



*Universidad de Buenos Aires*

*Facultad de Ingeniería*

*Departamento de Estabilidad*

**INGENIERÍA CIVIL**

**ESTABILIDAD II – 84.03**

# **SOLICITACIÓN AXIL EN RÉGIMEN ELÁSTICO – SA - 02**

**“Variación de Temperatura –  $\Delta T$ ”**

**Autor: Ing. Luis Nelson SOSTI  
Abril 2020**



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

### 01 – INTRODUCCIÓN

### 02 – OBJETO

### 03 – CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

### 04 – LIMITACIONES AL ALCANCE

### 05 - DEFINICIÓN

### 06 – EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO – SISTEMAS ISOSTÁTICOS

### 07 – EXPRESIONES Y VARIABLES – DESARROLLO

### 08 – SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

## 01 – INTRODUCCIÓN:

En la 1º presentación del tema “**Solicitud Axil**” se había indicado en el artículo “**03 – Campo de Aplicación – Alcance**”, particularmente entre las causas y acciones, que una de éstas iba a ser la aplicación de variaciones de temperatura a elementos estructurales.

En la presente presentación se pretende tratar el tema de la causa o acción, que en forma general se ha definido como “**Variación de Temperatura –  $\Delta T$** ” y aplicada a elementos estructurales de tal manera que los solicite o deforme exclusivamente en forma “**AXIL**”.



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 – LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 – EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO – SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 – EXPRESIONES Y  
VARIABLES –  
DESARROLLO

08 – SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

### 02 – OBJETO:

El objeto de este tema será el de:

- Estudiar y analizar los conceptos físicos, matemáticos e ingenieriles;
- Estudiar y analizar los principios y fundamentos de funcionamiento estructural;
- Aprender a dimensionar y a verificar;
- Introducirnos en las bases preliminares del diseño y el proyecto;

de elementos estructurales o sistemas de elementos estructurales o parte de ellos sobre los cuales actúan la causa o acción denominada “**Variación de Temperatura –  $\Delta T$** ”, pero aplicada de tal manera que solamente produce esfuerzos internos y deformaciones “**AXILES**”.



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

**03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE**

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

### 03 – CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE:

El alcance que será dado a este tema y el campo hacia el cual será aplicado el mismo, son los siguientes:

#### I. TIPOS DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES:

I. Unidimensionales rectos.

#### II. TIPO DE LA CAUSA O DE LA ACCIÓN:

i. Variación de Temperatura “ $\Delta T$ ” del tipo “Uniforme”.

#### III. OTROS:

a. Son válidas todas las consideraciones vistas en la 1º presentación del tema.



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

**04 – LIMITACIONES AL  
ALCANCE**

05 - DEFINICIÓN

06 – EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO – SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 – EXPRESIONES Y  
VARIABLES –  
DESARROLLO

08 – SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

### 04 – LIMITACIONES AL ALCANCE:

Al igual que en la 1º presentación, no serán vistos los temas indicados en la misma, es decir, “Concentración de Tensiones” y “Recipientes a Presión”.

Pero, simplemente se desea remarcar que los siguientes tipos de elementos estructurales, en cuanto a sus dimensiones, no serán estudiados:

#### I. TIPOS DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES:

- I. Bidimensionales;
- II. Tridimensionales.

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

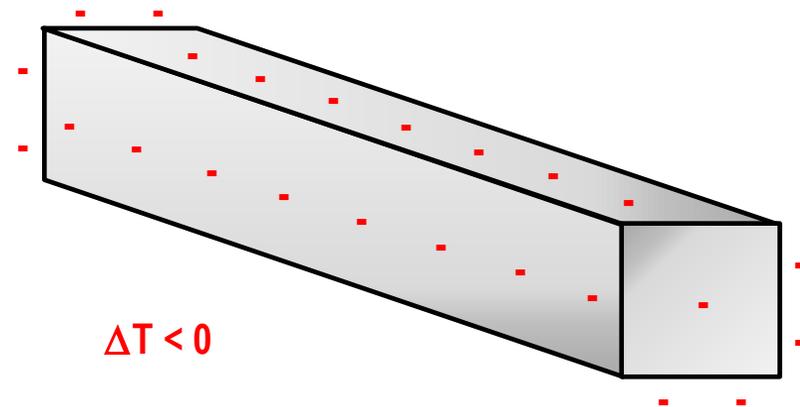
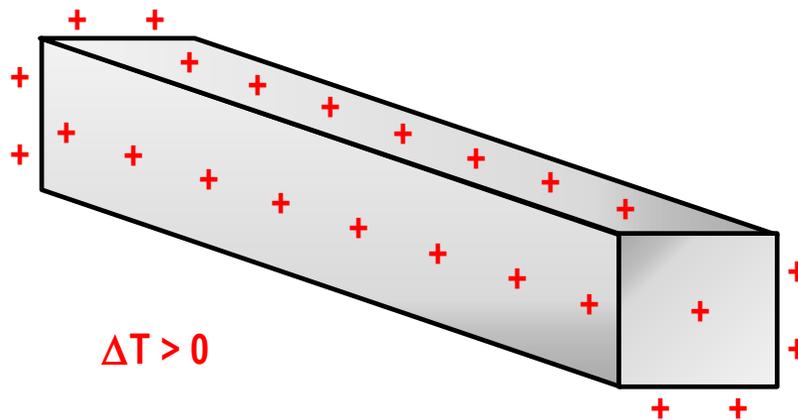
07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

### 05 – DEFINICIÓN:

Diremos que sobre un cuerpo está actuando una **“variación uniforme de temperatura”** cuando en toda todos los puntos de la superficie exterior del mismo se produce la misma variación (aumento o disminución) de temperatura respecto de una situación considerada como inicial en el proceso de análisis o de estudio del fenómeno o del hecho físico.

Veamos esto con los siguientes 2 ejemplos:





## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

### 01 - INTRODUCCIÓN

### 02 - OBJETO

### 03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

### 04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

### 05 - DEFINICIÓN

### 06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

### 07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

### 08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

En las figuras precedentes se ha representado a un prisma recto de sección rectangular constante, sin perder ningún tipo de generalidad en el análisis al haber adoptado esta sección transversal; y se lo ha sometido a 2 variaciones uniformes de temperatura.

En el 1º de los dos esquemas, se propuso un aumento uniforme de la temperatura del cuerpo. Es decir, todos los puntos de la superficie exterior del mismo están sometidos al mismo incremento de temperatura  $\Delta T > 0$ .

Asimismo, se representará a tales variaciones con el signo “**más**”, “**+**”.

Mientras que en el 2º esquema, se propuso una disminución uniforme de la temperatura del cuerpo. Es decir, todos los puntos de la superficie exterior del mismo están sometidos al mismo decrecimiento de temperatura  $\Delta T < 0$ .

