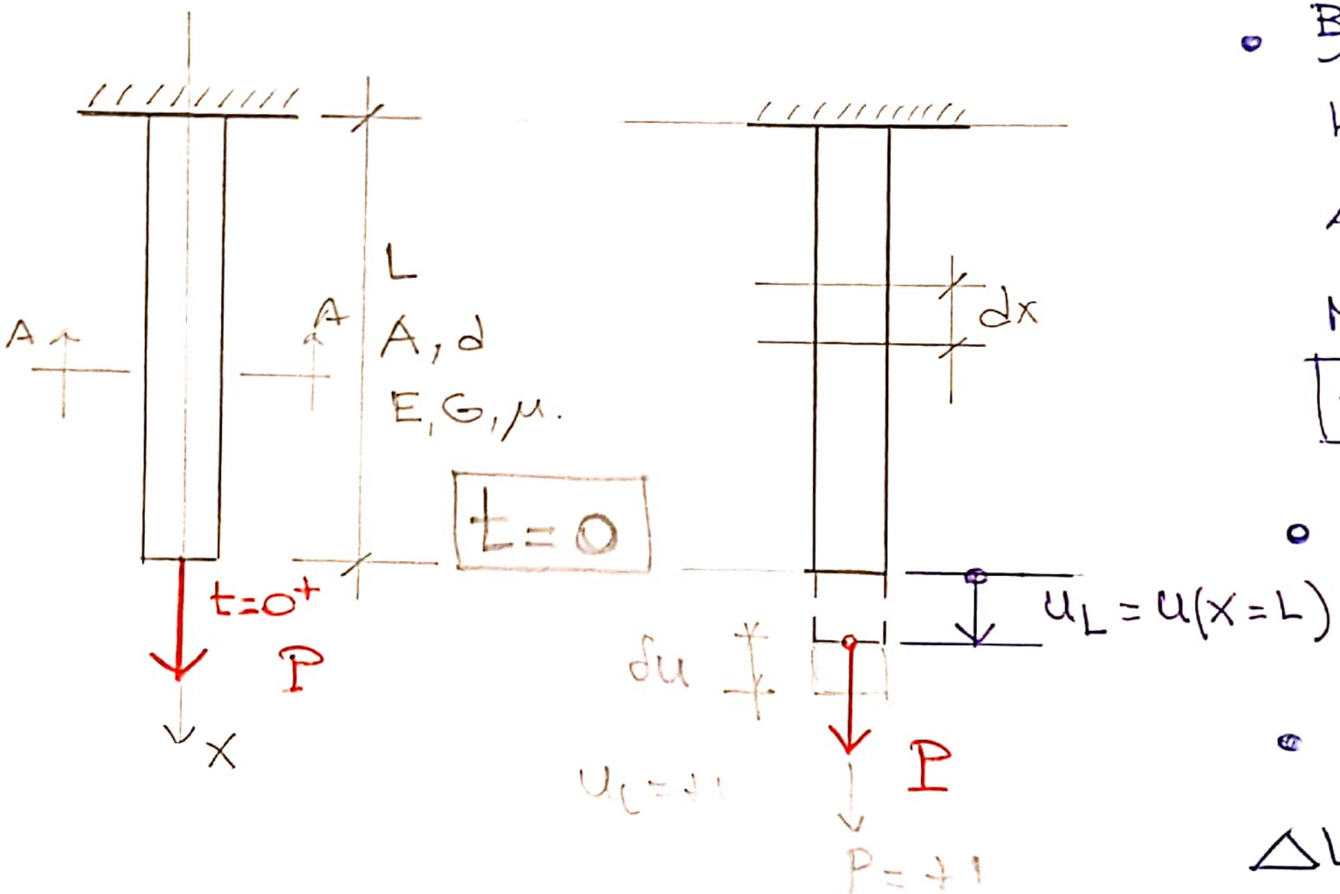
01) → COMPORTAMIENTO DE MATERIALES.



- **BARRA**

  LONGITUD → L.

  ÁREA → A.

  MATERIAL → E, G, μ.

  $\boxed{t = 0}$

- $t = 0^+$ → APLICA P

- LA BARRA SE DEFORMA:

$$\Delta L(x) = \delta(x) = u(x)$$

- PARTICULARMENTE.

