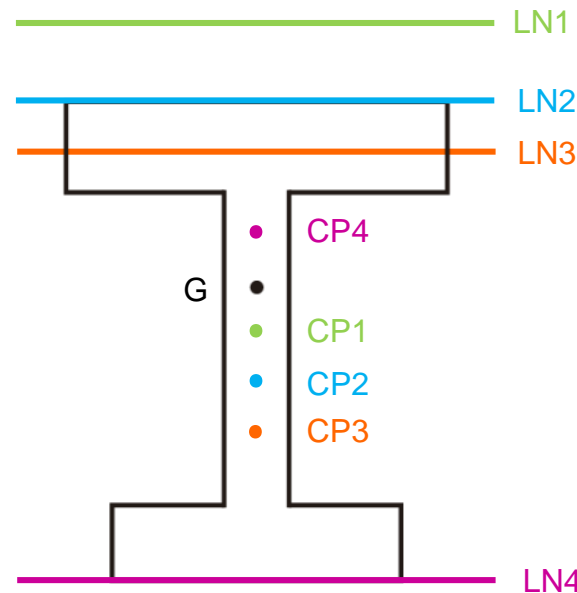
Tomamos como ejemplo la sección del ejercicio anterior:



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} - \frac{M_z \cdot y}{J_z} = 0 \rightarrow \sigma = \frac{1}{A} + \frac{e_z^{cp} \cdot z}{J_y} + \frac{e_y^{cp} \cdot y}{J_z} = 0$$

Si el centro de presión pertenece al eje $z \rightarrow e_y^{cp} = 0$

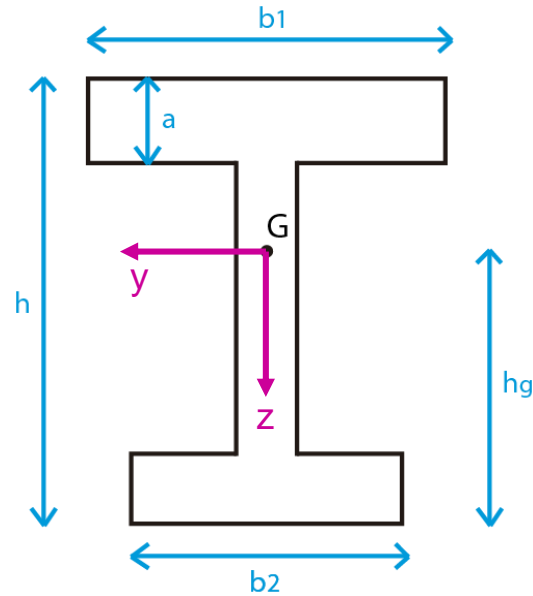
$$z = -\frac{J_y}{A \cdot e_z^{cp}}$$





Núcleo central

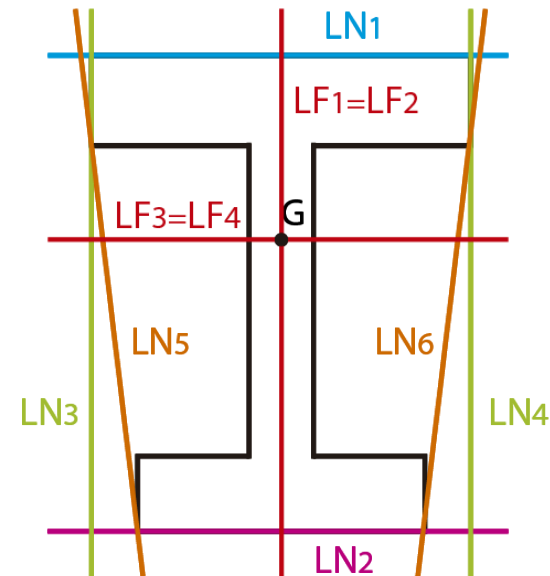
Tomamos como ejemplo la sección del ejercicio anterior:



Para hallar el núcleo central, sólo será necesario hallar los vértices de este. Para esto tenemos que ubicar las líneas neutras tangentes al contorno de la sección.

La LF_i es un eje conjugado de inercia de la LN_i y pasa por el baricentro. Además, el CP_i se encontrará sobre su LF_i .