Asimismo, se representará a tales variaciones con el signo “**menos**”, “**-**”.



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

**05 - DEFINICIÓN**

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

Por otra parte, cabe destacar que los cuerpos podrán sufrir variaciones de temperatura que no sean uniformes.

En este sentido, podrán sufrir variaciones distintas en las distintas caras del mismo, y ser uniformes en las mismas, o por lo menos adoptar una variación uniforme por cara.

En “Estabilidad III”, se verá variaciones de temperatura no uniformes para el cuerpo pero uniformes por cara.

El caso más general será considerar que las variaciones de temperatura podrán serlo punto a punto. Esto último no constituye mayormente un caso de análisis que se presente dentro de la Ingeniería Civil, salvo en determinados problemas de investigación y de la ciencia de materiales.



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

### 06 – EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO – SISTEMAS ISOSTÁTICOS:

Considérese la viga simplemente apoyada de la figura y de sección rectangular, lo cual no representa restricción alguna en la explicación del fenómeno, y simplemente es adoptada por facilitar a la misma; pero puede ser cualquiera.

Se ha cuadrículado la superficie lateral de la misma, así como las caras “A” y “B”; de tal manera que las líneas longitudinales representan las generatrices del elemento, mientras que las transversales representarán a las secciones tal como ya se ha visto.

Se distinguen las dimensiones “iniciales” del elemento, a saber:  $L_{x,0}$  ;  $L_{y,0}$  ;  $L_{z,0}$  ;

Esta configuración se ubica en un instante de tiempo  $t = 0$ .

A partir del instante que se ha denominado como  $t = 0^+$ ; se propone una variación uniforme de temperatura como se muestra, en este caso positiva.

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

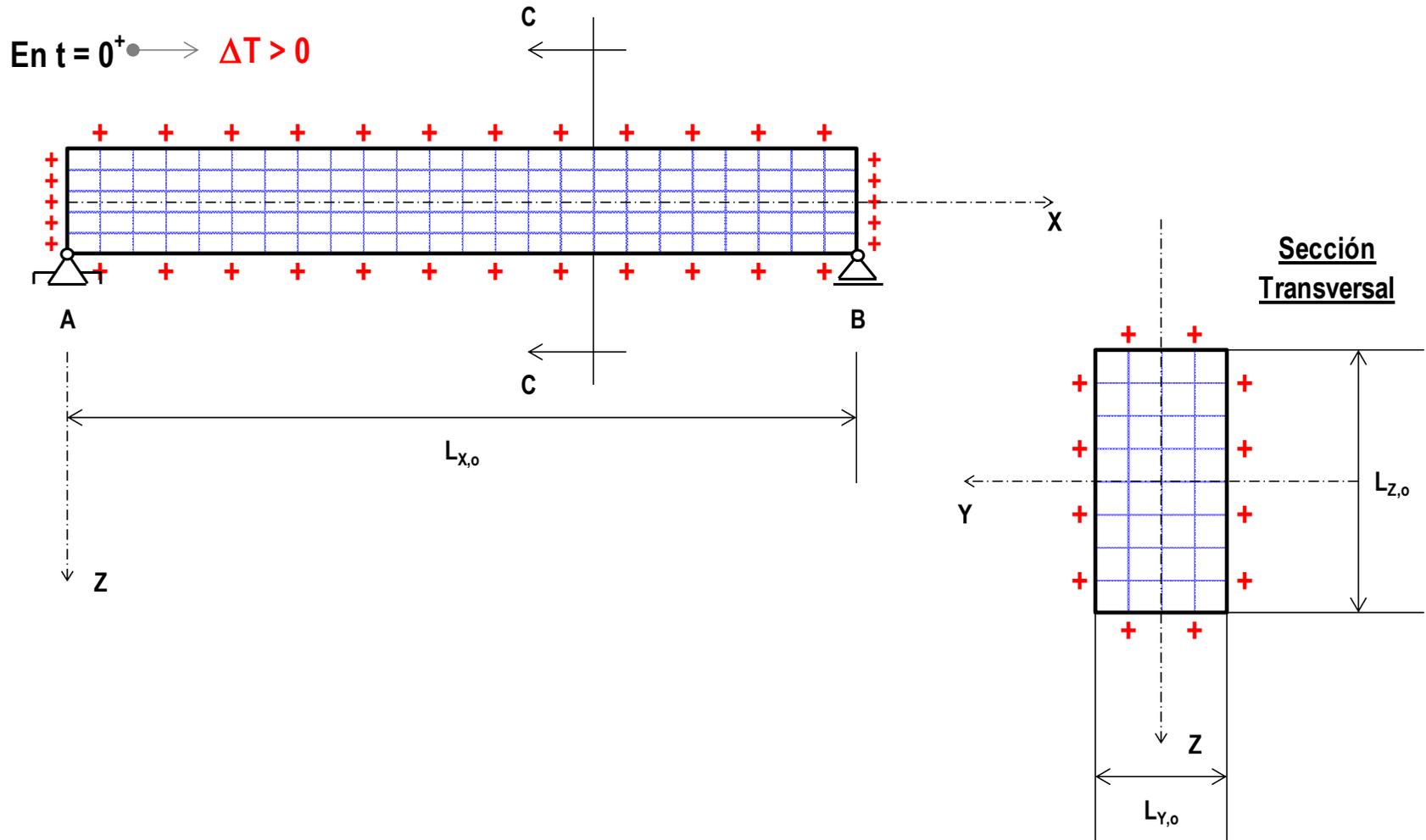
04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS



Veamos qué le ocurre a la viga desde el punto de vista de su deformación.

