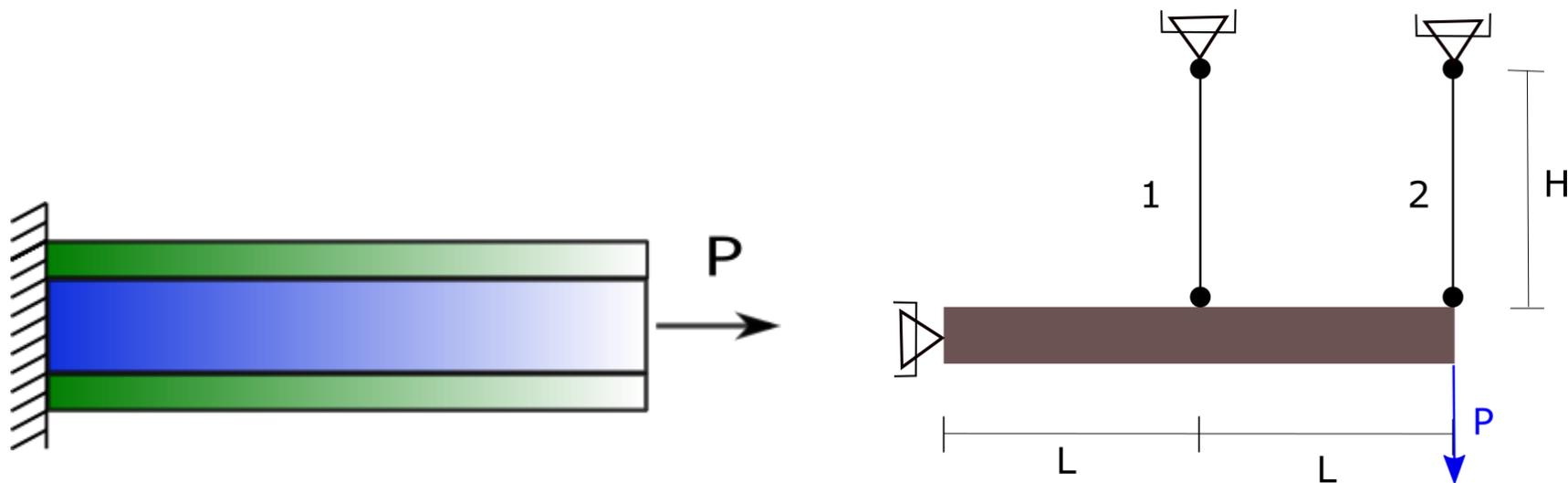




# Solicitación Axil en Régimen Elástico



Manuela Medina – Constanza Ruffinelli – Tania Poletilo  
Araceli Daiana Estevez – Natalia Allmi



**Ejercicio 1:** a) Calcular los esfuerzos axiles de cada barra  
b) Corrimiento total del punto **A**

Datos:

$$P = 100 \text{ kN}$$

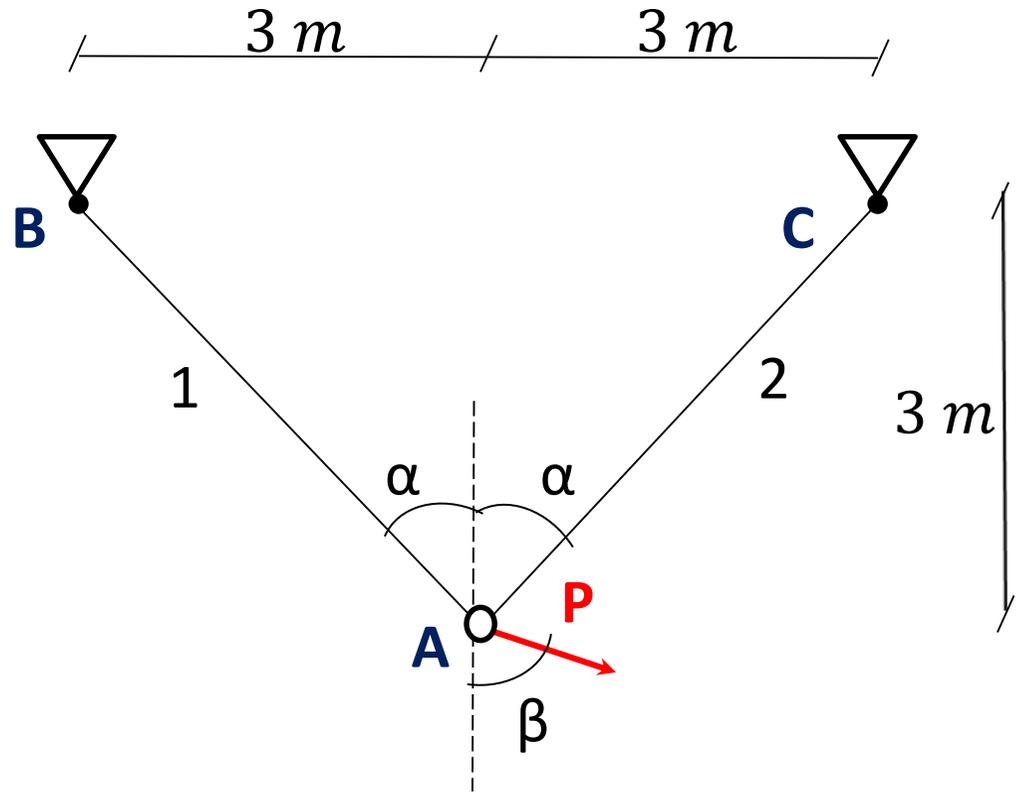
$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$A_1 = A_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