Como LN_1 , LN_2 , LN_3 y LN_4 son paralelas a los ejes principales, las líneas de fuerza asociadas serán ortogonales a ellas.





Recordemos la ecuación de la línea neutra en función de la excentricidad del centro de presión:

$$\sigma = \frac{1}{A} + \frac{e_z^{cp} \cdot z}{J_y} + \frac{e_y^{cp} \cdot y}{J_z} = 0$$

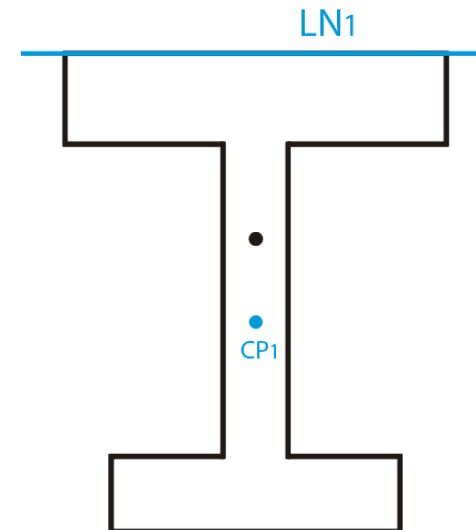
¡Observación!

El núcleo central NO depende de la carga, sólo de la geometría de la sección.

1) $CP_1 \left\{ \begin{array}{l} e_y^1 = 0 \rightarrow \text{Lo sabemos ya que conocemos la ubicación de la } LF_1 \\ z_1 = -(h - h_G) = h_G - h \end{array} \right.$

$$\frac{1}{A} + \frac{e_z^1}{J_y} \cdot (h_G - h) = 0 \Rightarrow e_z^1 = -\frac{J_y}{A \cdot (h_G - h)}$$

$$CP_1 = \left(0; -\frac{J_y}{A \cdot (h_G - h)} \right)$$





$$2) CP_2 \begin{cases} e_y^2 = 0 \rightarrow \text{Porque } LF_1 \equiv LF_2 \\ z_2 = h_G \end{cases}$$

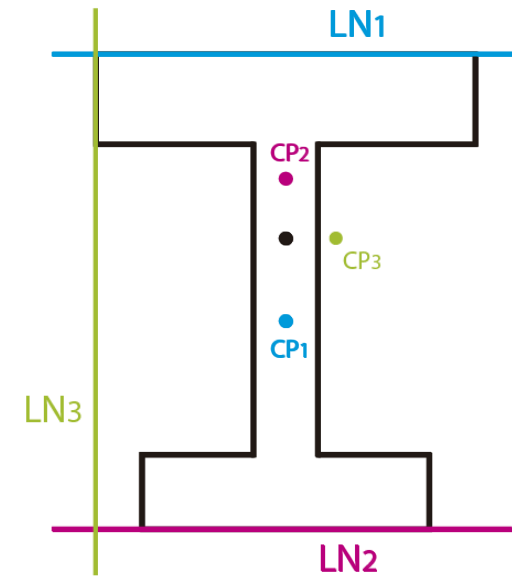
$$\frac{1}{A} + \frac{e_z^2}{J_y} \cdot h_G = 0 \Rightarrow e_z^2 = -\frac{J_y}{A \cdot h_G}$$

$$CP_2 = \left(0; -\frac{J_y}{A \cdot h_G} \right)$$

$$3) CP_3 \begin{cases} e_z^3 = 0 \rightarrow \text{Lo sabemos ya que conocemos} \\ y_3 = b_1/2 \end{cases} \text{ la ubicación de la } LF_3$$

$$\frac{1}{A} + \frac{e_y^3}{J_z} \cdot \frac{b_1}{2} = 0 \Rightarrow e_y^3 = -\frac{J_z}{A \cdot b_1/2}$$

$$CP_3 = \left(-\frac{J_z}{A \cdot b_1/2}; 0 \right)$$





$$4) CP_4 \begin{cases} e_z^4 = 0 \rightarrow \text{Porque } LF_3 \equiv LF_4 \\ y_4 = -b_1/2 \end{cases}$$