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

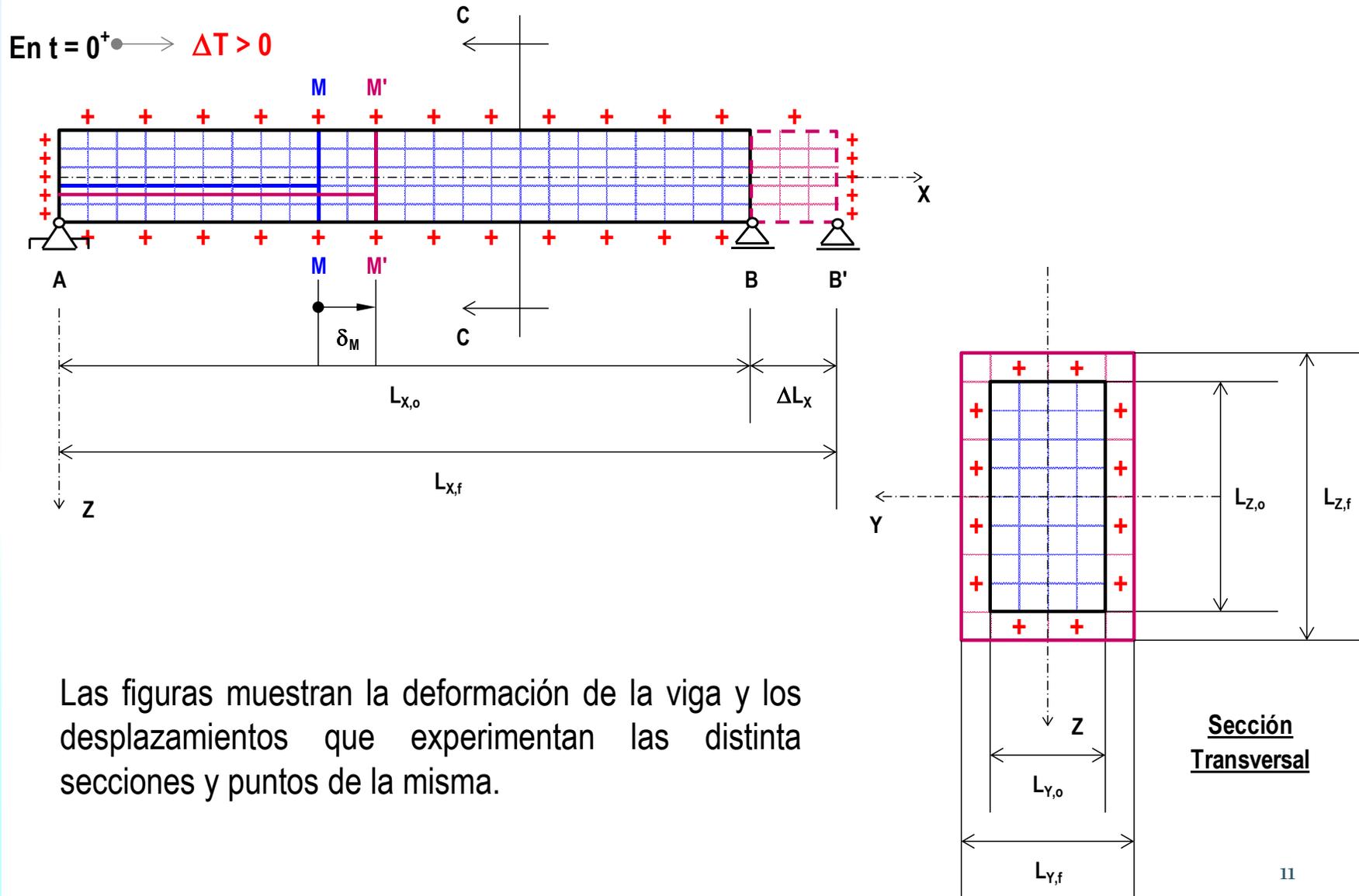
04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS



Las figuras muestran la deformación de la viga y los desplazamientos que experimentan las distintas secciones y puntos de la misma.



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

Como consecuencia de la aplicación de una variación uniforme y positiva de temperatura, se observa que:

- Las secciones se desplazan paralelas a si mismas, con lo cual todos los puntos de una misma sección experimentarán los mismos desplazamientos y las fibras, los mismos cambios de longitud;
- Las secciones se mantienen planas, por lo tanto, no se alabean ni sufrirán distorsiones;
- Las secciones mantienen su forma;
- De las 3 consideraciones anteriores se observa que se cumple la **“Hipótesis de Navier”**;
- La sección “B” se desplaza en el sentido positivo del eje “X” y el desplazamiento total que sufre la misma, conlleva los desplazamientos que experimentan todas las secciones anteriores a la misma;
- Como la sección “A” se encuentra fija, la misma no se podrá desplazar y todas las secciones se desplazan en el sentido positivo del eje “X”;
- Cada una de las secciones, se deforman en su plano alargándose en ambas direcciones y en ambos sentidos, pero manteniendo su forma original.



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

**07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO**

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

### 07 – EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO:

Los alargamientos o acortamientos que experimenta un cuerpo como consecuencia de una variación uniforme de temperatura, están dados por la Física a través de la siguiente expresión:

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_0$$

Donde:

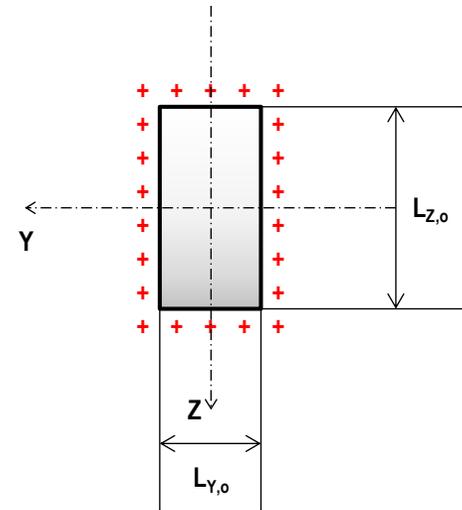
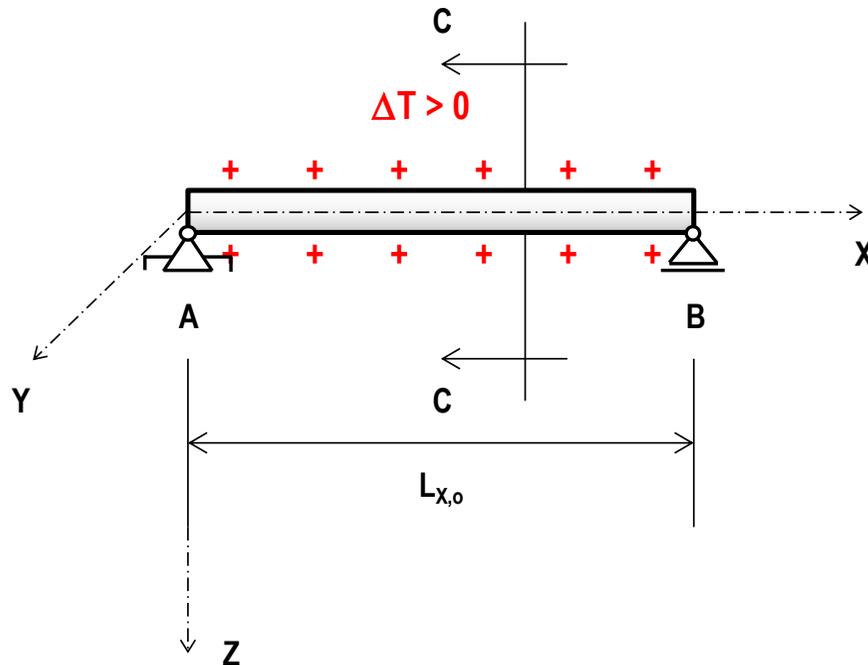
$\alpha$  : Coeficiente de Dilatación Térmica del Material. Es una propiedad y característica del material y tiene unidades de "  $1/^\circ\text{C}$  ".

