



*Universidad de Buenos Aires*

*Facultad de Ingeniería*

*Departamento de Estabilidad*

**INGENIERÍA CIVIL**

**ESTABILIDAD II – 84.03**

# **SOLICITACIÓN AXIL EN RÉGIMEN ELÁSTICO – SA - 03**

## **“Método de las Incógnitas Estáticas – MIE”**



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

### 01 – INTRODUCCIÓN

### 02 – INTRODUCCIÓN AL MÉTODO

### 03 – MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS

## 01 – INTRODUCCIÓN:

En esta presentación se explicará la metodología y los conceptos básicos asociados a uno de los métodos de resolución sistemas hiperestáticos.

El presente es conocido en cualquiera de las siguientes denominaciones:

- Método de las Incógnitas Estáticas;
- Método de las Fuerzas;
- Método de las Flexibilidades;
- Método de las Compatibilidades;
- Entre otras.

## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 – INTRODUCCIÓN

02 – INTRODUCCIÓN AL MÉTODO

03 – MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS

### 02 – INTRODUCCIÓN AL MÉTODO:

Considérese la siguiente estructura conformada por una barra horizontal, con un empotramiento en el extremo izquierdo “A” y un apoyo móvil en el extremo derecho “B”.

La barra en el plano posee **3 grados de libertad (GL)** y se le han impuesto **4 condiciones de vínculo (CV)**, **3CV en A** y **1CV en B**.

Se observa, además, que no existe vinculación aparente.

Para este problema plano, la Estática permite plantear solamente **3 ecuaciones de equilibrio**.



Por otra parte, se tienen **4 incógnitas**; 3 de ellas provienen de las fuerzas reactivas incógnitas del empotramiento, mientras que la 4<sup>o</sup> proviene de la reacción en el apoyo móvil.

La diferencia entre el N<sup>o</sup> de Incógnitas Estáticas y el N<sup>o</sup> de Ecuaciones Estáticas define el “**Grado de Hiperestaticidad**” del sistema.



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

En consecuencia, el problema resulta **“indeterminado”**, y requerirá que se deban plantear ecuaciones adicionales o complementarias para poder resolverlo.

Por resolver el problema se entenderá conocer las magnitudes estáticas y cinemáticas que lo caracterizan. Es decir, determinar la **RVE** (reacciones de vínculo externo), **RVI = SI** (reacciones de vínculo interno o sollicitaciones internas), **DC** (trazado de los diagramas de características), determinación de las **tensiones** en todos los puntos de la estructura, calcular los **desplazamientos** (desplazamientos verticales y horizontales, y los giros), así como las **deformaciones**.

Estas ecuaciones complementarias deberán ser tales que permitan resolver el problema en forma “unívoca”.

Las ecuaciones complementarias se denominarán: **“Ecuaciones de Compatibilidad de los Desplazamientos”**.

El término **“compatibilidad”** significa en su acepción más general y apropiada para el presente tema, *“...coincidencia en tiempo y espacio de determinadas características y propiedades...”*.

Más adelante, se entenderá el uso de esta terminología.

## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS

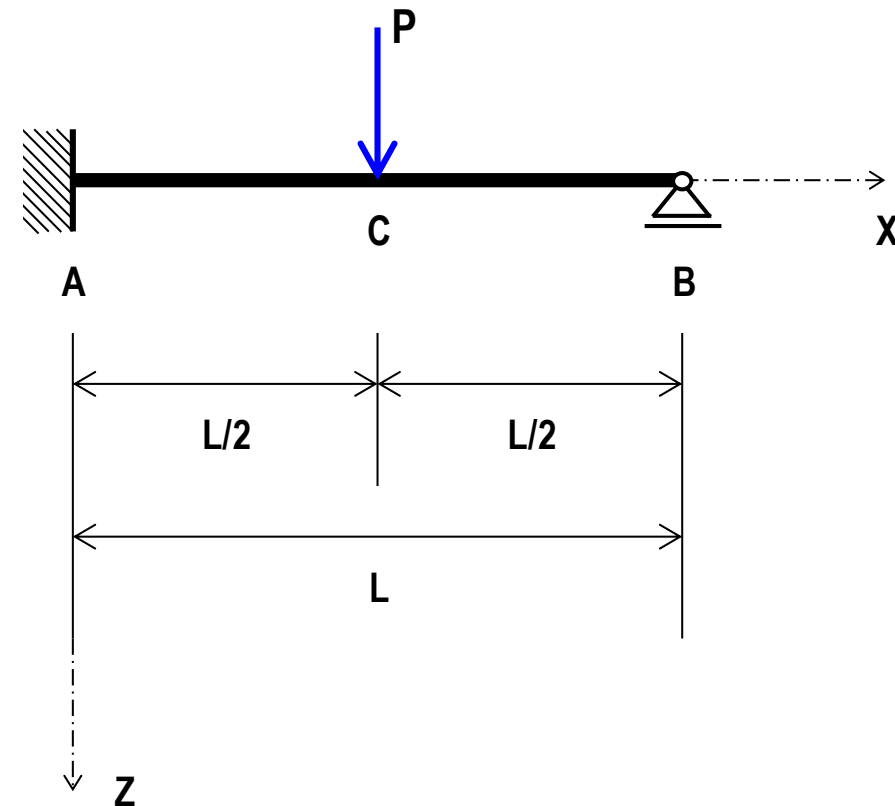
El análisis efectuado hasta el momento no ha tenido en cuenta las causas actuantes sobre la misma.

Considérese ahora aplicada una carga “P” en la mitad de la longitud, tal como se muestra en la figura.

Asimismo, se esquematizan todas las fuerzas exteriores a través de un Diagrama de Cuerpo Libre, DCL.

Expresando lo anterior en forma de ecuación genérica, de manera que defina el equilibrio, se tendrá:

$$F_E = F_A + F_R = 0$$



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

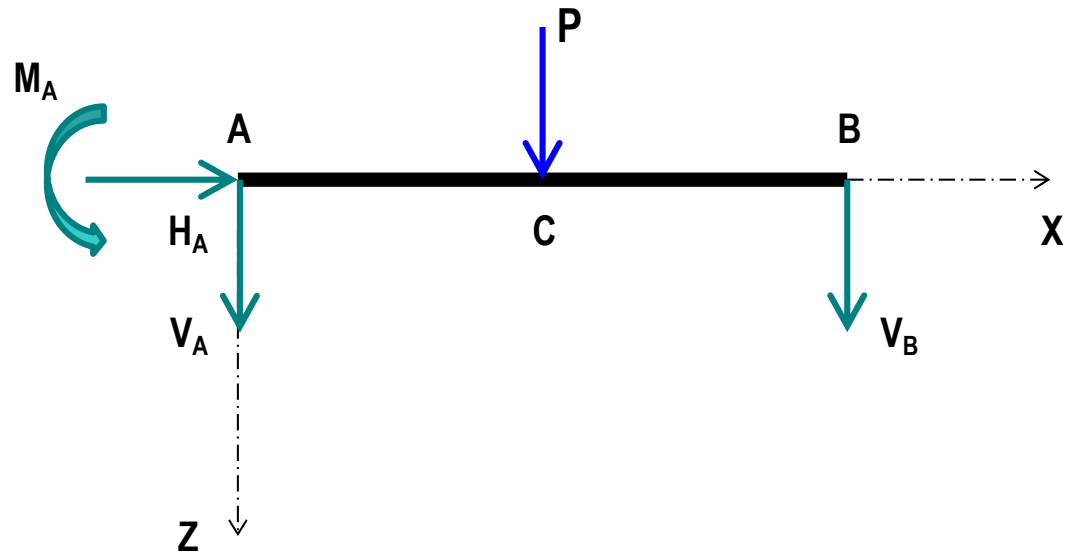
02 - INTRODUCCIÓN AL MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS

Donde:

- **FE** : Fuerzas Exteriores
- **FA** : Fuerzas Activas
- **FR** : Fuerzas Reactivas

La siguiente figura evidencia lo enunciado.