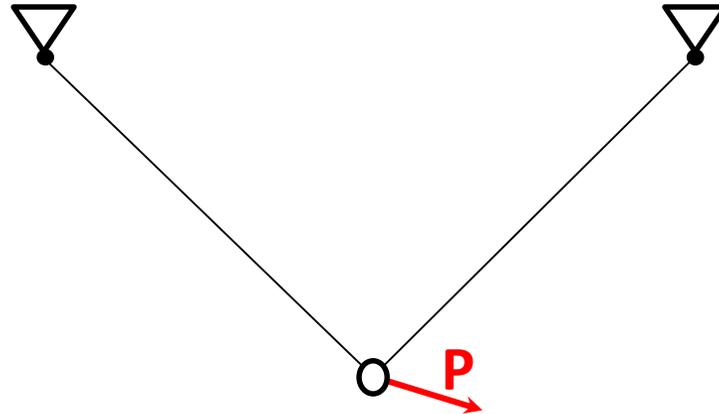
$$E_1 = E_2 = 200 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$L_1 = L_2 = \sqrt{(3\text{m})^2 + (3\text{m})^2} = 4,24 \text{ m}$$





a) Calcular los esfuerzos normales de cada barra



¿Qué tipo de sistema es?

$$\left. \begin{aligned} n + 2 &= 2 + 2 = 4 \\ n_v &= 4 \end{aligned} \right\}$$

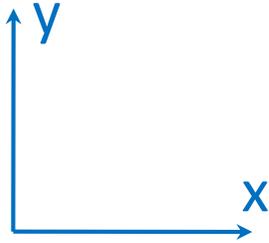
Grado de hiperestaticidad = 0

Por lo tanto, las **ecuaciones de equilibrio** son suficientes para resolver el sistema.

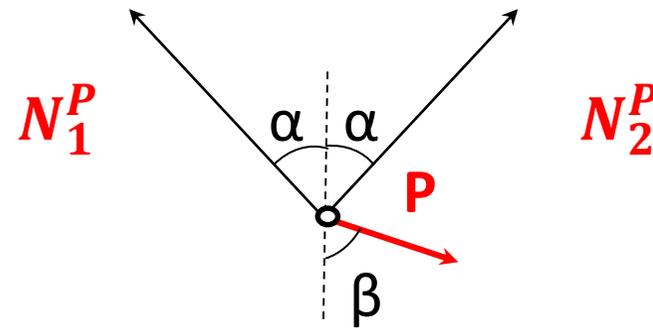


- Resolvemos el sistema isostático,

Terna



DCL



- Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = -N_1^P \cdot \sin \alpha + P \cdot \sin \beta + N_2^P \cdot \sin \alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad N_2^P = N_1^P - 122,5 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\sum F_y = N_1^P \cdot \cos \alpha - P \cdot \cos \beta + N_2^P \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

(1) en (2)  
y despejamos  $\longrightarrow$

$$N_1^P = 96,6 \text{ kN}$$
$$N_2^P = -25,9 \text{ kN}$$



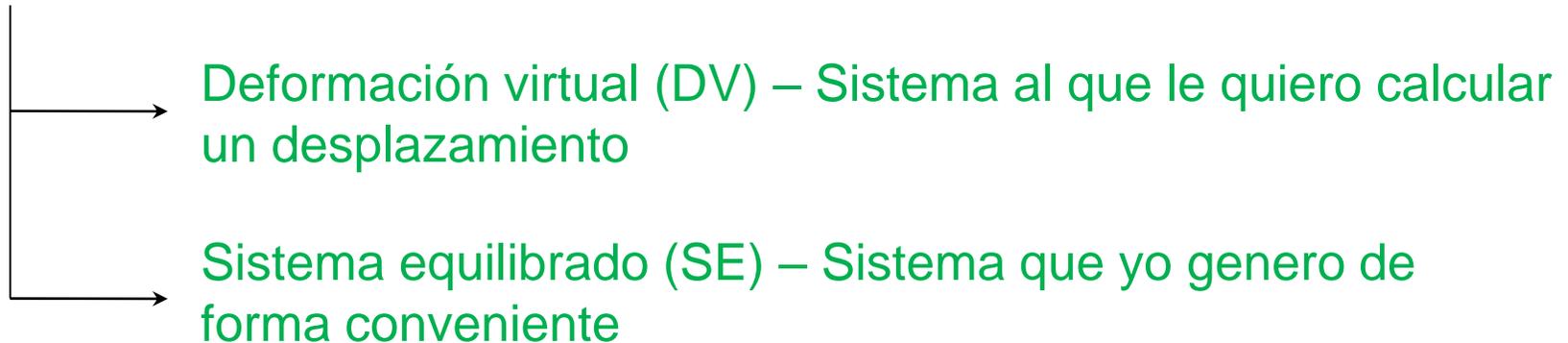
## b) Corrimiento total del punto A

- Vamos a calcularlo utilizando el **Teorema de los Trabajos Virtuales**

$$\eta_A \cdot (+1) = \sum_i^n \frac{N_{ise} \cdot N_{idv} \cdot L_i}{E_i \cdot A_i}$$

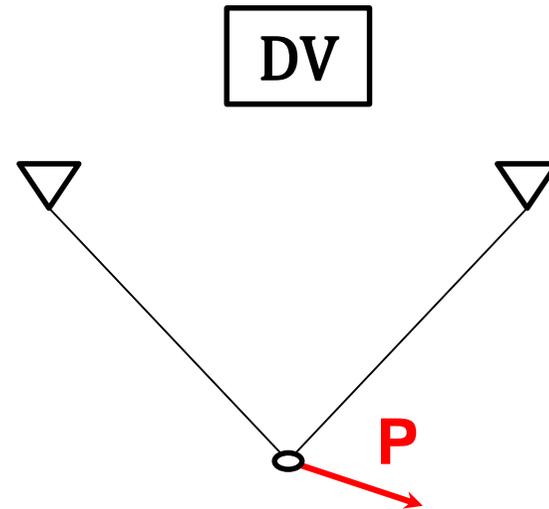
Siendo  $i = n^\circ$  de barra

¿Qué necesitamos para usar TTV?