$$\Delta L(x=L) = \delta(x=L) = u(x=L) =$$

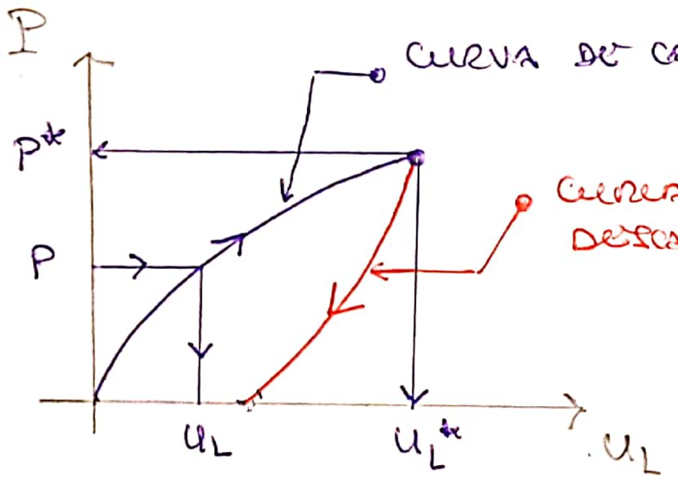
$$= u_L$$

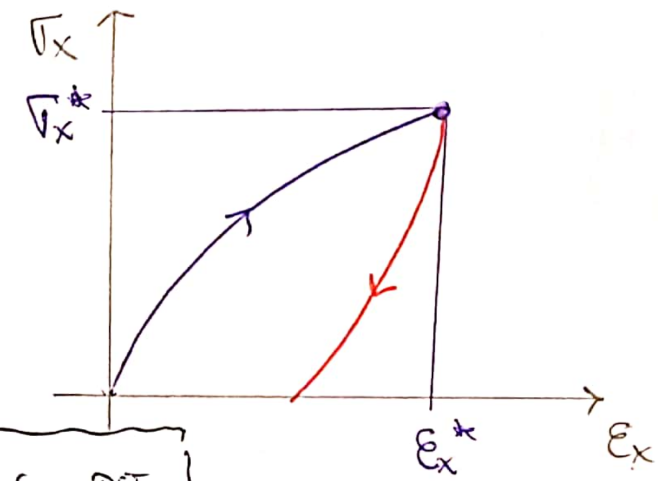
EL EQUILIBRIO CUANDO PARA:

$P = P^* \longleftrightarrow u_L = u_L^*$

CORRELACIÓN

$\frac{P}{A} = \sigma_x \quad ; \quad \frac{u_L}{L} = \varepsilon_x$



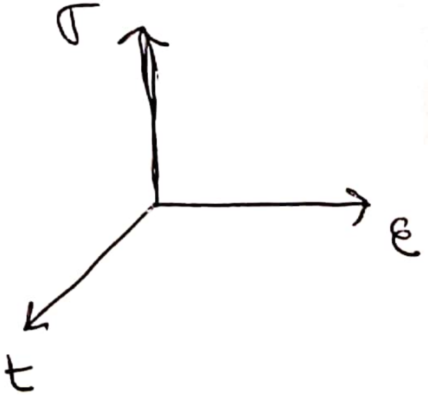


DIAGRAMAS DE EQUILIBRIO

- MONÓTONAMENTE CRECIENTE.
- " DECRECIENTE.

COMPORTAMIENTO:

- VISCOSO $\sigma = \sigma(\varepsilon) \rightarrow f(\text{tiempo})$.



- PLÁSTICO
- ELÁSTICO → LINEAL

02) → DEFINICIONES:

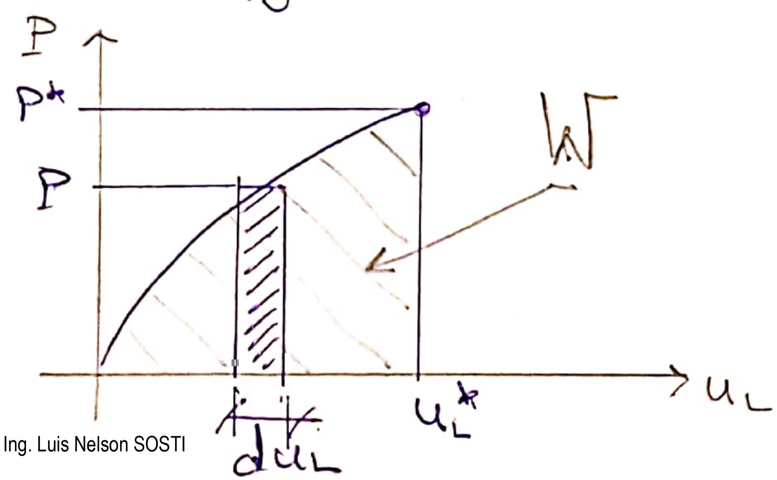
(I) → FUERZAS EXTERIORES.

↳ VOLUMEN DEL CUERPO.
(FZAS DE VOLUMEN O MASA)

↳ DE SUPERFICIE

(II) → TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERIORES.