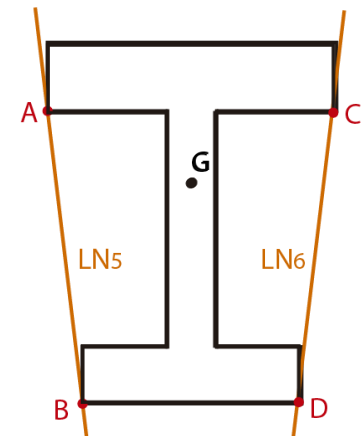
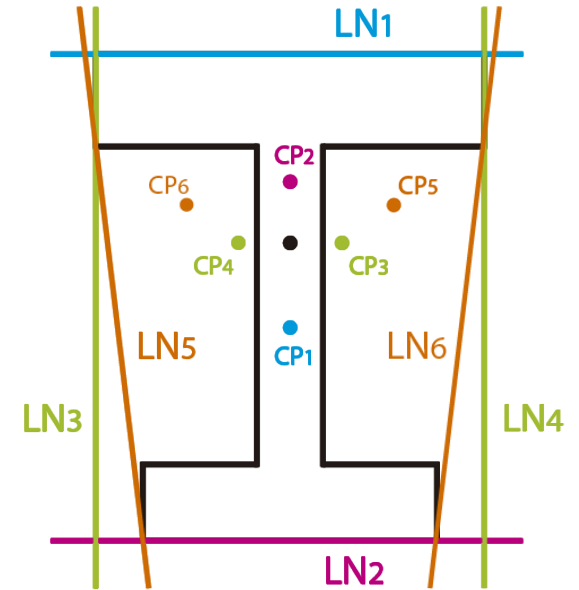
$$\frac{1}{A} + \frac{e_y^4}{J_z} \cdot \left(-\frac{b_1}{2}\right) = 0 \Rightarrow e_y^4 = \frac{J_z}{A \cdot b_1/2}$$

$$CP_4 = \left(\frac{J_z}{A \cdot b_1/2}; 0 \right)$$

5) CP_5
6) CP_6 \rightarrow Como no es sencillo conocer alguna de las coordenadas de cada CP , debemos resolver un sistema de 2×2 para cada uno, reemplazando las coordenadas de dos puntos conocidos por los que pasa su respectiva LN en la ecuación.

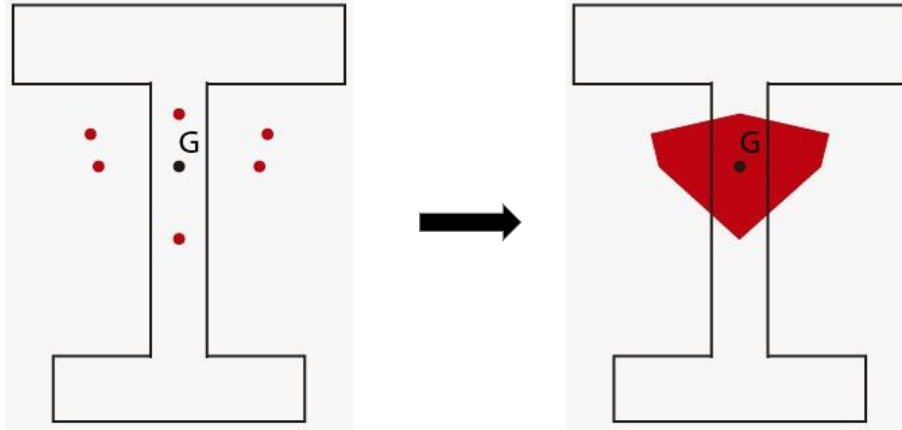
$$A = \left(\frac{b_1}{2}; -(h - h_G - a) \right) \quad B = \left(\frac{b_2}{2}; h_G \right)$$

$$C = \left(-\frac{b_1}{2}; -(h - h_G - a) \right) \quad D = \left(-\frac{b_2}{2}; h_G \right)$$





Las infinitas líneas que pivotean respecto a los vértices generan los infinitos puntos entre los vértices del núcleo central.



El núcleo central es el área definida por los puntos que, tomados como centro de presión, originan tensiones de un mismo signo en la sección.

¡Observación!

El baricentro siempre debe estar contenido dentro del núcleo central.



Recordemos que cuando $e = 0 \Rightarrow LN \rightarrow \infty$ y estaremos ante una sollicitación axial pura, por lo tanto, tendremos tensiones de un solo signo.

¿Por que?