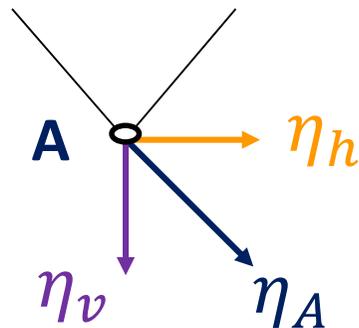




- Nuestra **deformación virtual** será la estructura **isostática** original



- Calcularemos el corrimiento de A **descomponiendo** en dos direcciones



$\eta_v = \text{desp. vertical de A}$   
 $\eta_h = \text{desp. horizontal de A}$

De esta manera

$$\eta_A = \sqrt{(\eta_v)^2 + (\eta_h)^2}$$

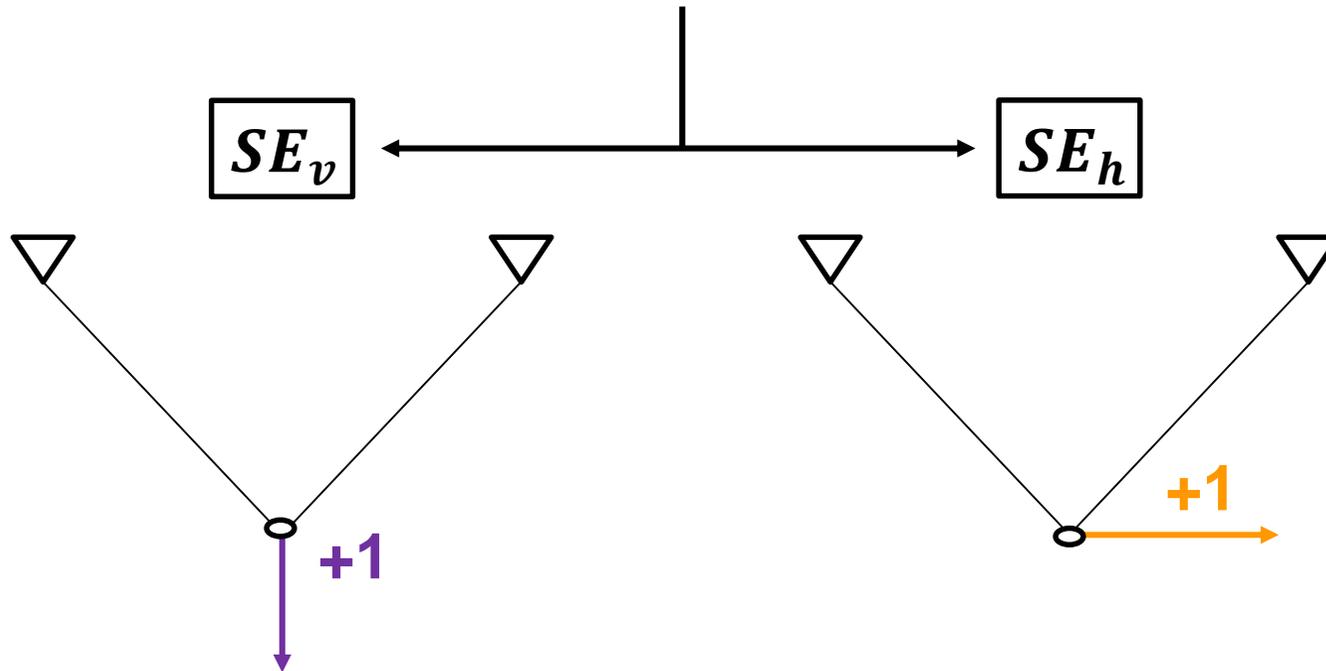


- Planteamos un **sistema equilibrado para cada corrimiento**



**Fuerza unitaria positiva** en:

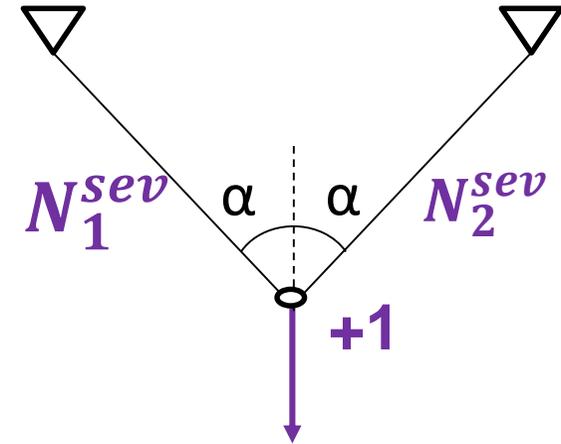
- El punto al cual le quiero calcular el desplazamiento
- En la dirección que quiero calcular el desplazamiento





# Equilibrio de $SE_v$

$N_{isev}$  = Normal de barra  $i$  debida a carga unitaria en dirección vertical



## • Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = -N_1^{sev} \cdot \sin \alpha + N_2^{sev} \cdot \sin \alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad N_2^{sev} = N_1^{sev} \quad (1)$$