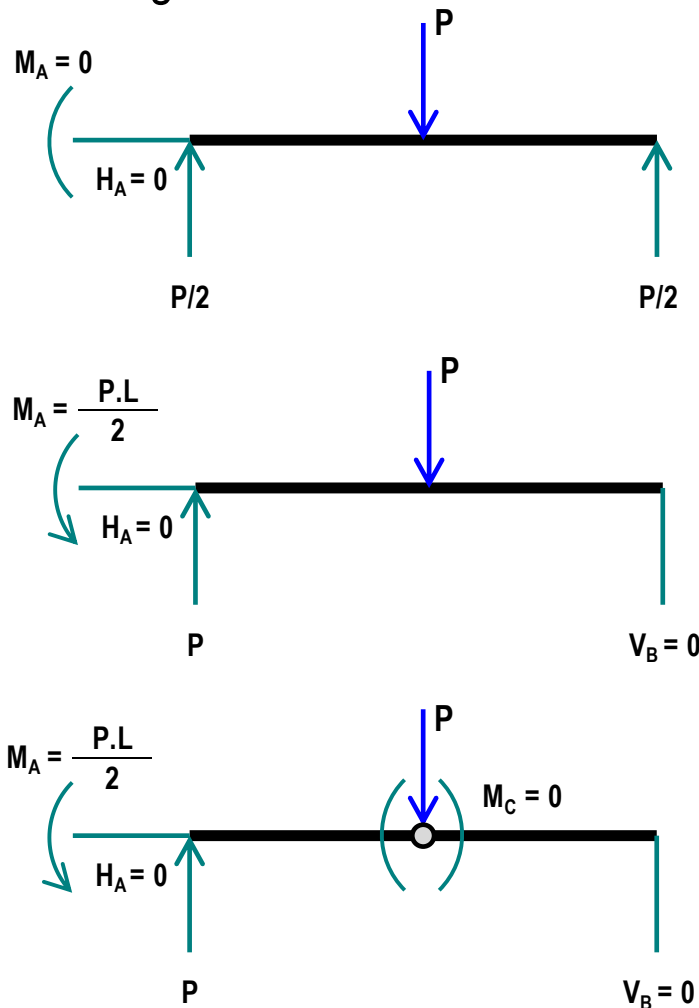
## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS

Algunas de las posibilidades de que el sistema anterior se encuentre en equilibrio son las siguientes:



Cualquiera de las 3 situaciones mostradas, verifica el equilibrio.

Pero cuál es la correcta?

Ahora bien, se deberá tener en cuenta que:

- La solución deberá ser **“ÚNICA”**, (“Teorema de la Unicidad”);
- Una misma causa en condiciones iguales deberá producir los mismos efectos (“Principio de Causalidad”).

Se desprende que la solución no dependerá exclusivamente de satisfacer el equilibrio. Habrá que satisfacer algo más.

Pero Qué?