$$W = \int_0^{u_L^*} P \cdot du_L$$



$$dW = P \cdot du_L.$$

$$\Delta L(x) = \delta(x) = u(x) = \int \frac{N(x)}{EA(x)}\, dx$$

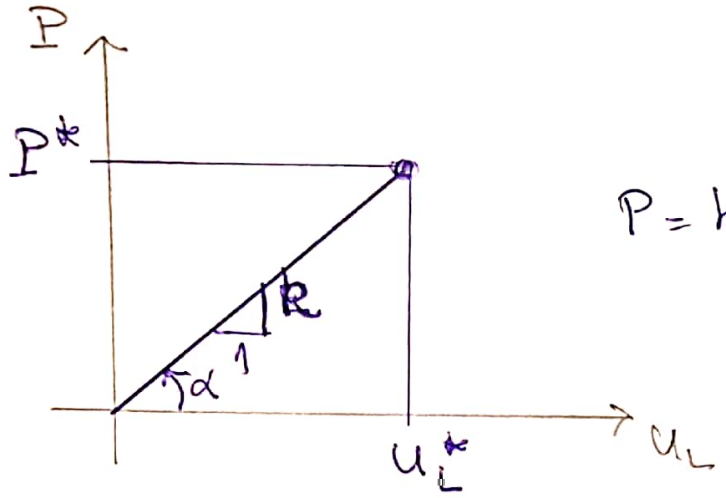
$$N(x) = \text{cte} = P.$$

$$A = \text{cte}.$$

$$u(x) = \frac{N}{EA} x = \frac{P}{EA} x.$$

$$x = L \rightarrow u_L = \frac{PL}{EA}.$$

$$P = P(u_L) \rightarrow P = \underbrace{\frac{EA}{L}}_{k} u_L = k u_L$$



$P = k\,u_L$

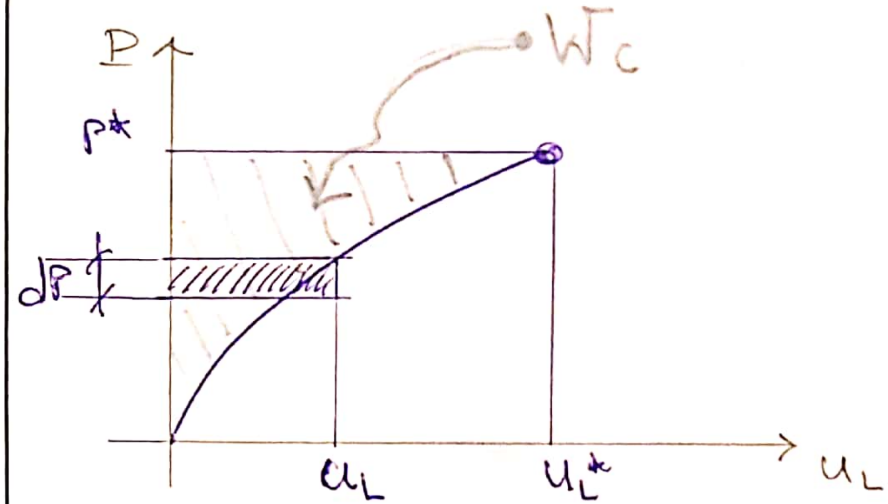
$$W = \int_0^{u_L^*} P \cdot du_L = \int_0^{u_L^*} k \cdot u_L\, du_L$$

$$W = \frac{1}{2} k\, u_L^2 \Big|_0^{u_L^*} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} k (u_L^*)^2 = \frac{1}{2} P^* u_L^*}$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{k\,u_L^*}_{P^*} u_L^*$$

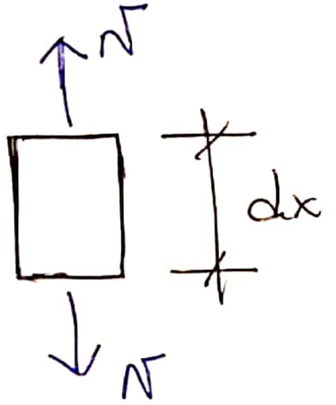
III TRABAJO COMPLEMENTARIO DE LAS FZAS EXTERIORES

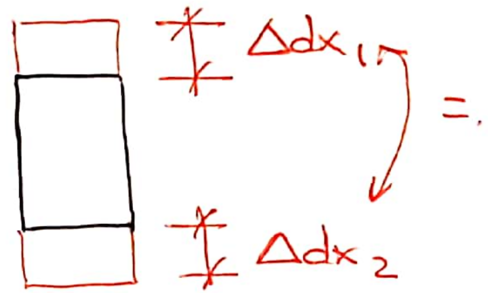


$$\boxed{W_C = \int_0^{P^*} u_L\, dP.}$$

$$u_L = \frac{PL}{EA} \longrightarrow P = \frac{EA}{L} u_L.$$

IV ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN.





$$\Delta dx = \Delta dx_1 + \Delta dx_2.$$

$$N \cdot \Delta dx_1 + N \cdot \Delta dx_2 = N \cdot \Delta dx = \underbrace{dU}$$

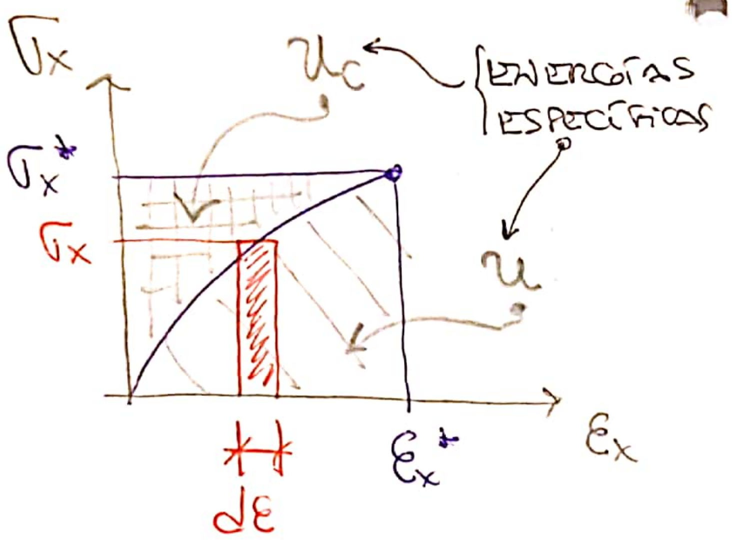
ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN. EN SA.