$\Delta T$  : Variación de Temperatura que experimenta el cuerpo respecto de una situación considerada como inicial. Tiene unidades de "  $^\circ\text{C}$  ".

$L_0$  : Longitud inicial del cuerpo en una determinada dirección. Tiene las unidades de una longitud y comúnmente se expresa en "mm", "cm" o "m" como inicial.

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

Particularizando, para el elemento estructural con el cual se está trabajando, quedan expresadas como a continuación se indica:



01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

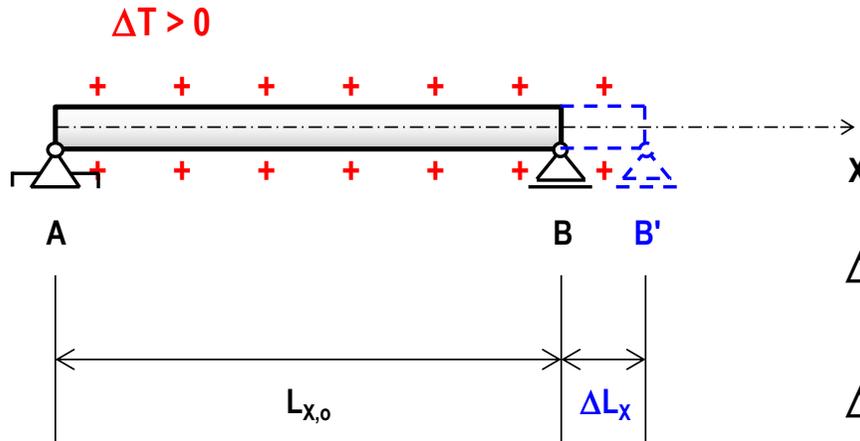
04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS



$$\Delta L_x = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_{x,0}$$

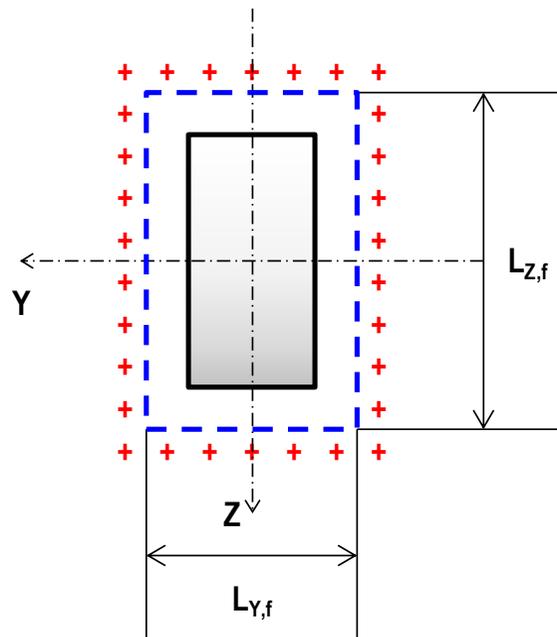
$$\Delta L_x = \alpha \cdot \Delta T \cdot x$$

$$\Delta L_y = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_{y,0}$$

$$\Delta L_y = \alpha \cdot \Delta T \cdot y$$

$$\Delta L_z = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_{z,0}$$

$$\Delta L_z = \alpha \cdot \Delta T \cdot z$$



Donde las primeras expresiones, las de la izquierda, expresan las variaciones de longitud de las dimensiones totales en cada dirección del cuerpo; mientras que las segundas, las de la derecha, expresan en forma genérica los cambios de longitudes de las fibras, también, en las 3 dimensiones.

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

A partir de estas expresiones se determinan las deformaciones específicas en las 3 direcciones, quedando de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_{x,0}} = \alpha \cdot \Delta T = \varepsilon$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta L_y}{L_{y,0}} = \alpha \cdot \Delta T = \varepsilon$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta L_z}{L_{z,0}} = \alpha \cdot \Delta T = \varepsilon$$

De las cuales se observa que las deformaciones específicas en las 3 direcciones son iguales:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon$$



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

Y las expresiones que permiten determinar las longitudes finales en cada dirección expresadas en función de los datos iniciales y de las deformaciones específicas

$$L_{X,f} = L_{X,o} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) = L_{X,o} \cdot (1 + \varepsilon_{XX}) = L_{X,o} \cdot (1 + \varepsilon)$$

$$L_{Y,f} = L_{Y,o} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) = L_{Y,o} \cdot (1 + \varepsilon_{YY}) = L_{Y,o} \cdot (1 + \varepsilon)$$

$$L_{Z,f} = L_{Z,o} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) = L_{Z,o} \cdot (1 + \varepsilon_{ZZ}) = L_{Z,o} \cdot (1 + \varepsilon)$$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

Con las expresiones anteriores se puede formar el “Tensor de Deformaciones” para cada punto de la barra, teniendo presente que al verificarse la “Hipótesis de Navier” no se generan distorsiones:

$$\left[ \text{TD} \right] = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \cdot \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \cdot \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

### EJEMPLO:

Con el presente ejemplo se pretende mostrar cómo son los alargamientos y las longitudes finales en las 3 direcciones de una viga simplemente apoyada que cumple la relación de esbeltez como mínimo, es decir, donde se verifica que  $L / d \geq 10$ .

### EJEMPLO:

**MATERIAL:** Acero

$$\alpha = 1,0E-05 \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta T = 40,0 \text{ } ^{\circ}\text{C}$$

