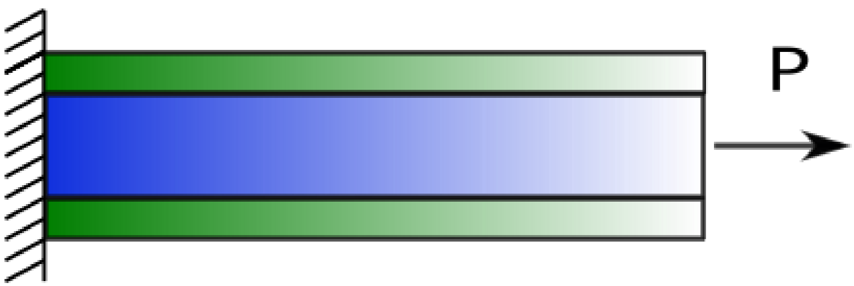
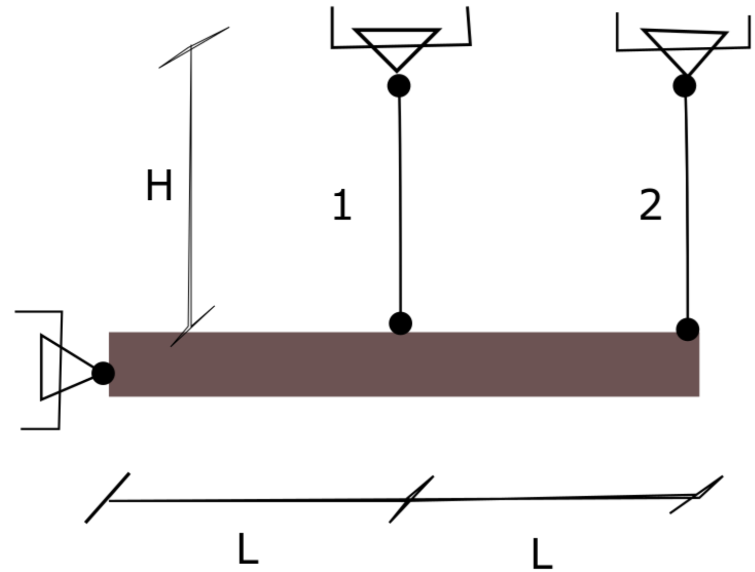
Solicitación Axil en Régimen Elástico





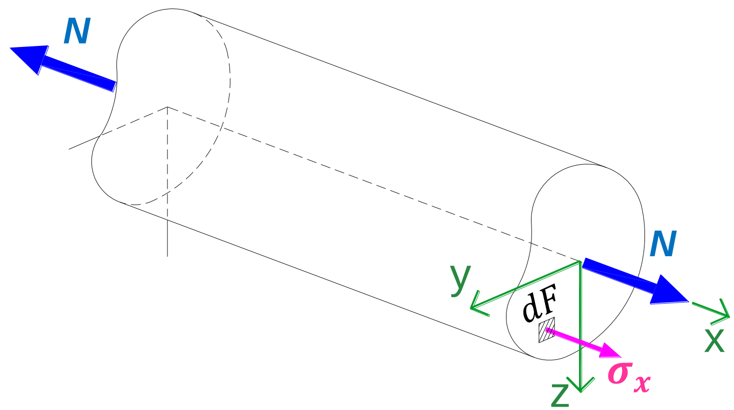
Manuela Medina – Constanza Ruffinelli – Tania Poletilo

Catalina Urteneche – Clara Zaccaria – Florencia Chester

Conceptos teóricos

SOLICITACION AXIL EN PERÍODO ELÁSTICO

La resultante de las acciones a un lado de la sección se reduce a una fuerza coincidente con el eje de la barra.



Ec. de equivalencia: $$N = \int_A \sigma_x \, dA$$

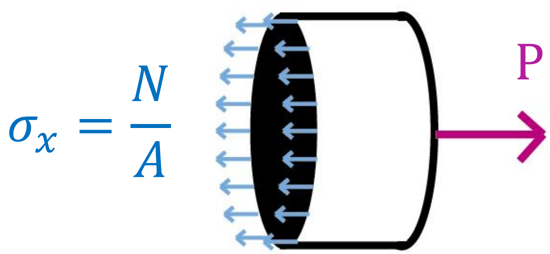
Secciones planas y paralelas permanecen planas y paralelas $\varepsilon_x = cte$

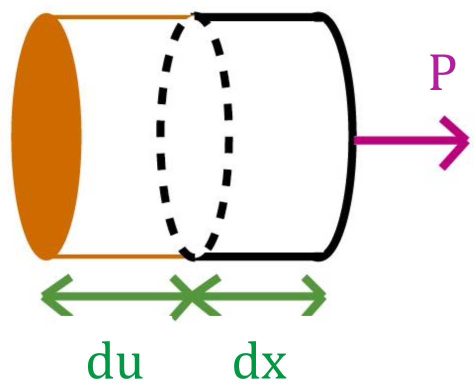
Entonces, esto implica $\varepsilon_x = cte = \dfrac{\sigma_x}{E} \Longrightarrow \sigma_x = cte$

Conceptos teóricos

Por lo tanto $$N = \sigma_x \int dA = \sigma_x \, A \quad \Longrightarrow \quad \sigma_x = \frac{N}{A} \qquad \varepsilon_x = \frac{N}{E \cdot A}$$

En cuanto al desplazamiento $$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad \Longrightarrow \quad u(x) = \int_0^x \varepsilon \, dl = \frac{N \cdot x}{E \cdot A}$$