$$\begin{cases} N = \sigma_x \cdot A. \\ \Delta dx = \varepsilon_x \cdot dx \end{cases}$$

$$dU = \underbrace{\sigma_x \cdot A}_{N} \cdot \underbrace{\varepsilon_x \cdot dx}_{\Delta dx} = \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot \underbrace{A\, dx}_{dV}$$

$$\frac{dU}{\Delta dx} = \frac{dU}{dV} = \sigma_x \cdot \varepsilon_x = du$$

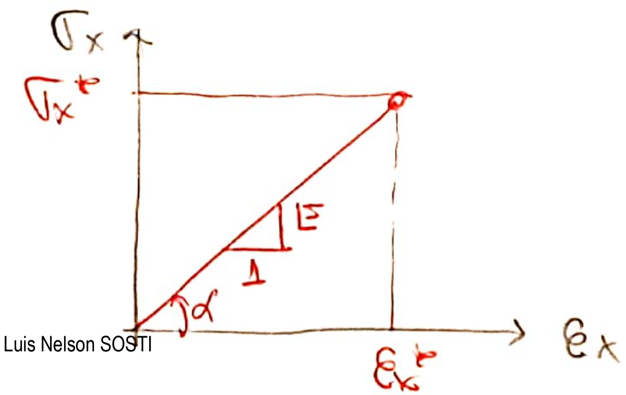
ENERGÍA INTERNA ESPECÍFICA DE DEFORMACIÓN



$$du = \sigma_x \, d\varepsilon$$

$$\boxed{u = \int_0^{\varepsilon_x^*} \sigma_x \, d\varepsilon}$$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$



$$u = \int_0^{\varepsilon_x^*} \sigma_x \, d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_x^*} E \cdot \varepsilon_x \, d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 \Big|_0^{\varepsilon_x^*}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2} E (\varepsilon_x^*)^2 = \frac{1}{2} \sigma_x^* \varepsilon_x^*}$$

$$\boxed{U = \int_V \int_0^{\varepsilon_x^*} \sigma_x \, d\varepsilon \, . \, dV} \quad (*)$$

PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA:

$$\boxed{W = U}$$

$$\boxed{W_c = U_c}$$

"EN UN PROCESO DE CARGA ARBITRARIO, EL TRABAJO DESARROLLADO POR LAS FUERZAS EXTERIORES '$\underline{\underline{W}}$' ES IGUAL A LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN U"

$$\boxed{\begin{aligned} u_c &= \int_0^{\sigma_x^*} \varepsilon_x \, d\sigma. \\ U_c &= \int_V \int_0^{\sigma_x^*} \varepsilon_x \, d\sigma \, dV. \end{aligned}}$$

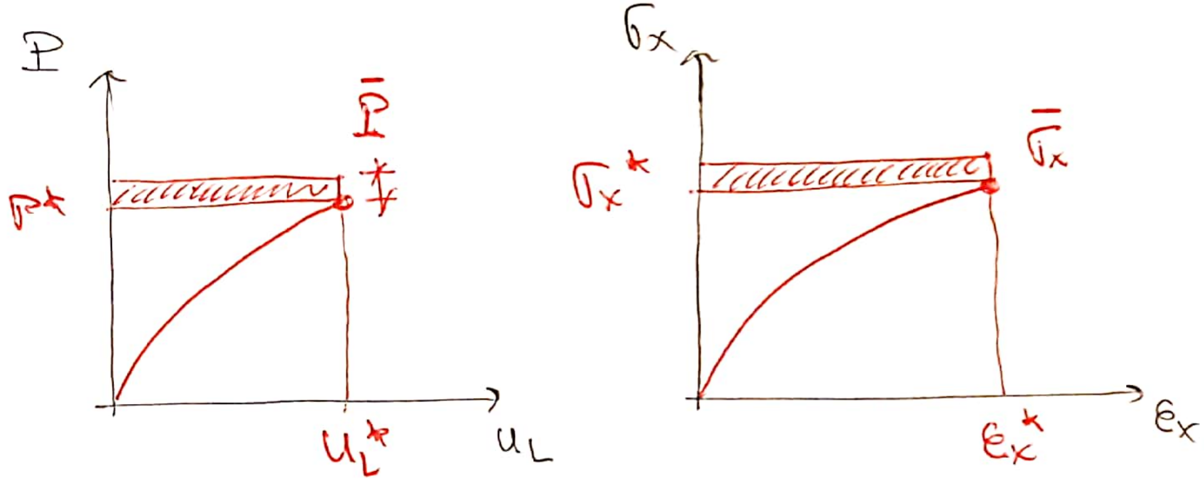
ENERGÍA COMPLEMENTARIA.
DE DEFORMACIÓN

Si $\bar{P} = +1$.
o $\bar{\sigma}_x = +1$
↓
TEOREMA DE LA FUERZA O TENSIÓN VIRTUAL UNITARIA.