Normales iguales por simetría

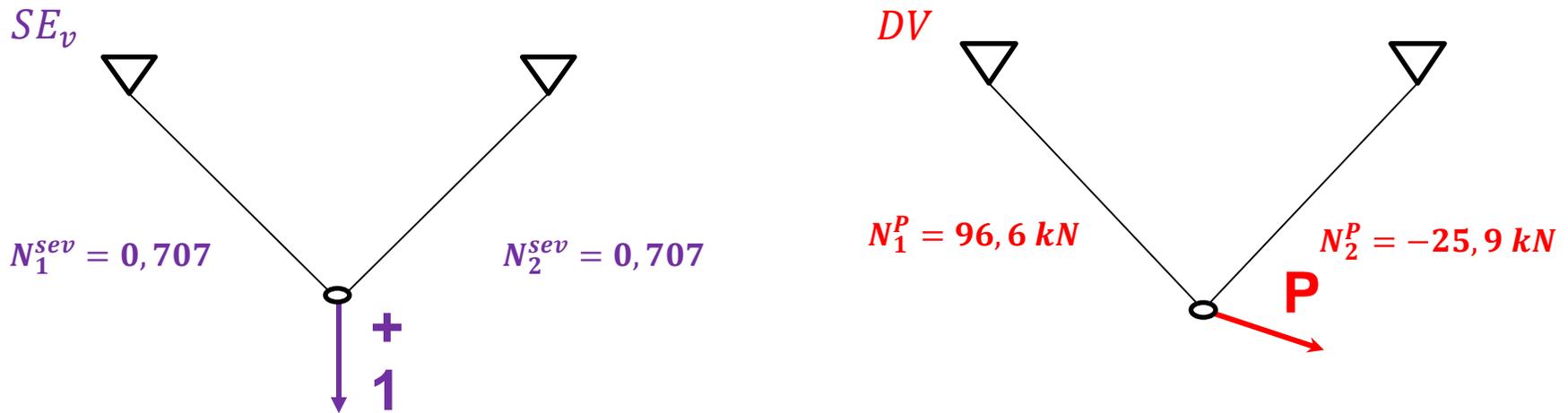
$$\sum F_y = N_1^{sev} \cdot \cos \alpha - 1 + N_2^{sev} \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

(1) en (2)  $\longrightarrow$   $N_1^{sev} = 0,707$   
y despejamos  $N_2^{sev} = 0,707$



- Desplazamiento  $\eta_v$

Con los valores de las normales calculados en el **inciso a)**, y con las normales de los sistemas SE y DV calculadas previamente, **calculamos el desplazamiento**  $\eta_v$



$$\eta_v = \frac{N_1^{sev} \cdot N_1^P \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2^{sev} \cdot N_2^P \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2}$$

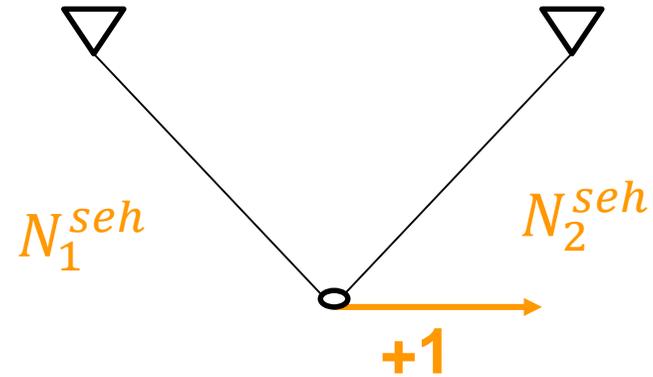
$$\eta_v = \frac{(0,707) \cdot (96,6 \text{ kN}) \cdot 4,24 \text{ m}}{200 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} + \frac{(0,707) \cdot (-25,9 \text{ kN}) \cdot 4,24 \text{ m}}{200 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$\eta_v = 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,12 \text{ mm}$$



# Equilibrio de $SE_h$

$N_{iseh}$  = Normal de barra  $i$  debida a carga unitaria en dirección horizontal



## • Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = -N_1^{seh} \cdot \sin \alpha + 1 + N_2^{seh} \cdot \sin \alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad N_2^{seh} = N_1^{seh} - 1,41 \quad (1)$$

$$\sum F_y = N_1^{seh} \cdot \cos \alpha + N_2^{seh} \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

(1) en (2)  
y despejamos



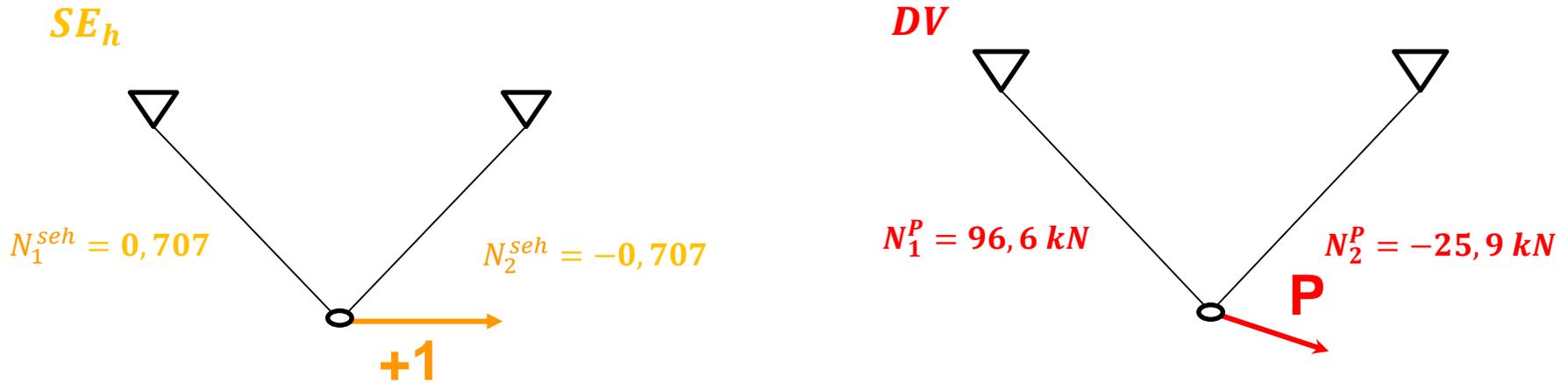
$$N_1^{seh} = 0,707$$

$$N_2^{seh} = -0,707$$



- Desplazamiento  $\eta_h$

Con los valores de las normales calculados en el inciso a), y con las normales de los sistemas SE calculadas previamente, **calculamos el desplazamientos**  $\eta_h$