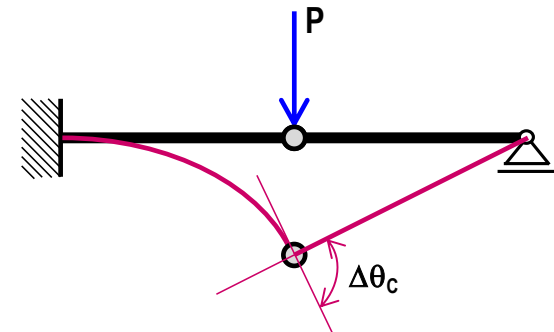
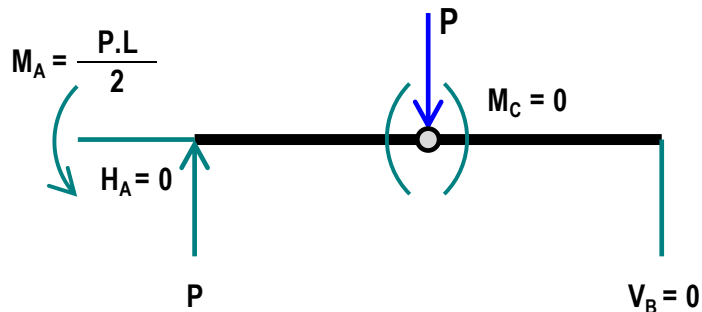
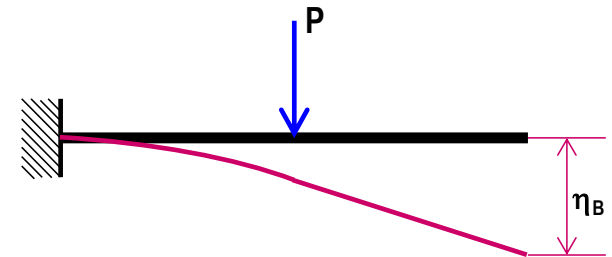
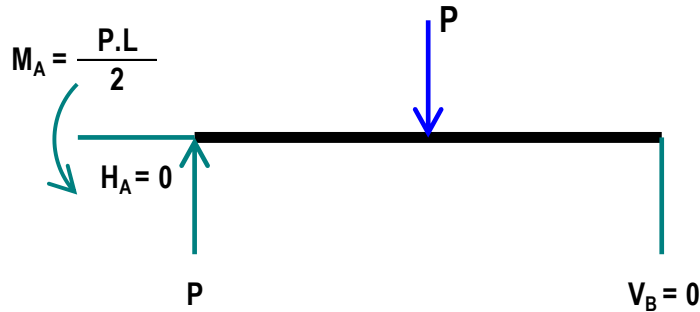
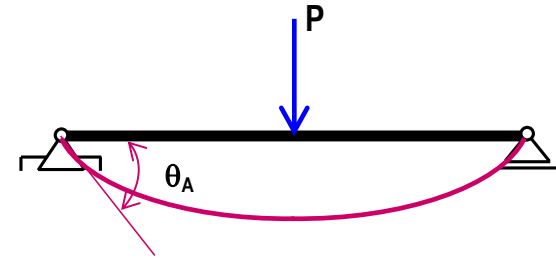
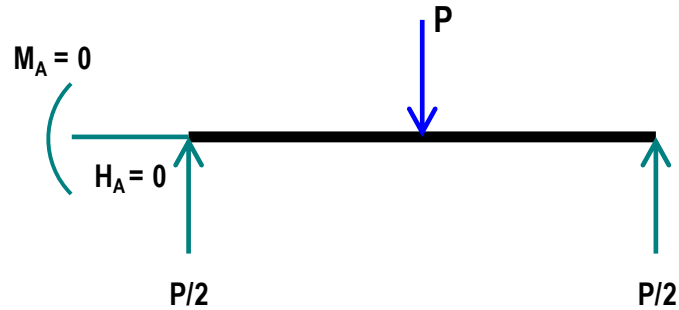
## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS

Habrá que fijarse y prestar especial atención en: **“LA DEFORMADA DE LA BARRA”**.





## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

De los esquemas precedentes se observan los siguientes aspectos relacionados con la deformación de las barras:

- Del esquema “1”, el giro  $\theta_A$  no es posible o compatible con las condiciones de vínculos dadas, ya que el mismo no está permitido por el empotramiento;
- Del esquema “2”, el desplazamiento vertical  $\eta_B$  tampoco es posible o compatible con las condiciones de vínculos dadas, ya que el mismo no está permitido por el apoyo móvil;
- Y finalmente, del esquema “3”, el giro relativo  $\Delta\theta_{AC}$  no es posible o compatible con las condiciones de vínculos dadas, ya que en la sección “C” existe continuidad de la barra, la articulación no existe, y por consiguiente, no está permitido por estas situaciones;
- Éstas son sólo algunas de las posibles situaciones de equilibrio que pueden presentarse. Se podrían haber planteado muchas más, de hecho, infinitas.

## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

Surge entonces la siguiente pregunta, Qué habría que hacer para compatibilizar equilibrio y deformada de la barra al mismo tiempo?

- Del esquema “1”, habría que darles valores al momento  $M_A$  de tal forma que anule el giro  $\theta_A$  y al mismo tiempo satisfaga el equilibrio;
- Del esquema “2”, habría que ir probando con distintos valores de la reacción vertical  $V_B$  de tal forma que anule el desplazamiento vertical  $\eta_B$  y al mismo tiempo satisfacer el equilibrio;
- Y finalmente, del esquema “3”, habría que ir proporcionando distintos valores al par de pares (o Momento Interno)  $M_C$  de tal manera de anular el giro relativo  $\Delta\theta_{AC}$  y al mismo tiempo satisfacer el equilibrio;
- Esta metodología de resolución sería larguísimo e interminable, es decir, el hecho de ir probando con distintos valores de  $M_A$  o  $V_B$  o  $M_C$ , para que simultáneamente se satisfaga equilibrio y compatibilidad o deformabilidad de la barra al mismo tiempo.



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 – INTRODUCCIÓN

02 – INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 – MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

### 03 – MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS:

Lo que se pretende hacer es sistematizar un procedimiento, de tal manera de transformar un sistema estáticamente indeterminado en otros estáticamente determinados; y así poder verificar la compatibilidad de los desplazamientos en cada uno de ellos.

Para lo anterior nos basaremos en los siguientes 2 principios:

1. El “Principio de las Reacciones Vinculares”;
2. El “Principio de Acción y Reacción”.

Y cómo se aplican estos 2 principios en esta metodología?

Básicamente, se puede reemplazar un vínculo (ya sea interno o externo) por las fuerzas que el mismo es capaz de desarrollar, e impedir el o los desplazamientos que los vínculos suprimidos no permiten.

Veamos todo esto con los mismos esquemas anteriores.



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 – INTRODUCCIÓN

02 – INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 – MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

### 1.- “Principio de las Reacciones Vinculares”:

*“Un vínculo podrá ser suprimido si se reemplaza al mismo por la fuerza que es capaz de producir el mismo efecto que dicho vínculo, y, de esta manera, reestablezca las condiciones anteriores o viceversa”.*

### 2.- “Principio de Acción y Reacción”:

*“En esta metodología deberá ser entendido como la fuerza (acción) que hace el esquema estructural sobre el vínculo (esto no será estudiado), y la reacción que hace el vínculo sobre el sistema, el cual será de igual módulo, igual dirección pero sentido contrario”.*