$$\boxed{TTVU = TFVU}$$

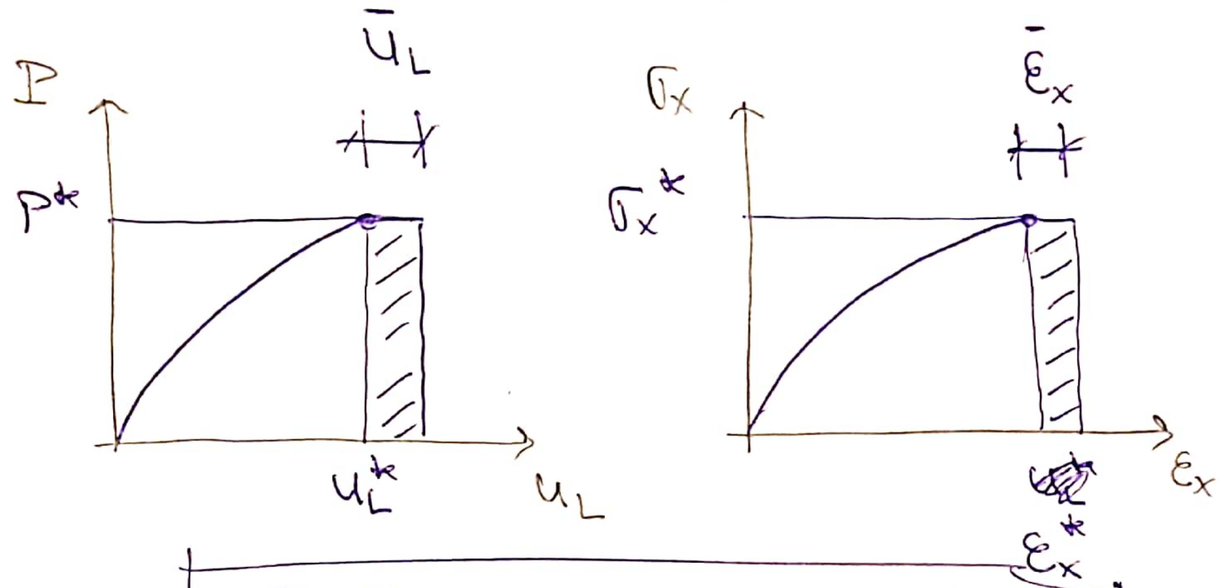
TEOREMA DE LAS TENSIONES O DE LAS FZAS VIRTUALES

$$\boxed{TTV = TFV}$$



"Si se considera una variación de las tensiones, en torno a una posición de equilibrio, se podrá observar en los diagramas que los valores de los desplaz. y de las deformaciones pueden considerarse tan próximos a los valores iniciales como se desee."

$$\boxed{\delta W_c = \delta U_c}$$



$$\boxed{\delta W = \delta U}$$

TEOREMA DE LOS DESPLAZAMIENTOS O DE LAS DEFORMACIONES VIRTUALES

TDV.

- SI $\bar{u}_L = +1$ o $\bar{\varepsilon}_x = +1$ $\longrightarrow$ "TEOREMA DE LOS DESPLAZAMIENTOS O DEFORMACIONES VIRTUALES UNITARIOS". $\boxed{\text{TDVU}}$

ENUNCIADO:

"SI SE CONSIDERA UNA VARIACIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS EN TORNO A UNA POSICIÓN DE EQUILIBRIO EN EL DIAGRAMA DE CARGAS, SE PUEDE OBSERVAR QUE EL NIVEL DE LAS CARGAS Y DE LAS TENSIONES PUEDE CONSIDERARSE TAN PRÓXIMO AL VALOR INICIAL COMO SE LO PROPONGA. ES DECIR, EN LAS EXPRESIONES SE PUEDE CONSIDERAR QUE LAS FUERZAS Y LAS TENSIONES PERMANECEN CONSTANTES MIENTRAS SE GENERA EL DESPLAZAMIENTO".

$\boxed{\text{TDV}}$ PÁG. 8.

A LOS TIPOS DE DESPLAZAMIENTOS MENCIONADOS PRECEDENTEMENTE SE LOS DENOMINA "DESPLAZAMIENTO VIRTUAL". (PÁG. 8)

AL TRABAJO, "TRABAJO VIRTUAL". (O VARIACIÓN DEL TRABAJO VIRTUAL δW).

A LA ENERGÍA, "ENERGÍA VIRTUAL (O " " LA ENERGÍA VIRTUAL δU).