$$\eta_h = \frac{N_1^{seh} \cdot N_1^P \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2^{seh} \cdot N_2^P \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2}$$

$$\eta_h = \frac{(0,707) \cdot (96,6 \text{ kN}) \cdot 4,24 \text{ m}}{200 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} + \frac{(-0,707) \cdot (-25,9 \text{ kN}) \cdot 4,24 \text{ m}}{200 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$\eta_h = 3,67 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,67 \text{ mm}$$



- Resulta entonces,

$$\eta_A = \sqrt{(\eta_v)^2 + (\eta_h)^2}$$

$$\eta_A = \sqrt{(2,12 \cdot mm)^2 + (3,67 \cdot mm)^2}$$

**Corrimiento total del  
punto A**

$$\eta_A = 4,24 \cdot mm$$

# Método de las Incógnitas Estáticas

## Teorema de los Trabajos Virtuales



**Ejercicio 2:** Calcular los esfuerzos normales de cada barra

Datos:

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

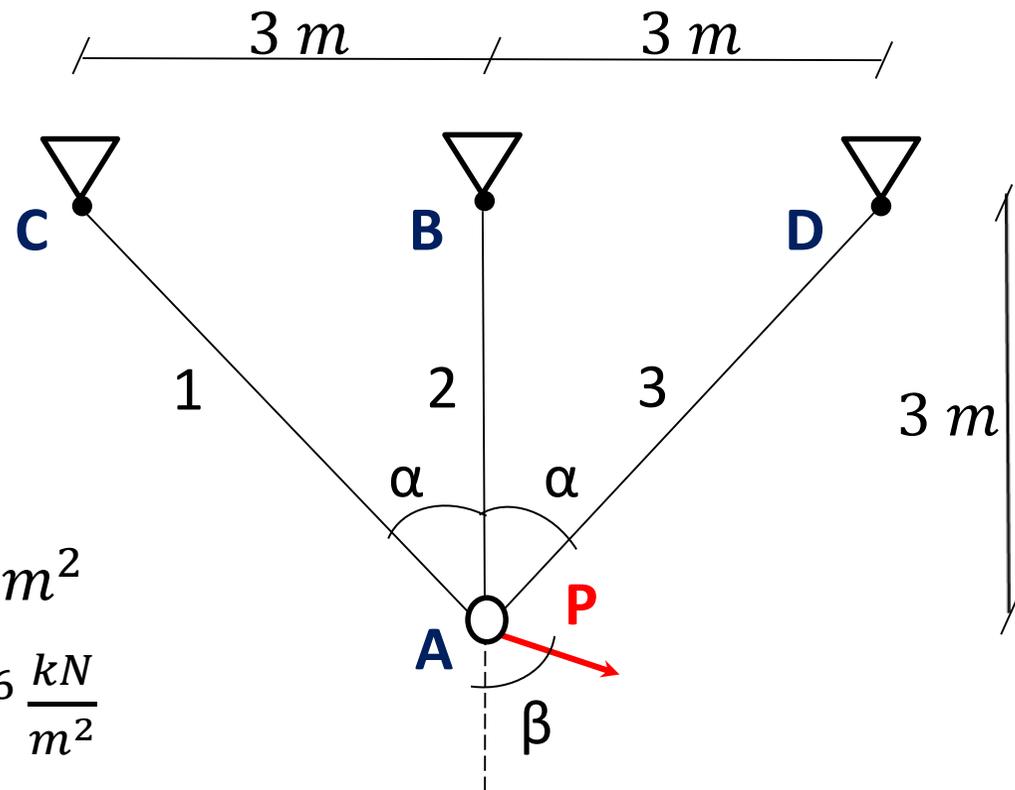
$$\beta = 60^\circ$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 200 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$L_2 = 3 \text{ m}$$

$$L_1 = L_3 = \sqrt{(3\text{m})^2 + (3\text{m})^2} = 4,24 \text{ m}$$





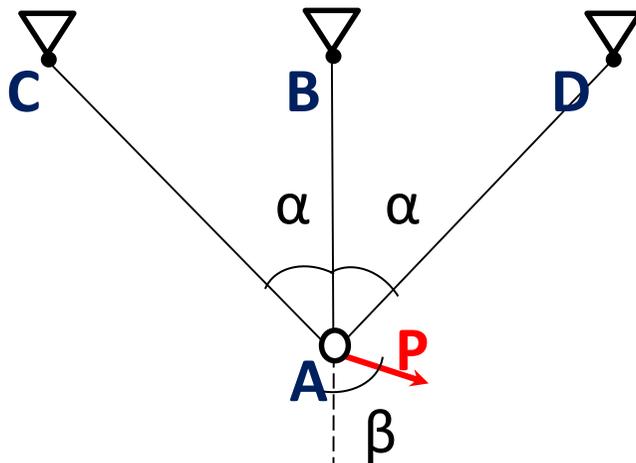
## ¿Qué tipo de sistema es?

$$\left. \begin{array}{l} n + 2 = 3 + 2 = 5 \\ n_v = 6 \end{array} \right\} \text{Grado de hiperestaticidad} = 1 \longrightarrow \text{Sistema Hiperestático}$$

- Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio no van a ser suficientes
- Usaremos **compatibilidad de desplazamientos** como ecuación adicional