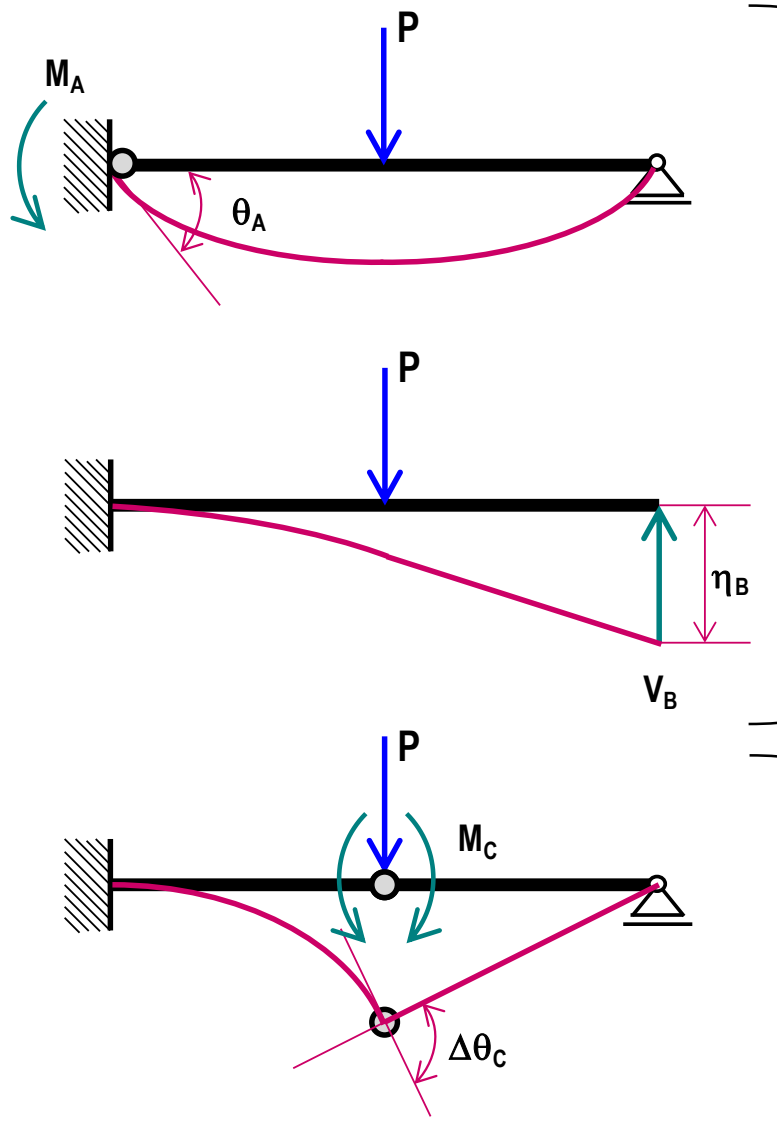
Todos los valores mencionados precedentemente, todavía no son conocidos.

## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS



E1

Vínculos Externos

E2

Vínculos Internos

E3



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 – INTRODUCCIÓN

02 – INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 – MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

A cualquiera de los sistemas indicados precedentemente serán denominados como **“SISTEMA FUNDAMENTAL”** o **“SISTEMA CERO”**.

Estos sistemas fundamentales o sistemas ceros deberán cumplir con las siguientes 2 condiciones:

- No ser un mecanismo;
- Grado de Hiperestaticidad  $GH = 0$ ;

Es decir, el “Sistema Fundamental – SF” deberá ser un sistema “isostático”.