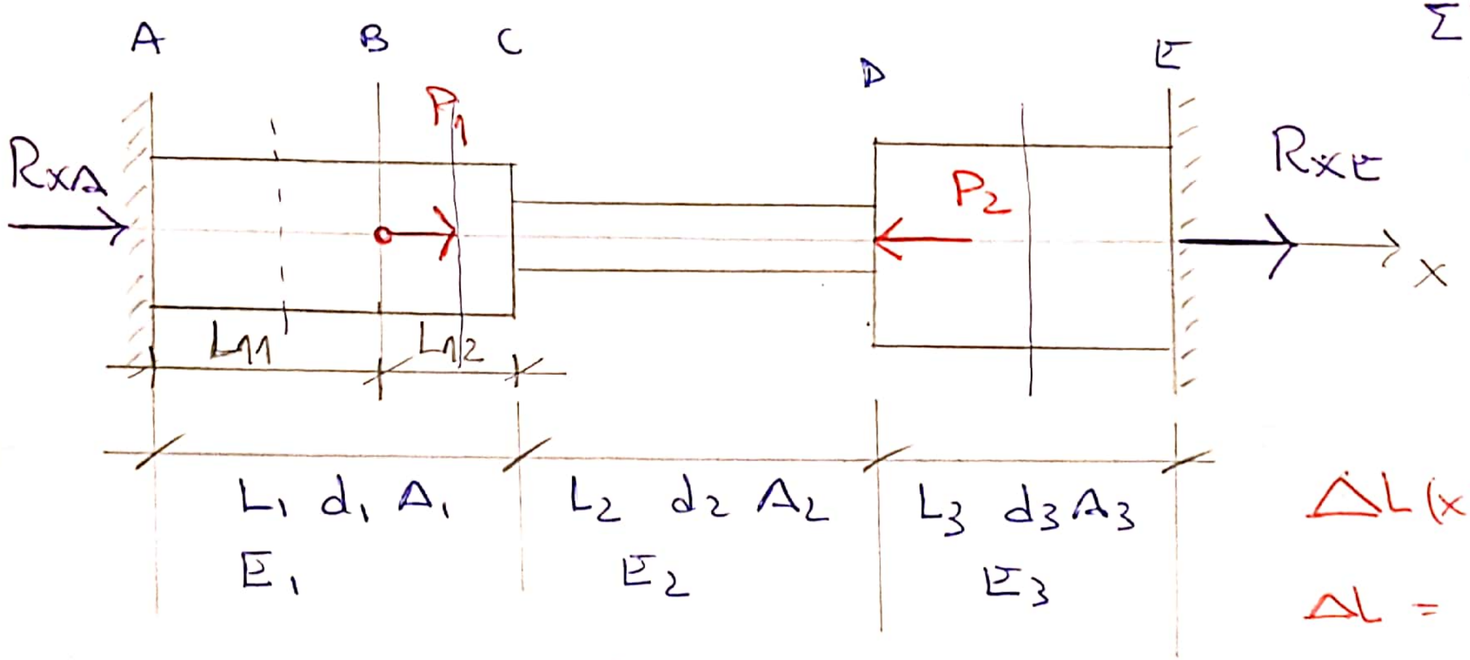
$\boxed{\text{TFV}}$ PÁG. 7.

A LOS TIPOS DE FUERZAS MENCIONADOS EN $\boxed{\text{TFV}}$ (PÁG. 7) SE LAS DENOMINA "FUERZAS VIRTUALES".

AL TRABAJO "TRABAJO COMPLEMENTARIO VIRTUAL" (O VARIACIÓN DEL TRABAJO COMPLEMENTARIO VIRTUAL δW_c).

A LA ENERGÍA "ENERGÍA COMPLEMENTARIA VIRTUAL DE DEFORM" (O VARIACIÓN DE LA ENERGÍA VIRTUAL δU_c).

EJEMPLO:



$$\Sigma F_x = 0.$$

$$\boxed{R_{xA} + P_1 - P_2 + R_{xE} = 0}$$

$$L_F = L_0$$

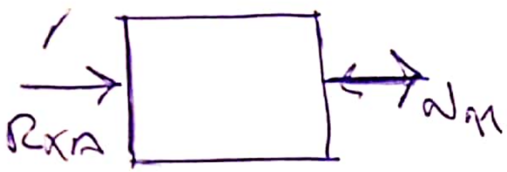
$$\Delta L(x) = \int \frac{N}{EA}\, dx.$$

$$\Delta L = \frac{NL}{EA}.$$

$$L_{F,11} + L_{F,12} + L_{F,2} + L_{F,3} = L_{0,11} + L_{0,12} + L_{0,2} + L_{0,3}.$$

$$\underbrace{(L_{F,11} - L_{0,11})}_{\Delta L_{11}} + \underbrace{(L_{F,12} - L_{0,12})}_{\Delta L_{1,2}} + \underbrace{(L_{F,2} - L_{0,2})}_{\Delta L_2} + \underbrace{(L_{F,3} - L_{0,3})}_{\Delta L_3} = 0.$$

$$\Delta L_{11} = \frac{N_{11} L_{11}}{E_1 A_1} \; ; \quad \Delta L_{12} = \frac{N_{12} L_{12}}{E_1 A_1} \; ; \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2} \; ; \quad \Delta L_3 = \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3}$$



$$-\frac{R_{xA} L_{11}}{E_1 A_1} - \frac{(R_{xA}+P_1) L_{12}}{E_1 A_1} - \frac{(R_{xA}+P_1) L_2}{E_2 A_2} - \frac{(R_{xA}+P_1-P_2) L_3}{E_3 A_3} =$$

$$= 0.$$

$$R_{xA}.$$

$$R_{xA} + N_M = 0.$$

$$\boxed{N_M = -R_{xA}}$$

$$\Delta L_{11} = \frac{N_{11} L_{11}}{E_1 A_1} = -\frac{R_{xA} L_{11}}{E_1 A_1}$$

$$\Delta L_{12} = \frac{N_{12} L_{12}}{E_1 A_1} = -\frac{(R_{xA}+P_1) L_{12}}{E_1 A_1}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2} = -\frac{(R_{xA}+P_1) L_2}{E_2 A_2}$$

$$\Delta L_3 = \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3} = -\frac{(R_{xA}+P_1-P_2) L_3}{E_3 A_3}$$

$$-R_{xA} \cdot \left[\frac{L_{11}}{E_1 A_1} + \frac{L_{12}}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_3}{E_3 A_3}\right] =$$

$$P_1 \left[\frac{L_{12}}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_3}{E_3 A_3}\right] - P_2 \frac{L_3}{E_3 A_3}$$