## ¿Qué condición de desplazamiento conocemos?

Los puntos de apoyos fijos tienen desplazamiento = 0



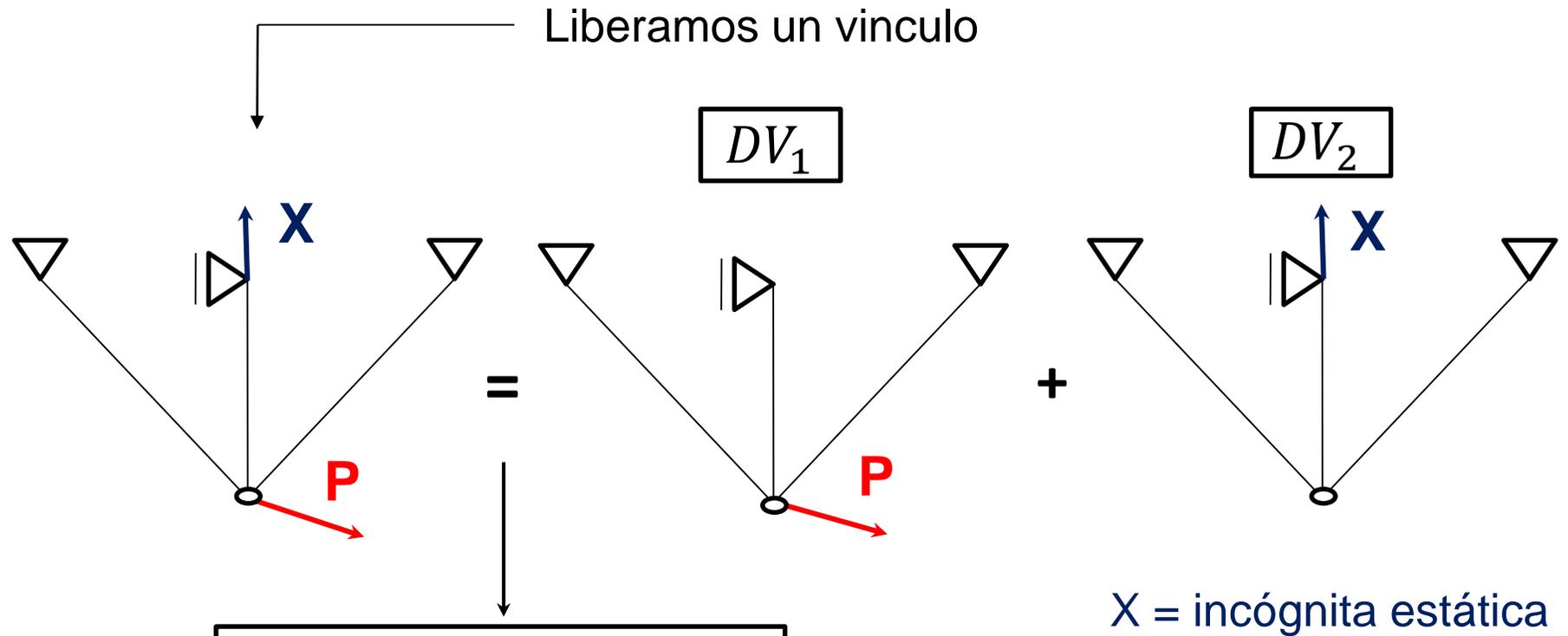
Elegimos el punto B

$$\eta_B = 0$$

Ecuación de compatibilidad adoptada



- Utilizamos el **Método de las incógnitas estáticas**



Por principio de superposición de efectos

$$\eta_B^H = \eta_B^P + \eta_B^X$$

$\eta_B^P = \text{desp. de } B \text{ por causa } P$   
 $\eta_B^X = \text{desp. de } B \text{ por causa } X$

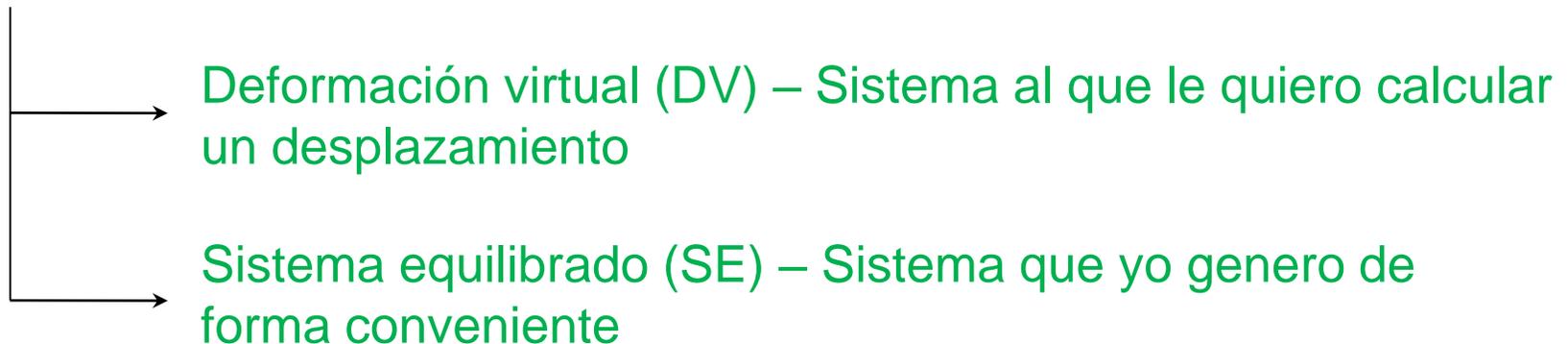


- Para calcular el desplazamiento del punto B utilizaremos el **Teorema de los Trabajos Virtuales**