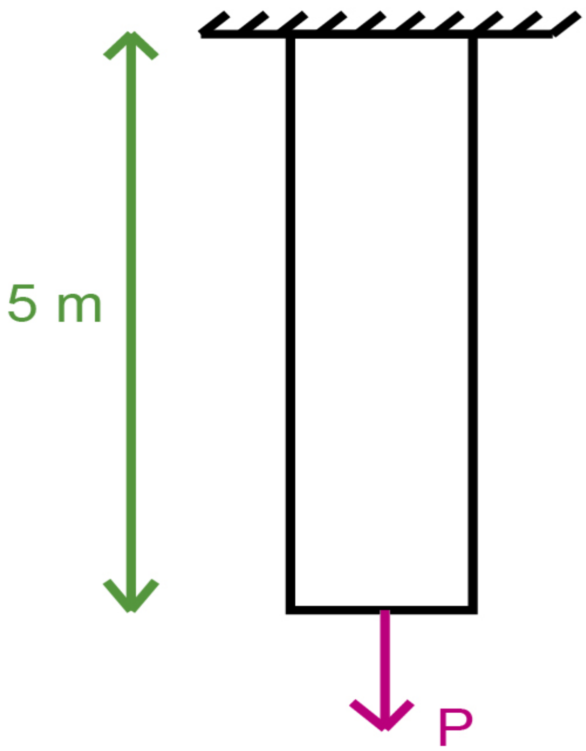


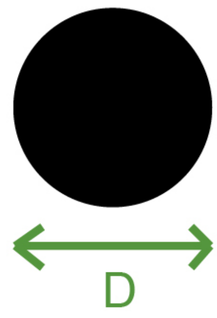


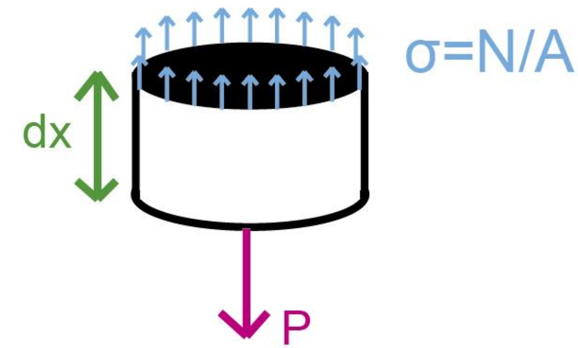
Ejercicio 1: Dimensionar el diámetro D

a) Por resistencia: $\sigma < \sigma_{adm}$

b) Por desplazamiento: $\Delta L < \dfrac{L}{1000}$







Datos:

$\sigma_{adm} = 140\ MPa$

$E = 210\ GPa$

$P = 50\ kN$

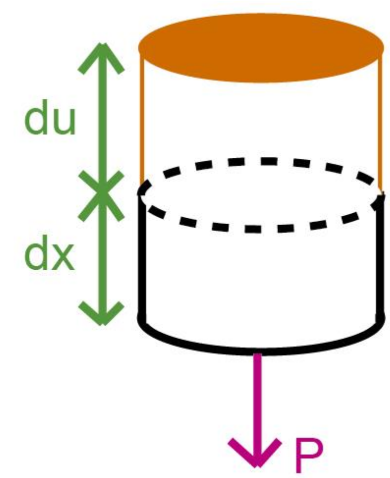
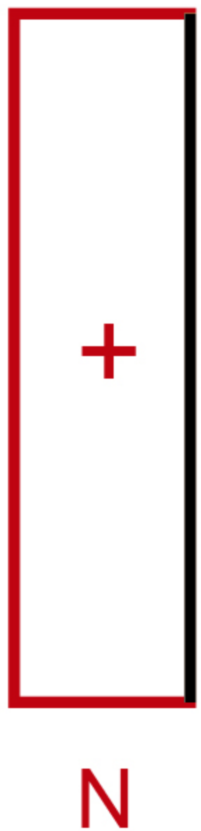
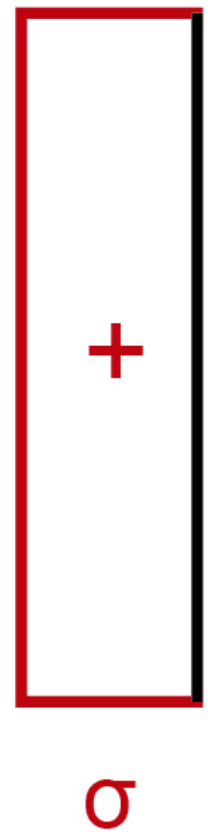


Diagrama de Esfuerzo Normal



$$N = P = 50\ kN$$

Diagrama de Tensión Normal

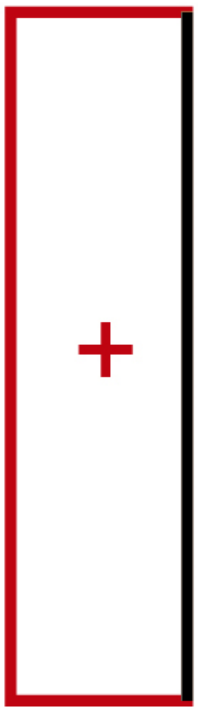


$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$N = cte \quad \rightarrow \quad \sigma = cte$$

Diagrama de Deformación Longitudinal



ε

Ley de Hooke:

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x)$$

$$\varepsilon = cte \quad \leftrightarrow \quad \sigma = cte$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{210\ GPa}$$

Diagrama de Desplazamientos

ΔL

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{P}{E \cdot A}$$

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon\, dl = \frac{P \cdot x}{E \cdot A}$$

a) Por resistencia

$$\sigma < \sigma_{adm}$$

$$\sigma = \frac{50\ kN}{\left(\frac{\pi \cdot D^2}{4}\right)} < 140\ MPa = \sigma_{adm}$$

$$D \geq 2{,}13\ cm$$

b) Por desplazamiento

$$\Delta L < \frac{L}{1000}$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot A} \rightarrow \Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$$

$$\Delta L = \frac{50\ kN \cdot 5\ m}{210\ GPa \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4}\right)} < 5\ mm$$