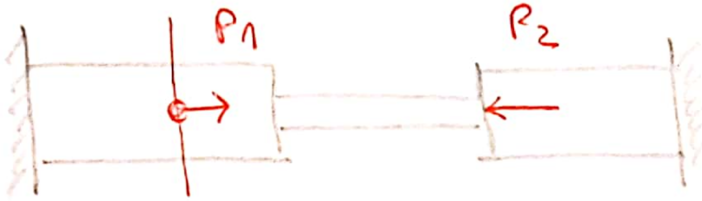
$$R_{xA} = \frac{-P_1\left[\frac{L_{12}}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_3}{E_3 A_3}\right] + P_2 \frac{L_3}{E_3 A_3}}{\left[\frac{L_{11}}{E_1 A_1} + \frac{L_{12}}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_3}{E_3 A_3}\right]}$$

Si $P_1 > P_2$; $R_{xA} < 0$ $\leftarrow$

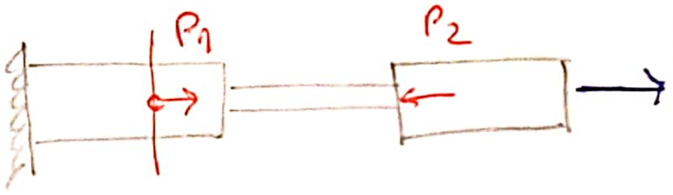
Si $P_1 < P_2$; $R_{xA} > 0$ $\rightarrow$

PRV + PAJR

12|14



=



RXE → RSE.

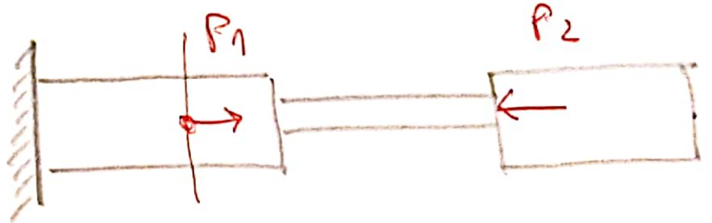
=

A

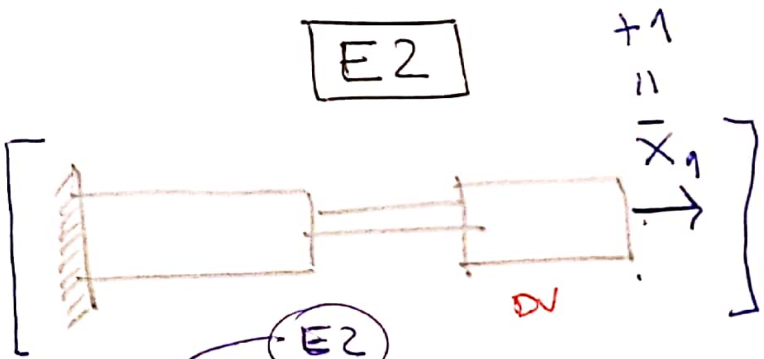
E1

E

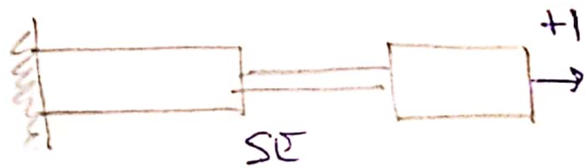
E2



+



X_1



$$d^{H}_{E,CF} = 0 = d^{0}_{E,CF} + d^{0}_{E,\bar{X}_1} \cdot X_1$$

E2

f

$$\boxed{d^{0}_{E,CF}} \quad \left.\begin{array}{l} E1 = DV \\ E2 = SE. \end{array}\right\}$$

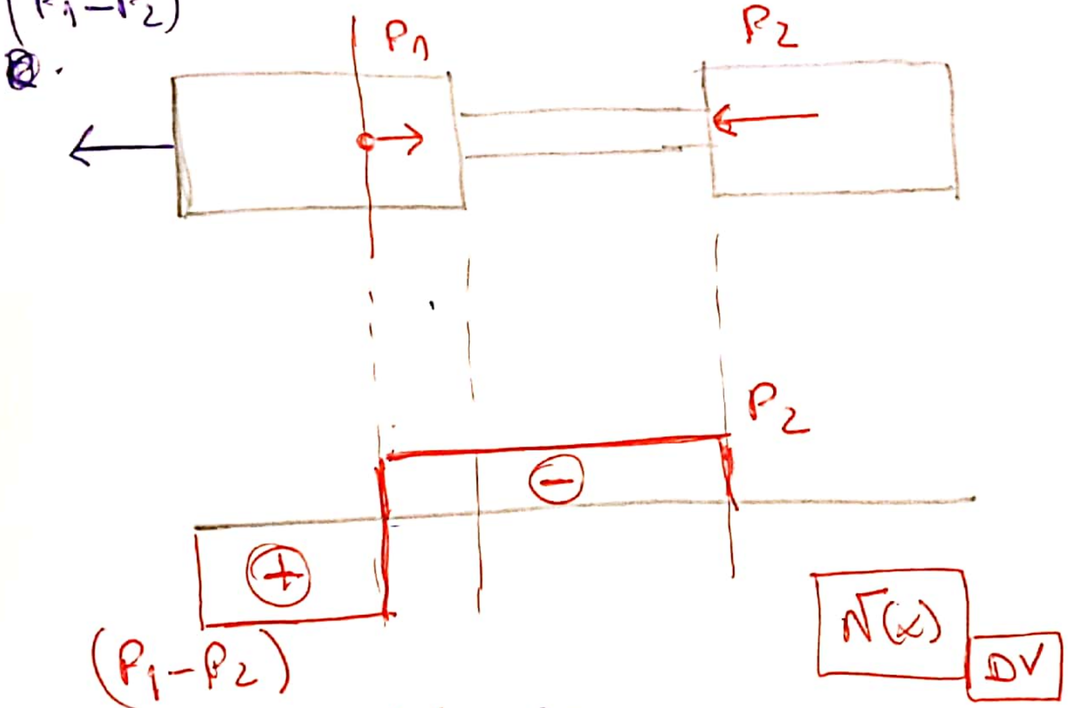
SE = SIST. EQUILIBRADO.