$$\eta_B(+1) = \sum_i^n \frac{N_{ise} \cdot N_{idv} \cdot L_i}{E_i \cdot A_i}$$

Siendo  $i = n^\circ$  de barra

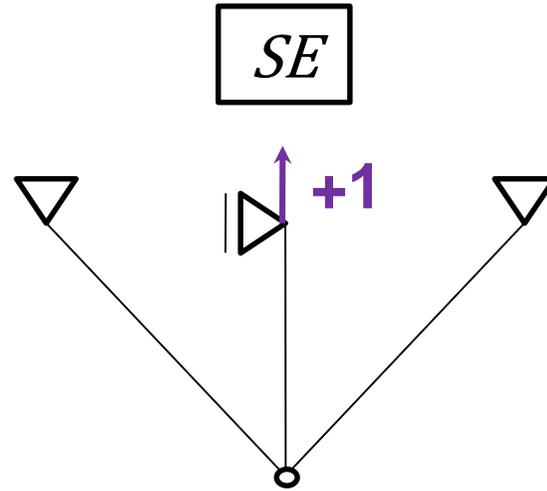
¿Qué necesitamos para usar TTV?





- **Planteamos el sistema equilibrado** →

Aplicamos una fuerza unitaria en el punto elegido



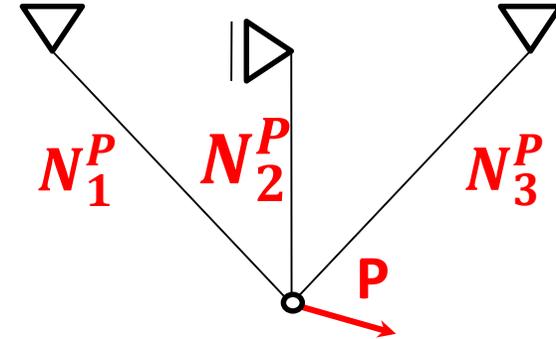
- Para el cálculo por TTV, necesitaremos los **valores de las normales** correspondientes a cada sistema ( $DV_1, DV_2, SE$ )
- Al ser sistemas isostáticos, las ecuaciones de equilibrio son suficientes para despejar las incógnitas



# Equilibrio de $DV_1$

$N_{ip}$  = Normal de barra  $i$  debida a carga  $P$

¡Observación!  $N_2^P = 0$   
La barra 2 no posee un vínculo que pueda equilibrar esfuerzo axial



## • Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = -N_1^P \cdot \sin \alpha + P \cdot \sin \beta + N_3^P \cdot \sin \alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad N_3^P = N_1^P - 122,5 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\sum F_y = N_1^P \cdot \cos \alpha - P \cdot \cos \beta + N_3^P \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

(1) en (2)  
y despejamos

$$N_1^P = 96,6 \text{ kN}$$

$$N_2^P = 0$$

$$N_3^P = -25,9 \text{ kN}$$

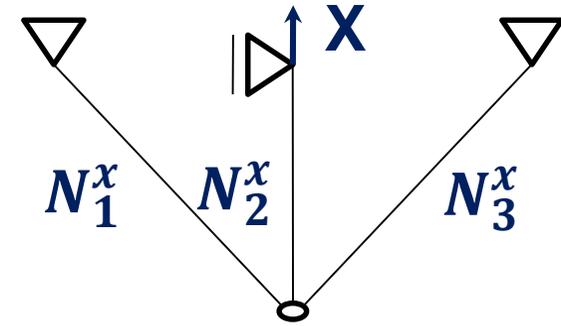


# Equilibrio de $DV_2$

$N_{ix}$  = Normal de barra  $i$  debida a carga  $X$

¡Observación!

$$N_2^x = X$$



- Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = -N_1^x \cdot \sin \alpha + N_3^x \cdot \sin \alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad N_3^x = N_1^x \quad (1) \quad \longrightarrow$$

Normales iguales por simetría

$$\sum F_y = N_1^x \cdot \cos \alpha + X + N_3^x \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

(1) en (2)  
y despejamos  $\longrightarrow$

$$N_1^x = -0,707X$$

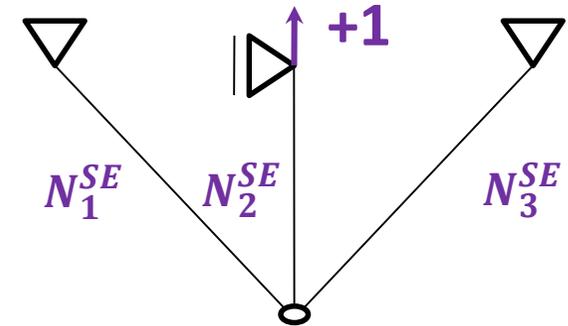
$$N_2^x = X$$

$$N_3^x = -0,707X$$



# Equilibrio de $SE$

$N_{ise}$  = Normal de barra  $i$  debida a carga unitaria



- El procedimiento es similar al caso anterior, resultando:

$$N_1^{SE} = -0,707$$

$$N_2^{SE} = 1$$

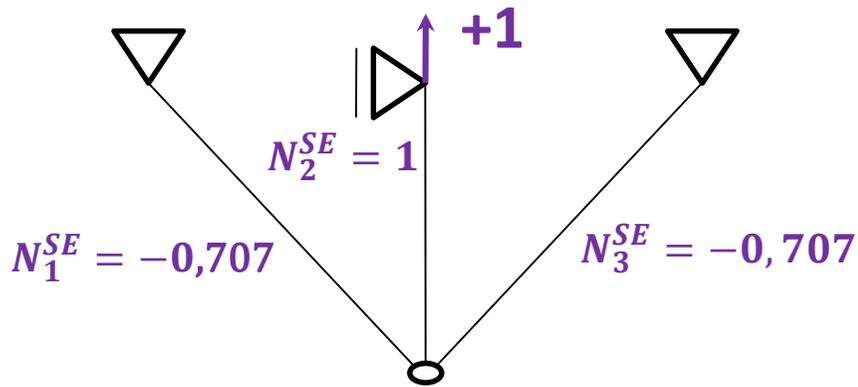
$$N_3^{SE} = -0,707$$

- Con los datos obtenidos, calculamos el **desplazamiento de B debido a P y a X usando TTV**