$$D > 1{,}74\ cm$$

Dimensionamos a partir del diámetro mayor: $\boxed{D \geq 2{,}13\ cm}$

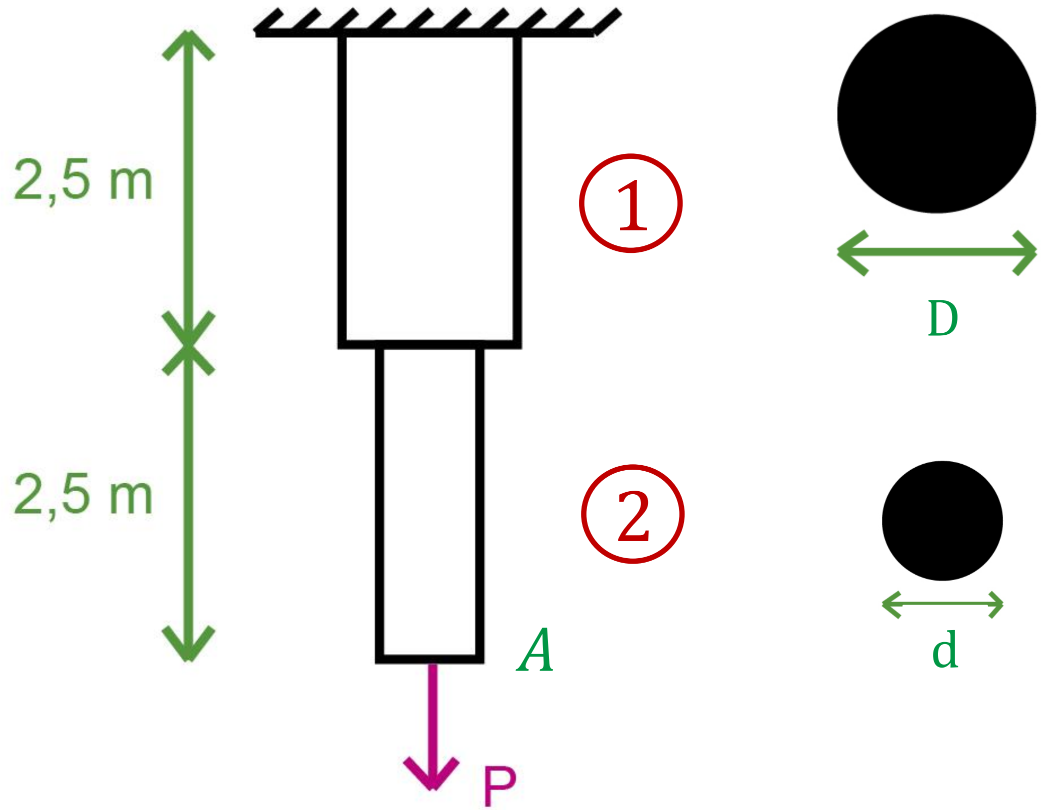
$\sigma = ?$ $\varepsilon = ?$ $\Delta L = ?$

$$\sigma = 140\ MPa$$

$$\varepsilon = \frac{140\ MPa}{210\ GPa} = 6{,}667 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta L = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = 3.33\ mm$$

Ejercicio 2: Calcular el desplazamiento del punto A



Datos:

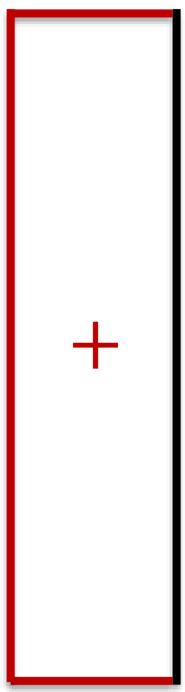
$E = 210\ GPa$

$P = 50\ kN$

$D = 4\ cm$

$d = 2,5\ cm$

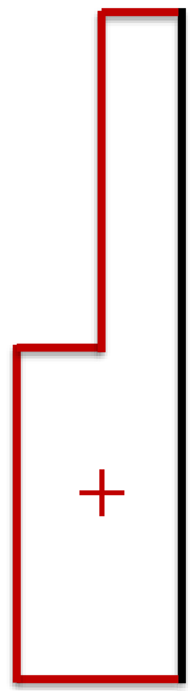
Diagrama de Esfuerzo Normal



$N = P = k0\ KN$

Diagrama de Tensión Normal

$\sigma_1 = 3{,}98\ kN/cm^2$



$\sigma_2 = 10{,}2\ kN/cm^2$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

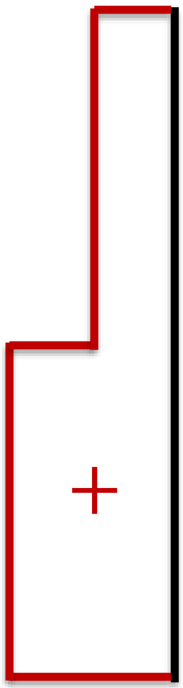
$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$A_1 = 12{,}6\ cm^2$$

$$A_2 = 4{,}91\ cm^2$$

Diagrama de Deformación Longitudinal

$\varepsilon_1 = 1{,}89 \cdot 10^{-4}$



$\varepsilon_2 = 4{,}85 \cdot 10^{-4}$

Ley de Hooke:

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{210\ GPa}$$

Diagrama de Desplazamientos

$\delta_1 = 0{,}474\ mm$

$\delta_A = 1{,}69\ mm$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{P}{E \cdot A}$$

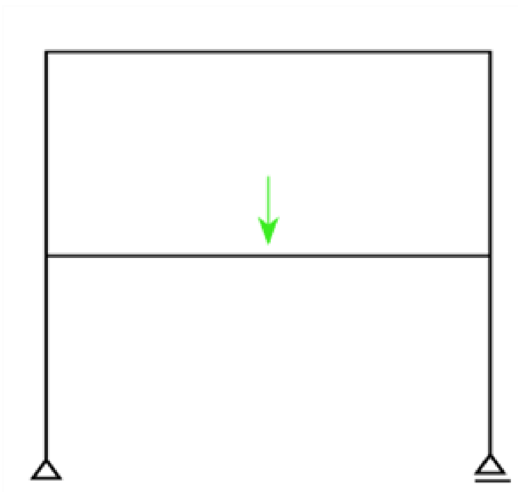
$$u(x) = \int_0^x \varepsilon\, dl = \frac{P \cdot x}{E \cdot A}$$

$$\delta_1 = \frac{P \cdot 2{,}5m}{E \cdot A_1} = 0{,}474\ mm$$

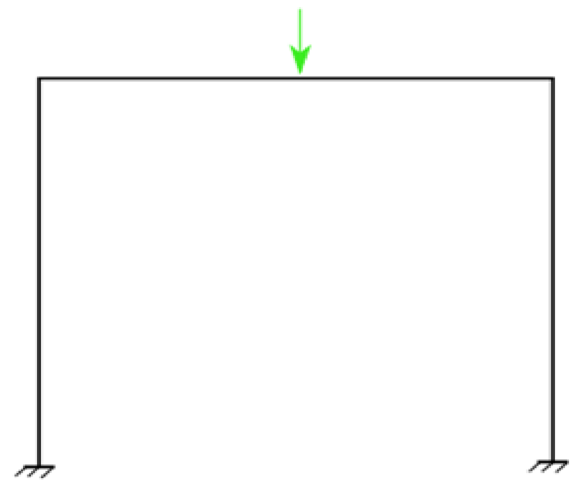
$$\delta_A = \delta_1 + \frac{P \cdot 2{,}5m}{E \cdot A_2} = 1{,}69\ mm$$