$$L_{X,o} = 5,00 \text{ m}$$

$$L_{Y,o} = 0,25 \text{ m}$$

$$L_{Z,o} = 0,50 \text{ m}$$

$$\Delta L_x = 0,0020 \text{ m}$$

$$\Delta L_x = 0,04\% \text{ de } L_{X,o} = \epsilon_{xx}$$

$$\Delta L_y = 0,0001 \text{ m}$$

$$\Delta L_y = 0,04\% \text{ de } L_{Y,o} = \epsilon_{yy}$$

$$\Delta L_y = 5,00\% \text{ de } \Delta L_x$$

$$\Delta L_y = 0,0020\% \text{ de } L_{X,o}$$

$$\Delta L_z = 0,0002 \text{ m}$$

$$\Delta L_z = 0,04\% \text{ de } L_{Z,o} = \epsilon_{zz}$$

$$\Delta L_z = 10,00\% \text{ de } \Delta L_x$$

$$\Delta L_z = 0,0040\% \text{ de } L_{X,o}$$

$$L_{X,f} = 5,0020 \text{ m}$$

$$L_{Y,f} = 0,2501 \text{ m}$$

$$L_{Z,f} = 0,5002 \text{ m}$$



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

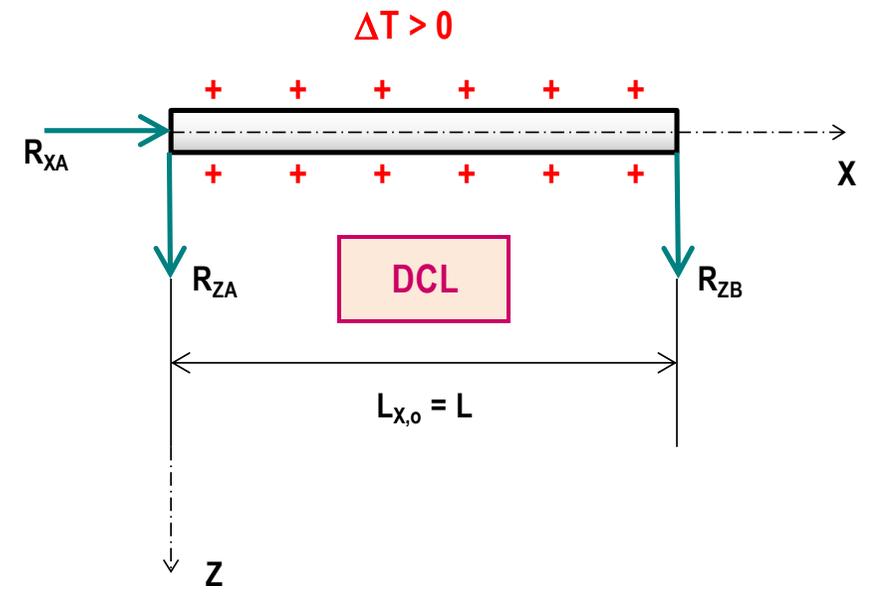
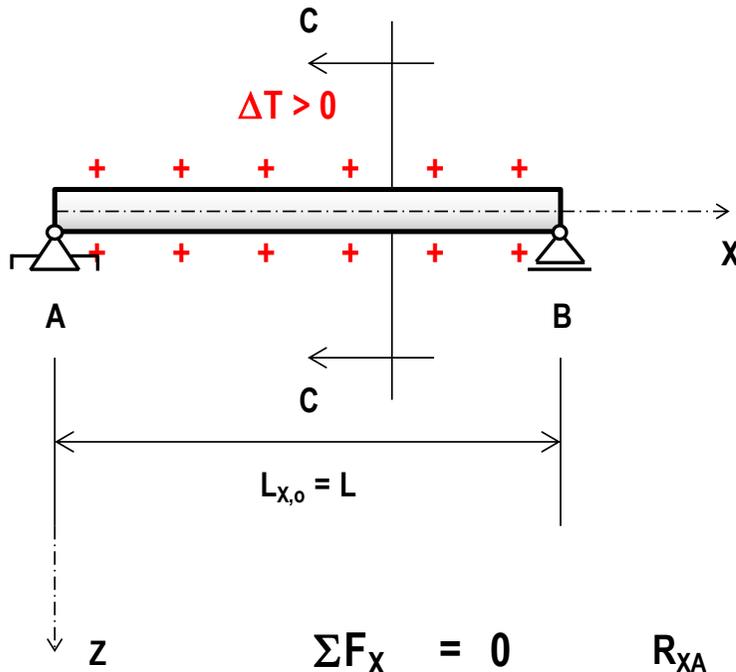
08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

Del ejemplo mostrado se desprenden las siguientes consideraciones:

- Las variaciones de longitud son despreciables en las direcciones transversales a la correspondiente a la dirección longitudinal;
- Las deformaciones, como ya se había deducido, son las mismas en las 3 direcciones y para todos los puntos de la barra;
- De ahora en más: ***solamente se considerará como válida y con ella se trabajará, salvo que se indique lo contrario, a la variación en la dirección longitudinal de la barra y se despreciarán a las otras; siempre y cuando se trabaje con barras rectas esbeltas.***

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

A continuación se verá qué sucede con las reacciones de vínculo y los esfuerzos internos. Considérese el mismo ejemplo y plantéese el equilibrio para calcular las RVE:



$\sum F_x = 0$	$R_{xA} = 0$	
$\sum M_{Fz}^B = 0$	$R_{ZA} \cdot L = 0$	$R_{ZA} = 0$
$\sum M_{Fz}^A = 0$	$R_{ZB} \cdot L = 0$	$R_{ZB} = 0$

- 01 - INTRODUCCIÓN
- 02 - OBJETO
- 03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE
- 04 - LIMITACIONES AL ALCANCE
- 05 - DEFINICIÓN
- 06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS
- 07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO
- 08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

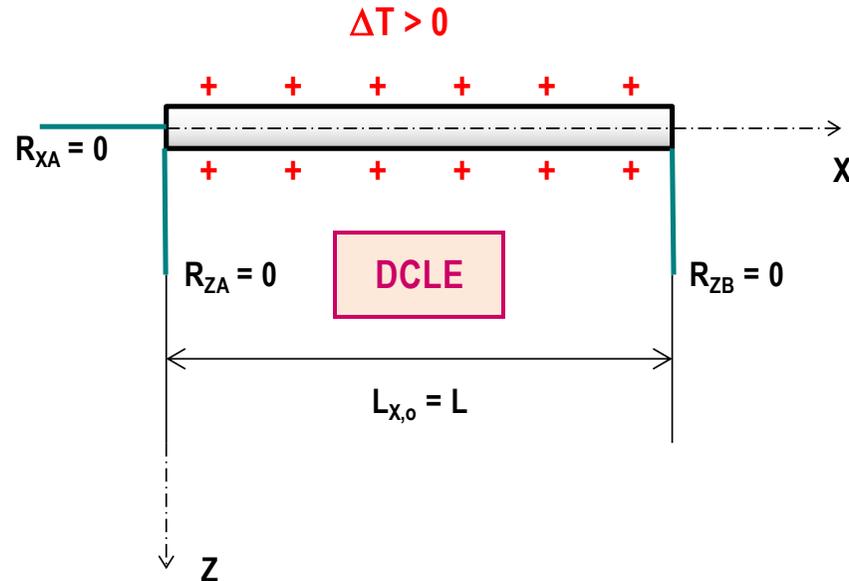
06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

Se observa que todas las RVE son nulas y por lo tanto, al no existir un sistema de fuerzas activas autoequilibrado no aparecerán esfuerzos o sollicitaciones internas (SI).