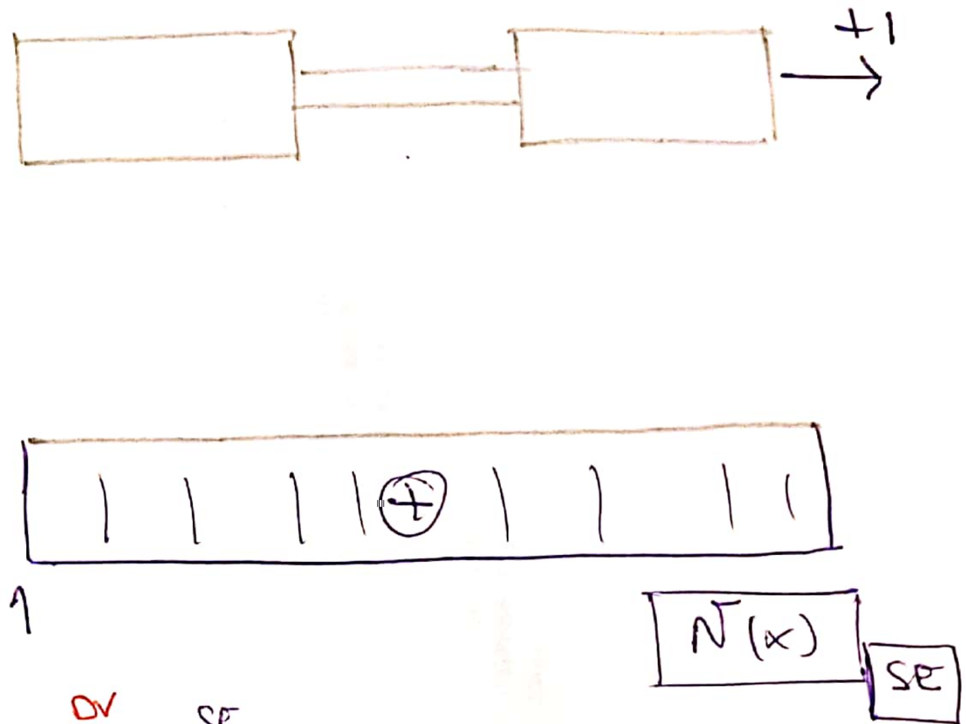
$$\delta W_C = \delta U_C$$

$$(+1)^{SE} \cdot d^{0\,DV}_{E,CF} = \sum_{b=1}^{4} \left[\int_b \overset{SE}{N} \cdot \overset{DV}{dn} \right] = \sum_{b=1}^{4} \left[\int_b \overset{SE}{N} \, \frac{\overset{DV}{N}}{EA} \, dx \right]$$

$$\overset{SE}{(+1)}\, \overset{DV}{d^{o}_{E,CF}} = \int_{b11} \frac{\overset{SE}{\bar{N}_{11}}\, \overset{DV}{N_{11}}}{E_1 A_1} dx + \int_{b12} \frac{\overset{SE}{\bar{N}_{12}}\, \overset{DV}{N_{12}}}{E_1 A_1} dx + \int_{b2} \frac{\overset{SE}{\bar{N}_{2}}\, \overset{DV}{N_{2}}}{E_2 A_2} dx + \int_{b3} \frac{\overset{SE}{\bar{N}_{3}}\, \overset{DV}{N_{3}}}{E_3 A_3} dx .$$

$P_1 > P_2$





$$\boxed{d^{o}_{E,CF} = \frac{\overbrace{(P_1-P_2)}^{DV}\overbrace{(+1)}^{SE}}{E_1 A_1} \cdot L_{11} + \frac{\overbrace{(-P_2)}^{DV}\overbrace{(+1)}^{SE}}{E_1 A_1} L_{12} + \frac{\overbrace{(-P_2)}^{DV}\overbrace{(+1)}^{SE}}{E_2 A_2} L_2} + \cancel{\frac{(0)(+1)}{E_3 A_3} L_3}$$

$$\boxed{d^{0}_{E,\bar{x}_1}} \qquad DV \equiv E2 \qquad SE \equiv E2$$

$$d^{0}_{E,\bar{x}_1} = \frac{(+1)(+1)\,L_{11}}{E_1 A_1} + \frac{(+1)(+1)\,L_{12}}{E_1 A_1} + \frac{(+1)(+1)\,L_2}{E_2 A_2} + \frac{(+1)(+1)\,L_3}{E_3 A_3}$$

$$\boxed{d^{0}_{E,\bar{x}_1} = \frac{L_{11}}{E_1 A_1} + \frac{L_{12}}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_3}{E_3 A_3}}$$