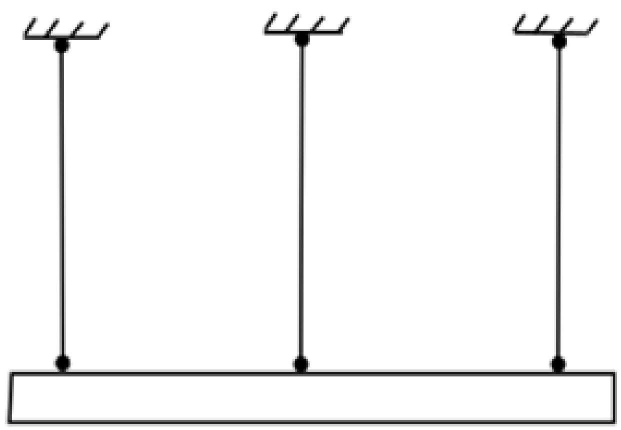
Sistemas Hiperestáticos

Hiperestaticidad Interna:



Hiperestaticidad Externa:





A veces no es tan simple, por ejemplo:

- Hiperestático para cargas verticales
- Hipoestático para cargas horizontales

¿Como resolver un hiperestático?

- **Ecuaciones de Equilibrio**
  - Condiciones Estáticas

- **Ecuaciones de Compatibilidad**
  - Condiciones Cinemáticas

Como es un sistema hiperestático las ecuaciones de equilibrio no son suficientes.
Se deben añadir ecuaciones que describen la deformación del cuerpo.

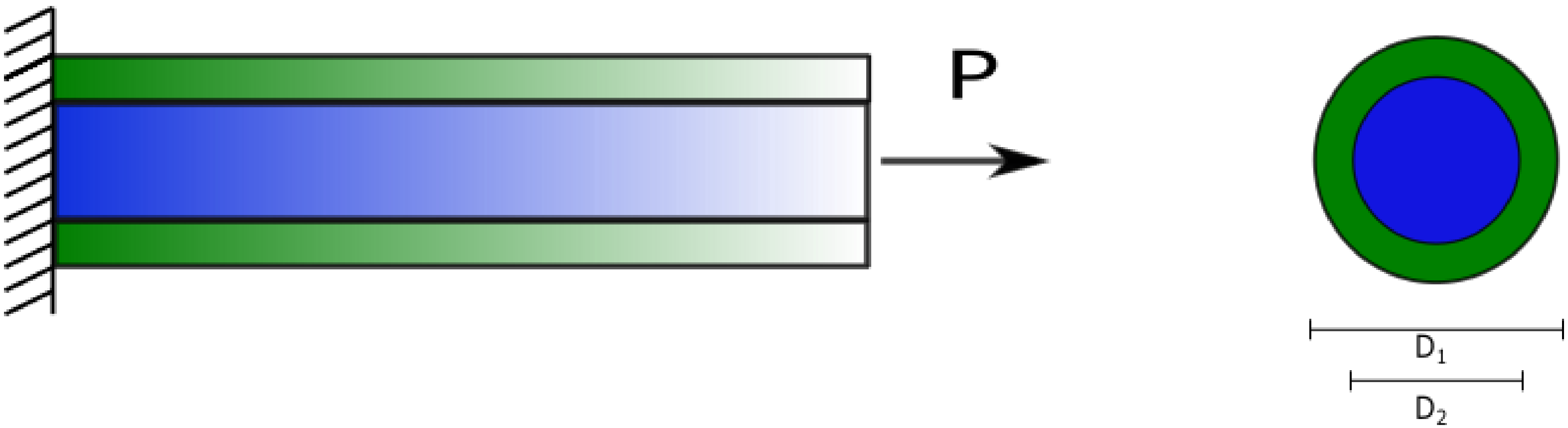
Métodos:

1. Inspección

2. Método de las Incógnitas Estáticas
   a. Inspección
   b. Teorema de los Trabajos Virtuales

Hiperestaticidad Interna

Ejercicio 3: Calcular la tensión y deformación específica en cada barra.



Datos:

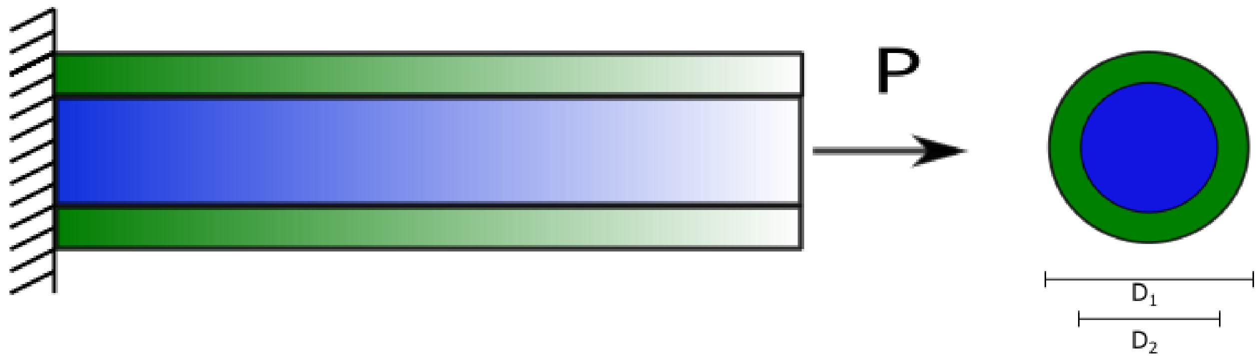
$D_1 = 5\ cm \qquad D_2 = 3\ cm$

$P = 100\ kN$

$L = 7\ m$

$E_1 = 100\ GPa \qquad E_2 = 200\ GPa$

Resolución:



1) Ecuación de Equilibrio: $P = N_1 + N_2$

2) Ecuación de Compatibilidad: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$$\frac{N_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2}{E_2 \cdot A_2} \Longrightarrow N_1 = N_2 \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{E_2 \cdot A_2}$$

(1) + (2) $\Longrightarrow$ $P = N_1 + N_2 = N_2 \cdot \left(1 + \frac{E_1 \cdot A_1}{E_2 \cdot A_2}\right)$

Cálculo de Áreas:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \cdot \left(D_1^2 - D_2^2\right) = 12.57\ cm^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} \cdot D_2^2 = 7.07\ cm^2$$

$$N_2 = \frac{P}{\left(1 + \frac{E_1 \cdot A_1}{E_2 \cdot A_2}\right)} = 52.94\ kN$$

$$N_1 = P - N_2$$

$$N_1 = 47.06\ kN$$

Tensiones

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 37.45\ MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 74.9\ MPa$$

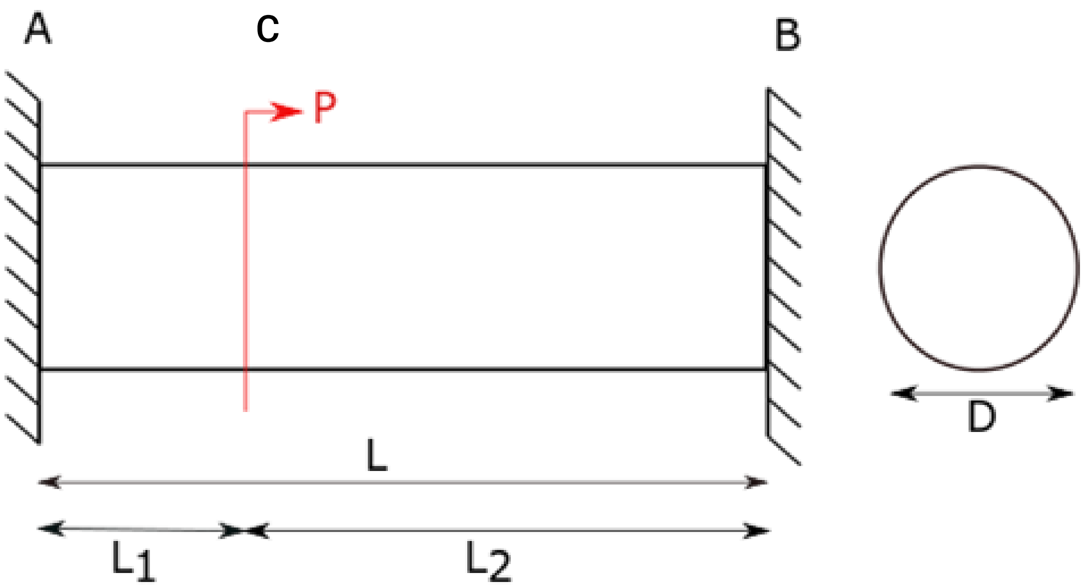
Deformaciones

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = 3.745x10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = 3.745x10^{-4}$$

Hiperestaticidad externa

Ejercicio 4: Trazar los diagramas de esfuerzo axil, tensión, deformación y corrimiento



Datos:

$D = 5\ cm$

$L = 7\ m$

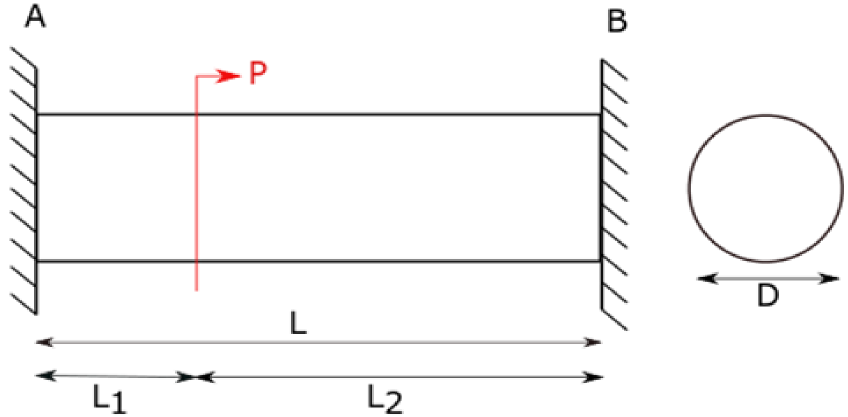
$L_1 = 2\ m$

$L_2 = 5\ m$

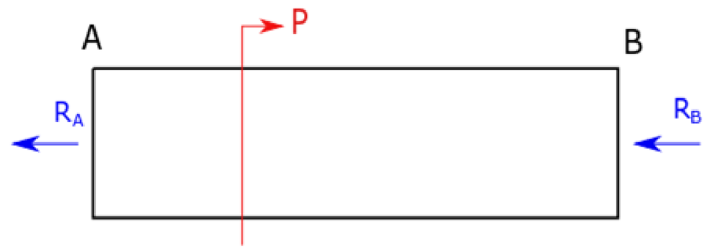
$E = 100\ GPa$

$P = 100\ kN$

Resolución:



1) Ecuación de Equilibrio



$$P = R_A + R_B$$

$$P = N_A - N_B$$

2) Ecuación de compatibilidad

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$

$$\varepsilon_1 \cdot L_1 + \varepsilon_2 \cdot L_2 = 0$$

$$\frac{N_A}{E \cdot A} \cdot L_1 + \frac{N_B}{E \cdot A} \cdot L_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_A = -N_B \cdot \frac{L_2}{L_1}$$