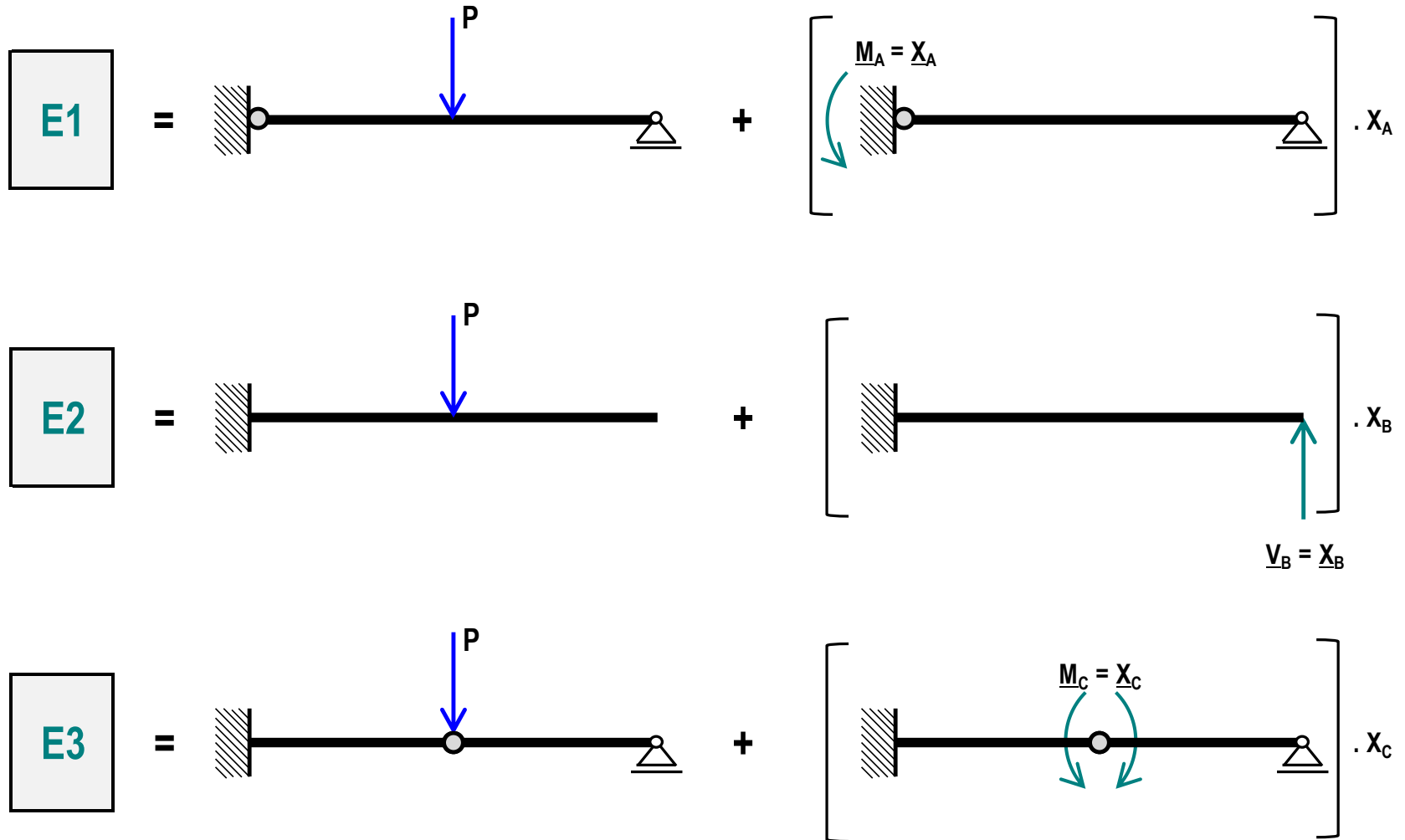
A continuación, a cada uno de los esquemas se los va a poder descomponer en los siguientes:

## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS





## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

Todo lo anterior se puede resumir de la siguiente manera:

“Los efectos que producen en mi sistema fundamental el estado de causas deformantes y la reacción de vínculo, ya sean externas o internas, serán iguales a los efectos producidos en el SF por la causa deformante más los efectos producidos en el SF por la reacción de vínculo ya sea externa o interna, actuando individualmente”.

Lo anterior no es más que la aplicación del “Principio de Superposición de Efectos”.

Las incógnitas en los esquemas anteriores son precisamente las reacciones de vínculo, externas o internas; y son precisamente ellas las que se quieren o pretenden determinar.

Para ello se plantearán las siguientes ecuaciones de compatibilidad de los desplazamientos, según el esquema con el cual se pretenda o desee trabajar.