El DCLE queda en definitiva de la siguiente manera:



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

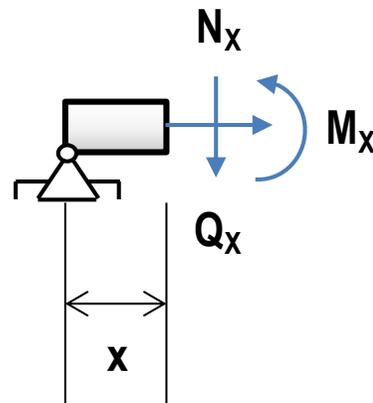
06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

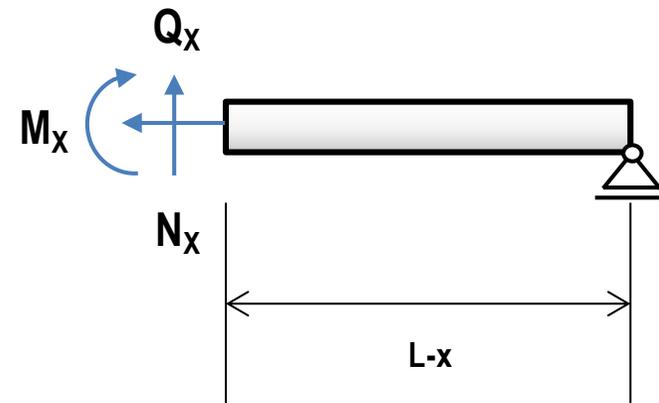
08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

Pero, véase esta misma conclusión desde el punto de vista de los esfuerzos internos. Para ello, supóngase que existen unos esfuerzos internos no nulos, y tómesese para ellos una sección cualquiera, tal como se muestra en la siguiente figura:

PARTE I



PARTE II



De ésta se observa lo siguiente:

- Si se considera la parte "II", el esfuerzo  $N_x$  no tiene como equilibrarse, por lo tanto, es nulo; con lo cual al considerar la parte "I", se observa que  $R_{XA}$  es nula;

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

### 01 - INTRODUCCIÓN

### 02 - OBJETO

### 03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

### 04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

### 05 - DEFINICIÓN

### 06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

### 07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

### 08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

- Si de la parte “II” se toma momentos respecto de “B”, se determina que  $M_x = Q_x \cdot (L - x)$ ;
- Pero, si se trabaja con la parte “I” y se toma momentos respecto de “A”, se determina que  $M_x = Q_x \cdot X$ ;
- Con lo cual  $M_x$  tendría 2 valores distintos y esto es imposible porque la sollicitación es de valor “único”; además de que tendrían distintos sentidos;
- Por lo tanto, la única posibilidad es que  $M_x = 0$  y también  $Q_x = 0$ ;
- Y finalmente, planteando el equilibrio de fuerzas en la dirección “Z” para cada o cualquier parte, se llega a que las reacciones  $R_{ZA}$  y  $R_{ZB}$  también son nulas.

Resumiendo, se llega a lo mismo que lo obtenido anteriormente, en lo cual se partió de las ecuaciones de equilibrio absolutas y se demostró que tanto las RVE como las SI son nulas. Acá vale lo mismo, partiendo de los esfuerzos internos en una sección cualquiera.

Finalmente se llega a la siguiente conclusión:

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

Finalmente se llega a la siguiente conclusión:

***En los sistemas isostáticos solicitados a variaciones de temperatura no se producen reacciones de vínculo externo ni tampoco solicitaciones internas.***

***Solamente, se producen desplazamientos y deformaciones.***

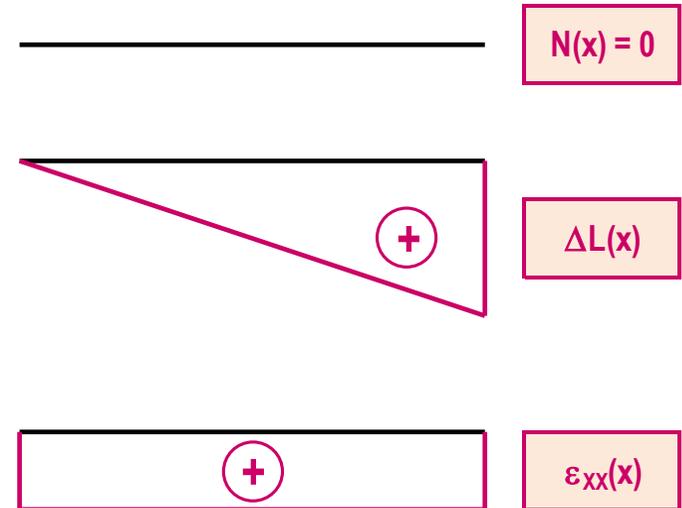
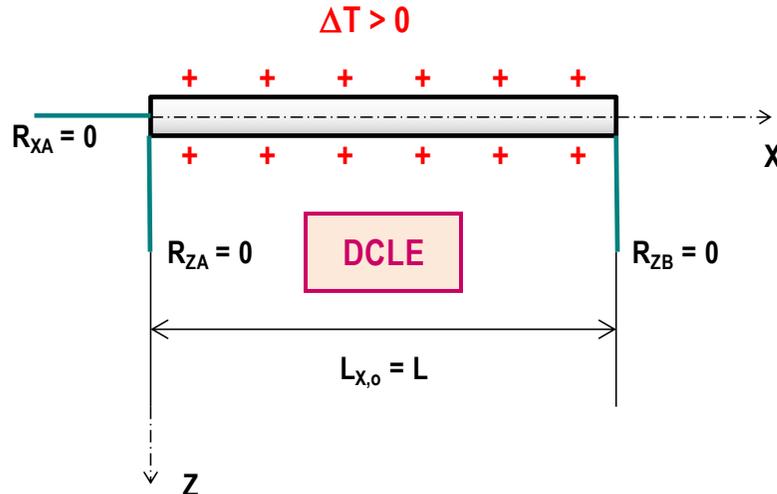
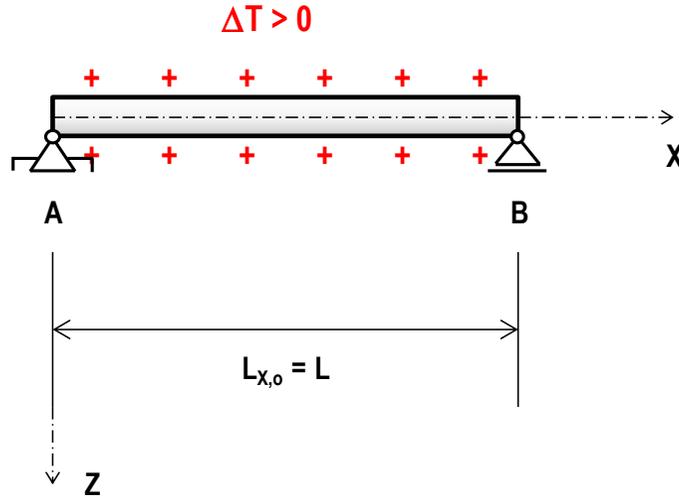
***Por este motivo, se los denomina “Sistemas o Estructuras Libremente Dilatables”.***

Luego, para cada punto del cuerpo se tendrá que el Tensor de Tensiones queda de la siguiente manera:

$$\left[ \begin{array}{c} \sigma \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