(1) + (2) $\Rightarrow$

$$P = N_A - N_B$$

$$N_A = -N_B \cdot \frac{L_2}{L_1}$$

$\Rightarrow$

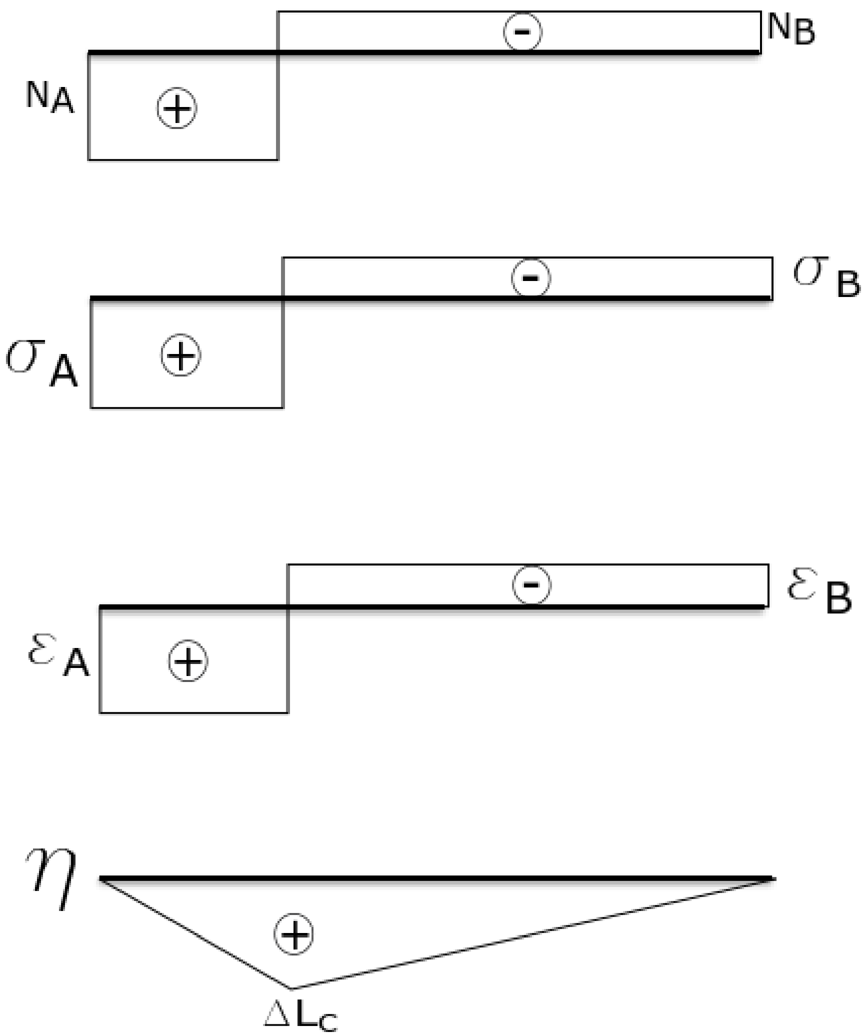
$$P = -N_B \cdot \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)$$

$$N_B = \frac{-P}{\left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)} = -28.57\ kN$$

$$N_A = P + N_B = 71.43\ kN$$

¿Cómo son los diagramas de N, σ, ε, u?

Diagramas



$$N_B = -P \cdot \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right) = -28.57\ kN \qquad N_A = P + N_B = 71.43\ kN$$

$$\sigma_A = \frac{N_A}{A} = 3.64\ \frac{kN}{cm^2} \qquad \sigma_B = \frac{N_B}{A} = -1.455\ \frac{kN}{cm^2}$$

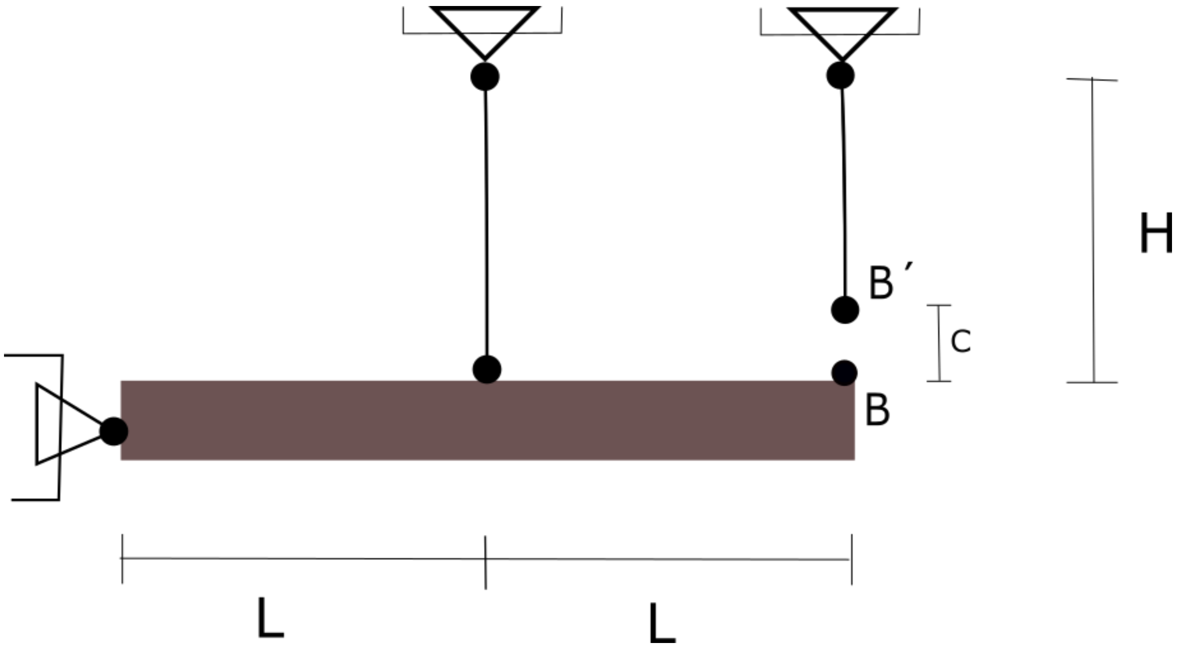
$$\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{E} = 3.638x10^{-4} \qquad \varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E} = -1.455x10^{-4}$$

$$\Delta L = \int \varepsilon\ dx$$

$$\Delta L_C = \varepsilon_A \cdot L_1 = 0.073\ cm$$

Error de Montaje

Ejercicio 5: Salvar el error de montaje y calcular las tensiones en todas las barras una vez montado.