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

$$\boxed{E1} = \theta^H_{A,P} = \theta^0_{A,P} + \theta^0_{A,XA} \cdot X_A \quad \theta^H_{A,P} = 0$$

$$\boxed{E2} = \eta^H_{B,P} = \eta^0_{B,P} + \eta^0_{B,XB} \cdot X_B \quad \eta^H_{B,P} = 0$$

$$\boxed{E3} = \Delta\theta^H_{C,P} = \Delta\theta^0_{C,P} + \Delta\theta^0_{C,XC} \cdot X_C \quad \Delta\theta^H_{C,P} = 0$$



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

En definitiva el “Método de las Incógnitas Estáticas” consiste en lo siguiente:

“El MIE consiste en descomponer un determinado esquema estructural estáticamente indeterminado en otros sistemas estáticamente determinados y calcular alguno o varios efectos en el esquema indeterminado como suma de los efectos en los esquemas estáticamente determinados”.

Lo anterior se puede resumir en la siguiente expresión general:

$$e^H_{i,c} = e^0_{i,c} + \sum_{j=1}^n e^0_{i,x_j} \cdot X_j$$



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

El siguiente es un resumen de la nomenclatura y de las denominaciones utilizadas:

- SH = H : Sistema Hiperestático;
- GH : Grado de Hiperestaticidad;
- PRV : Principio de las Reacciones Vinculares;
- PAyR : Principio de Acción y Reacción;
- PSE : Principio de Superposición de Efectos;
- SF : Sistema Fundamental o Sistema Cero;
- $e_{i,c}^h$  : Efecto en el SH en la coordenada "i" debido a las causas deformantes "c". Son los desplazamientos en las coordenadas en donde se ubican los vínculos externos o internos que han sido eliminados con el fin de definir al SF y en virtud de la aplicación del PRV y del PAyR. Es decir, para transformar el SH en uno isostático, el SF;



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 - INTRODUCCIÓN

02 - INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 - MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

- $e_{i,c}^0$  : Efecto en el SF en la coordenada “i” debido a las causas deformantes “c”. Son los desplazamientos en las coordenadas en las cuales se eliminaron los vínculos. También se los denomina “Términos de Causa” y es conveniente, aunque no necesario, cuando se presentan más de una, en determinar un término de causa por cada una de ellas;
- $e_{i,x_j}^0$  : Efecto en el SF en la coordenada “i” debido a la incógnita en la coordenada “j” considerada ésta como unitaria y positiva. Los desplazamientos generalizados provocados por fuerzas generalizadas unitarias y positivas se denominan “Flexibilidades”. Cuando las coordenadas de la causa coincide con la del efecto, es decir, cuando  $i = j$  a la flexibilidad se la denomina “**directa -  $f_{ii}$** ” y siempre será un valor positivo. En cambio, cuando las coordenadas de la causa no coincide con la del efecto, es decir, cuando  $i \neq j$  a la flexibilidad se la denomina “**cruzada -  $f_{ij}$** ” y su valor podrá ser positivo o negativo;
- $X_j$  : Verdadero valor de la incógnita. Éstas son magnitudes estáticas, de aquí el nombre del método.



## MÉTODO DE LAS INCÓGNITAS ESTÁTICAS - MIE

01 – INTRODUCCIÓN

02 – INTRODUCCIÓN AL  
MÉTODO

03 – MÉTODO DE LAS  
INCÓGNITAS  
ESTÁTICAS

El siguiente constituye un resumen del método con los pasos a seguir:

1. Determinar el GH, para así conocer el N° de incógnitas;
2. Elegir el SF más conveniente y así poner en evidencia las incógnitas estáticas;
3. Planteo de las Ecuaciones de Compatibilidad de los Desplazamientos;
4. Cálculo de las Flexibilidades;
5. Cálculo de los Términos de Causa;
6. Resolución de las Ecuaciones de Compatibilidad de los Desplazamientos;
7. Obtención de las Incógnitas Estáticas " $X_j$ ";
8. Determinación de las RVE;
9. Trazado de los Diagramas de Características – DC;
10. Completitud del Análisis Cinemático.