Se representan a continuación, todos los esquemas y diagramas del problema planteado:



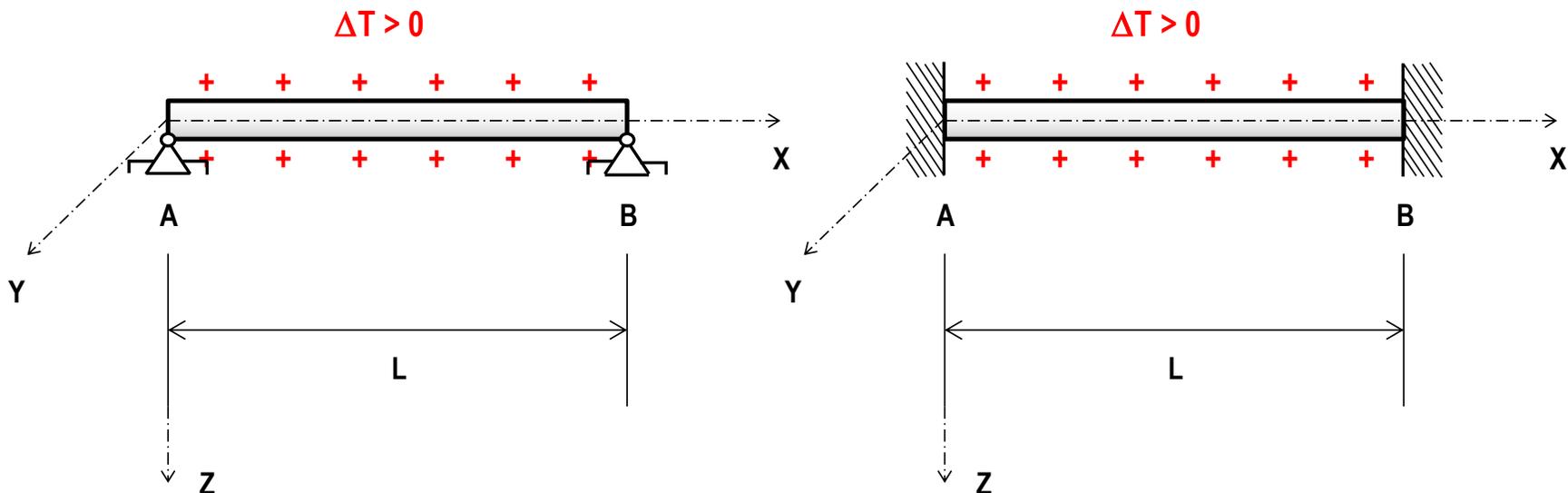
- 01 - INTRODUCCIÓN
- 02 - OBJETO
- 03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE
- 04 - LIMITACIONES AL ALCANCE
- 05 - DEFINICIÓN
- 06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS
- 07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO
- 08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

### 08 – SISTEMAS HIPERESTÁTICOS:

Se considerará a continuación la misma barra que la utilizada anteriormente, pero ahora se colocarán 2 apoyos fijos en los extremos “A” y “B” o directamente, se empotrará a la misma, tal como se indica en las figuras a continuación.

Para el análisis ambos sistemas con los vínculos que se disponen constituyen el mismo problema a resolver.



- 01 – INTRODUCCIÓN
- 02 – OBJETO
- 03 – CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE
- 04 – LIMITACIONES AL ALCANCE
- 05 - DEFINICIÓN
- 06 – EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO – SISTEMAS ISOSTÁTICOS
- 07 – EXPRESIONES Y VARIABLES – DESARROLLO
- 08 – SISTEMAS HIPERESTÁTICOS**



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

La resolución de este problema será realizada descomponiendo al mismo en 2 partes para luego sumarlas. En definitiva, se aplicará el “Principio de Superposición de Efectos – PSE”.

Para ello es necesario tener presente que la longitud de la barra antes de la aplicación de una variación uniforme de temperatura se mantiene inalterada después de la aplicación de la misma.

Lo anterior se debe a que como se han colocado 2 apoyos fijos en los extremos de la misma, o 2 empotramientos ya que constituyen el mismo efecto; ninguno de los extremos de la barra podrá desplazarse y por consiguiente la longitud total se mantiene constante.

Lo anterior se expresa matemáticamente como:

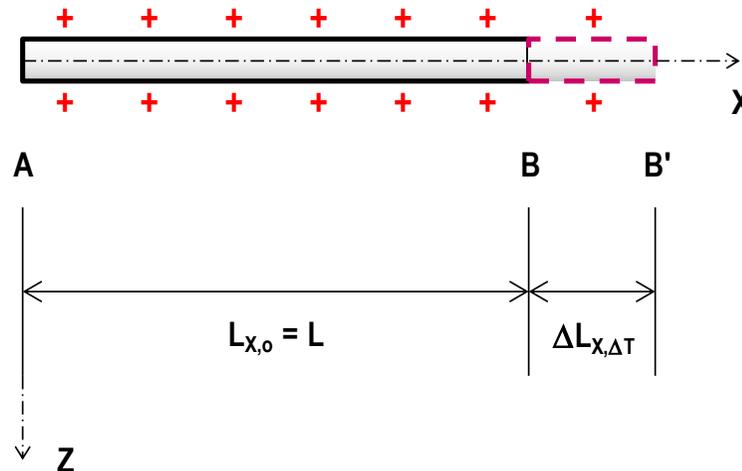
$$L_{x,o} = L_{x,f}$$

$$\Delta L_x = 0$$

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

La descomposición de la resolución del problema en 2 partes se realiza como sigue:

- i. En 1º lugar se aplica la variación de temperatura uniforme y se permite que se deforme libremente considerando fijo el extremo “A” y libre al “B”, con lo cual éste será el que se desplace como se indica en la siguiente figura:



$$\Delta L_{x,\Delta T} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_{x,0}$$

A la variación de la longitud se le ha agregado el subíndice “ $\Delta T$ ” para indicar que la causa es justamente la variación de temperatura.