Datos:

$L = 2\ m$

$H = 3\ m$

$E = 200\ GPa$

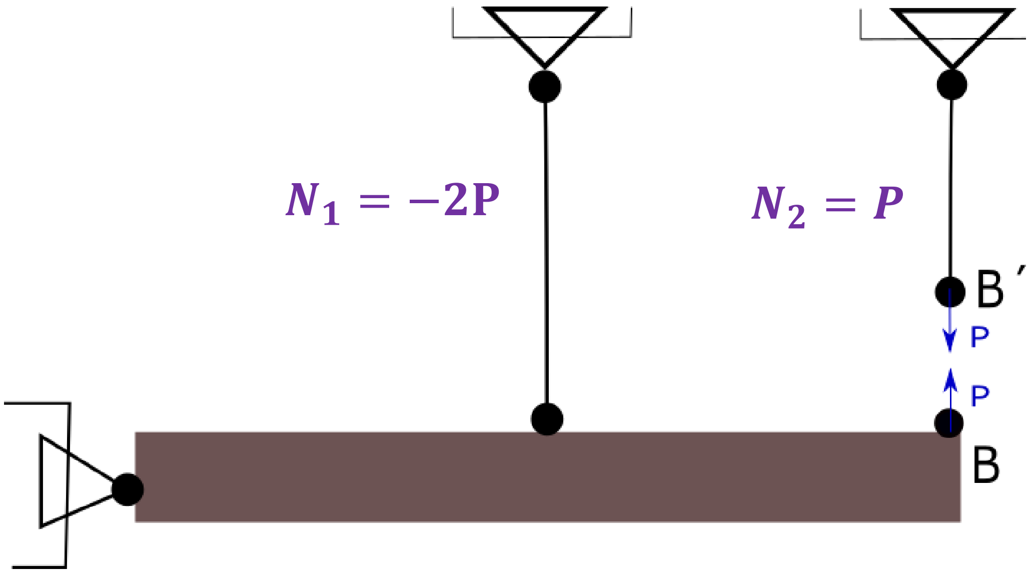
$A = 5\ cm^2$

$c = 3\ mm$

Puede resolverse de varias formas:

- Aplicar una única fuerza, y luego hacer la descarga con una carga de igual módulo y sentido contrario
- Aplicar dos fuerzas

Aplico dos fuerzas P donde se quiere salvar el error de montaje



$$c = \left|\delta^B\right| + \left|\delta^{B'}\right| = 3\ mm$$

$$\left|\delta^B\right| = 2\delta^A = 2 \cdot \frac{N_1 \cdot H}{E \cdot A}$$

$$\left|\delta^{B'}\right| = \frac{N_2 \cdot H}{E \cdot A}$$

$$2 \cdot \frac{2P \cdot H}{E \cdot A} + \frac{P \cdot H}{E \cdot A} = 3\ mm$$

$$\boxed{P = \frac{3\ mm \cdot E \cdot A}{5 \cdot H} = 20\ kN}$$

Entonces

$$N_1 = -2P = -40\ kN \qquad\qquad N_2 = P = 20\ kN$$

Tensiones residuales

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{-40\ kN}{5\ cm^2} \qquad \boxed{\sigma_1 = -8\,\frac{kN}{cm^2}}$$

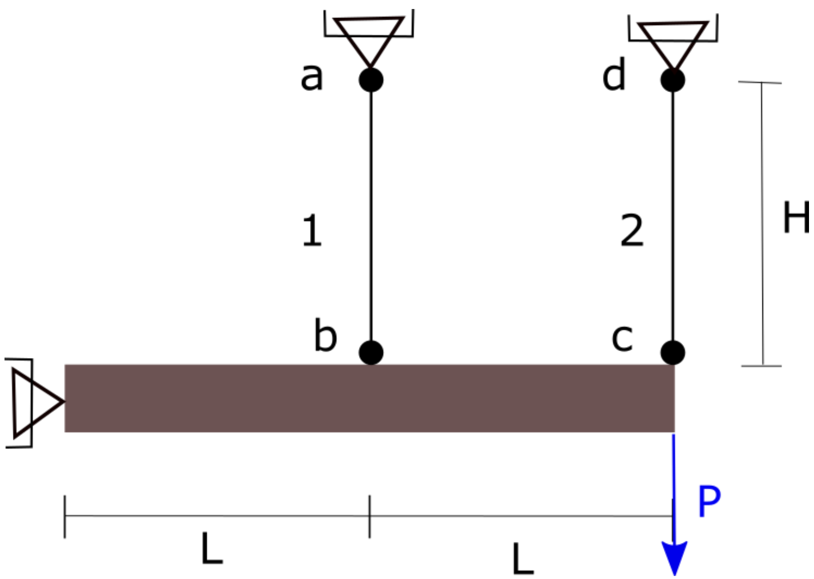
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{20\ kN}{5\ cm^2} \qquad \boxed{\sigma_2 = 4\,\frac{kN}{cm^2}}$$

Deformaciones residuales

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{-8\ kN/cm^2}{20000\ kN/cm^2} \qquad \boxed{\varepsilon_1 = -4.10^{-4}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{4\ kN/cm^2}{20000\ kN/cm^2} \qquad \boxed{\varepsilon_2 = 2.10^{-4}}$$

Ejercicio 6: Calcular esfuerzos en ambas barras y el desplazamiento del punto C



Datos:

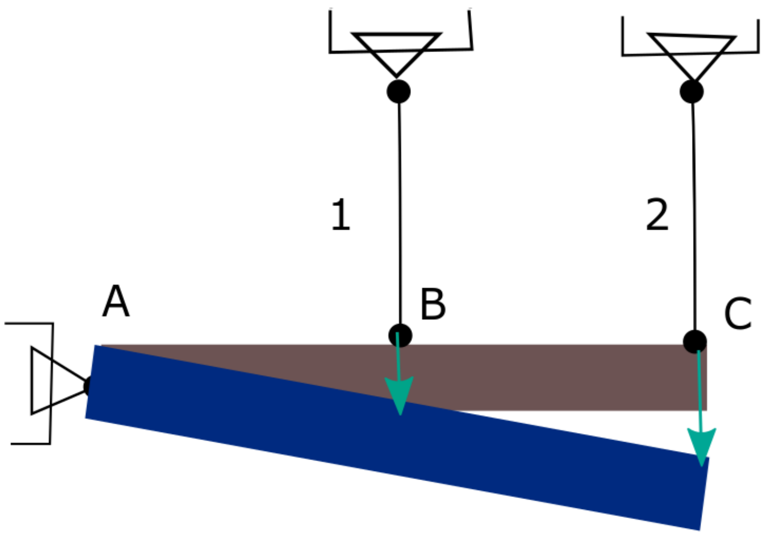
$L = 2\ m$ $\quad H = 3\ m$ $\quad A = 5\ cm^2$

$P = 100\ kN$ $\quad E = 200\ GPa$

*Nota: barra gris es infinitamente rígida

Resolución por inspección

Proponer como deforma la estructura



Suponemos pequeñas deformaciones

Siempre bajo hipótesis de la linealidad cinemática (pequeños desplazamientos)

Por semejanza de triángulos podemos despejar el desplazamiento del punto C, que será dos veces el del punto B; $\delta_C = 2\delta_B$

Las flechas turquesas muestran el desplazamiento

1) Ecuación de compatibilidad: (suponiendo ambas normales positivas; tracción)

$$\Delta L_2 = 2 \cdot \Delta L_1$$

$$N_2 \cdot \frac{H}{A_2 \cdot E_2} = 2N_1 \cdot \frac{H}{A_1 \cdot E_1}$$

Nota: $E_2 = E_1$ y $A_2 = A_1$

$$N_2 = 2 \cdot N_1$$

2) Ecuación de Equilibrio

Planteando sumatoria de momentos desde A igual cero:

$$\sum M_a = N_1 \cdot L + N_2 \cdot 2L - P \cdot 2L = 0$$

$$N_1 = \frac{2}{5} \cdot P \xrightarrow{N_2 = 2 \cdot N_1} N_2 = \frac{4}{5} \cdot P$$

N_1 y N_2 positivos significa que se mantienen los signos propuestos, en este caso habíamos supuesto tracción en ambas barras

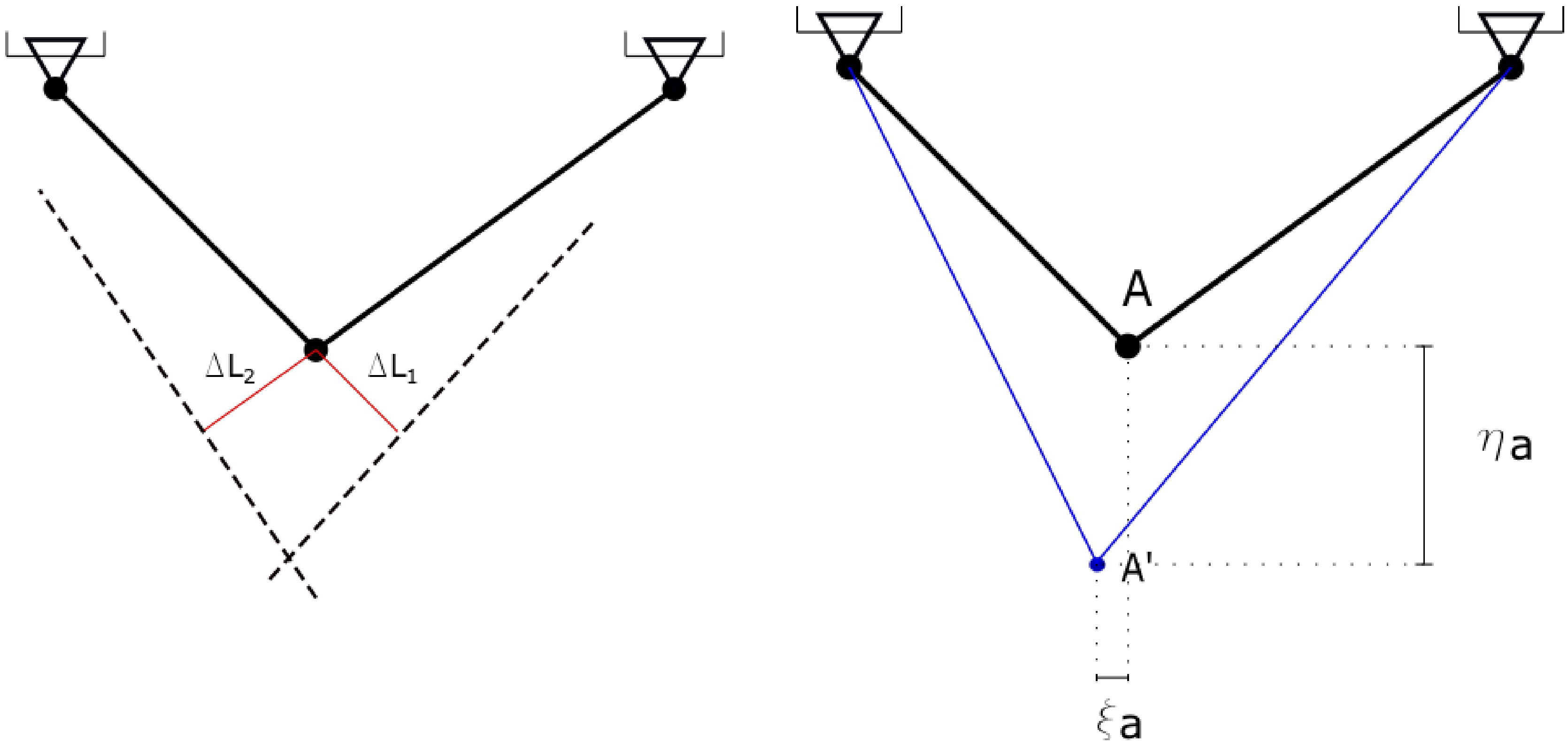
$$\boxed{N_1 = 40\ kN \quad \text{y} \quad N_2 = 80\ kN}$$

IMPORTANTE: La suma de ambas normales no da P. ¿Porque?

Para calcular el desplazamiento en C calculo:

$$\boxed{\delta_c = \Delta L_2 = N_2 \cdot \frac{H}{A_2 \cdot E_2} = 2.4\ mm}$$

Método de Williot



- Cada barra se alarga un cierto ΔL y se desplaza perpendicular a su eje. Ya que gira entorno a un punto fijo y es válida la hipótesis de pequeños desplazamientos.
- Al estar vinculadas ambas barras deben desplazarse al mismo punto A'. Dicho punto será donde se intersecan ambos desplazamientos.