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

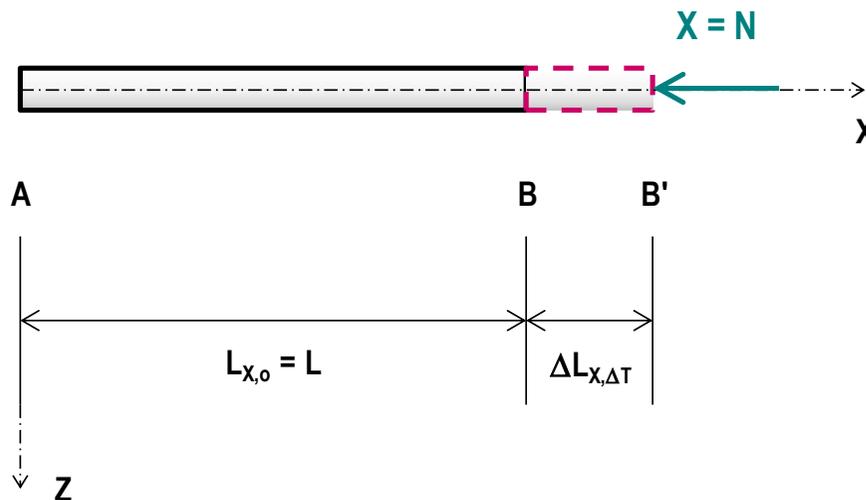
05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

- ii. Sin embargo, lo anterior no constituye lo que realmente le pasa a la barra, debido a que ese desplazamiento no es posible de ser efectivizado puesto que en ese lugar existe un vínculo que lo impide (sea éste uno fijo o el empotramiento);
- iii. Todo vínculo reacciona proporcionando al sistema una fuerza en la coordenada o dirección en la cual impide el desplazamiento. Esa reacción se desarrolla en la dirección longitudinal de la barra, es decir, en la dirección "X". A la misma se la ha designado indistintamente con "N" o con "X"; por los siguientes motivos: con "N" porque al actuar en la dirección de la barra conforma un esfuerzo axial; y con "X" por ser el valor a ser determinado y constituir una incógnita del problema:



$$\Delta L_{x,N} = \frac{N \cdot L_{x,0}}{E \cdot A}$$

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

- iv. Ahora bien, el esfuerzo “N” o “X”; será el necesario que provoque un desplazamiento igual y contrario al provocado por la variación de temperatura de tal manera que ambos se terminan anulando por la condición de no desplazamiento de los extremos. Es decir:

$$\Delta L_{X,\Delta T} + \Delta L_{X,N} = 0$$

- v. Reemplazando las expresiones de ambas variaciones y resolviendo matemáticamente la misma con el objetivo de encontrar “N” o “X”; se tiene que:

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot L_{X,o} + \frac{N \cdot L_{X,o}}{E \cdot A} = 0$$

$$N = -\alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot A$$

Expresión que permite determinar el valor del esfuerzo normal que deberá ser capaz de desarrollar el apoyo en “B” para evitar que tal extremo se desplace;

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

- vi. De esta expresión se observa que como “ $\alpha$ ”, “ $E$ ” y “ $A$ ” son parámetros netamente positivas;
- vii. El sentido de la fuerza dependerá exclusivamente de como sea la variación de temperatura, ya que constituye la única variable capaz de ser positiva (incremento de temperatura) o negativa (disminución de temperatura);
- viii. El signo menos en la expresión indica que la fuerza a ser desarrollada deberá compensar el desplazamiento que la variación de temperatura pretende provocar, es decir, deberá provocar un desplazamiento en sentido contrario al de  $\Delta T$ ;
- ix. Por lo tanto:

Si  $\Delta T > 0 \longrightarrow N < 0$  N será de Compresión

Si  $\Delta T < 0 \longrightarrow N > 0$  N será de Tracción

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

x. Asimismo, de las expresiones anteriores se tiene que también deberá verificarse que:

$$\varepsilon_{XX,\Delta T} + \varepsilon_{XX,N} = 0$$

xi. Ahora bien, para una fibra cualquiera de longitud cualquiera "x", las expresiones anteriores quedan de la siguiente manera:

$$\Delta L_{X,\Delta T} = \alpha \cdot \Delta T \cdot x$$

$$\Delta L_{X,N} = \frac{N \cdot x}{E \cdot A}$$

$$\Delta L_{X,x=x} = \Delta L_{X,\Delta T,x=x} + \Delta L_{X,N,x=x} = 0$$

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot x + \frac{N \cdot x}{E \cdot A} = 0$$

$$\varepsilon_{XX,x=x} = \varepsilon_{XX,\Delta T,x=x} + \varepsilon_{XX,N,x=x} = 0$$



## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE  
APLICACIÓN - ALCANCE

04 - LIMITACIONES AL  
ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

06 - EXPLICACIÓN DEL  
FENÓMENO - SISTEMAS  
ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y  
VARIABLES -  
DESARROLLO

08 - SISTEMAS  
HIPERESTÁTICOS

- xii. Se observa que cada fibra no sufre variación alguna en su longitud; esto significa que en este problema ninguna de las secciones de la barra bi-empotrada o con bi-apoyos fijos en sus extremos desarrollará desplazamiento alguno; y por lo tanto, las infinitas secciones que conforman la barra permanecerán en sus posiciones antes y después de la aplicación de la variación de temperatura. Lo mismo pasa con las deformaciones totales que experimentarán las fibras, lo cual es lógico por ser nulos los desplazamientos.

Los siguientes esquemas y diagramas muestran las funciones de las variables que identifican y caracterizan este problema:

## VARIACIÓN DE TEMPERATURA - $\Delta T$

01 - INTRODUCCIÓN

02 - OBJETO

03 - CAMPO DE APLICACIÓN - ALCANCE

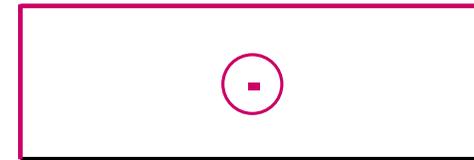
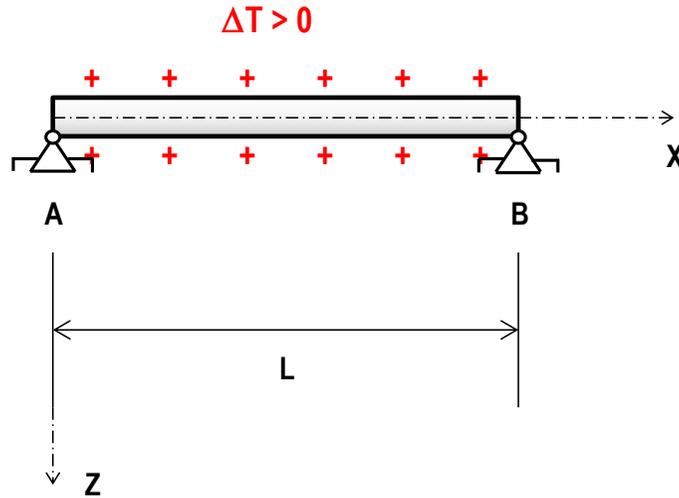
04 - LIMITACIONES AL ALCANCE

05 - DEFINICIÓN

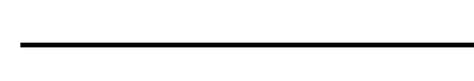
06 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO - SISTEMAS ISOSTÁTICOS

07 - EXPRESIONES Y VARIABLES - DESARROLLO

08 - SISTEMAS HIPERESTÁTICOS



$$N(x) = X$$



$$\Delta L(x) = 0$$



$$\epsilon_{xx}(x) = 0$$