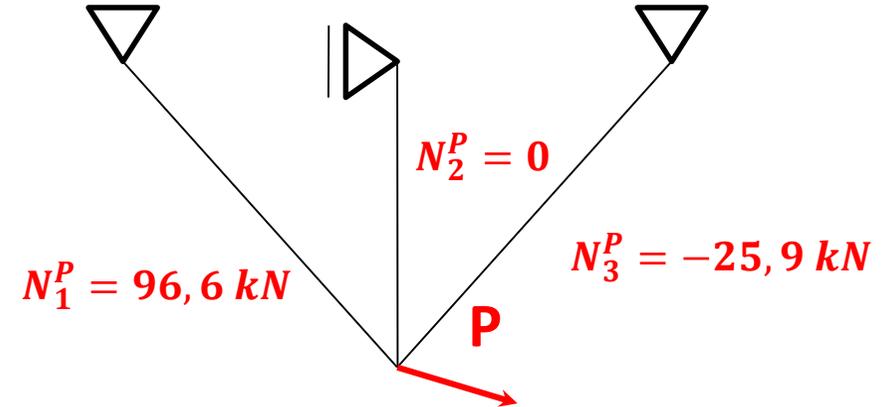


- Desplazamiento debido a P

*SE*



*DV<sub>1</sub>*



$$\eta_p = \frac{N_1^{SE} \cdot N_1^P \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2^{SE} \cdot N_2^P \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{N_3^{SE} \cdot N_3^P \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$

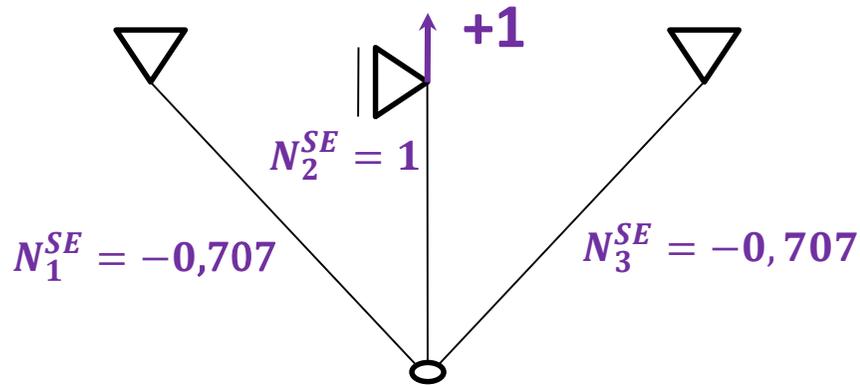
$$= \frac{(-0,707) \cdot (96,6 \text{ kN}) \cdot 4,24 \text{ m}}{200 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} + \frac{(1) \cdot (0) \cdot 3 \text{ m}}{200 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} + \frac{(-0,707) \cdot (-25,9 \text{ kN}) \cdot 4,24 \text{ m}}{200 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$\eta_p = -2,12 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

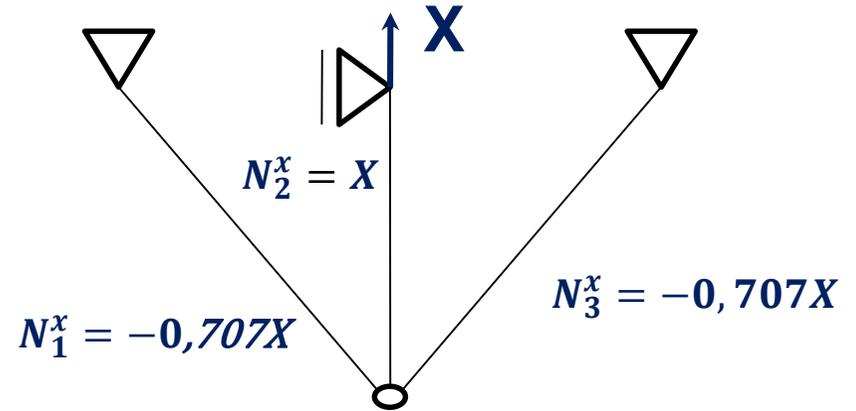


- Desplazamiento debido a X

*SE*



*DV<sub>2</sub>*



$$\eta_x = \frac{N_1^{SE} \cdot N_1^x \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2^{SE} \cdot N_2^x \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{N_3^{SE} \cdot N_3^x \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$

$$= \frac{(-0,707) \cdot (-0,707X) \cdot 4,24m}{200 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}m^2} + \frac{(1) \cdot (X) \cdot 3m}{200 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}m^2} + \frac{(-0,707) \cdot (-0,707X) \cdot 4,24m}{200 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}m^2}$$

$$\eta_x = 7,24 \cdot 10^{-5} X \frac{m}{kN}$$



- Por compatibilidad,

$$\begin{array}{l} \eta_B = 0 \\ \eta_p + \eta_x = 0 \end{array} \longrightarrow -2,12 \cdot 10^{-3} m + 7,24 \cdot 10^{-5} X \frac{m}{kN} = 0$$

$$X = 29,3 \text{ kN}$$

- Por **superposición de efectos**, las **normales en el hiperestático** resultan ser la suma de las normales en los isostáticos  $DV_1$  y  $DV_2$

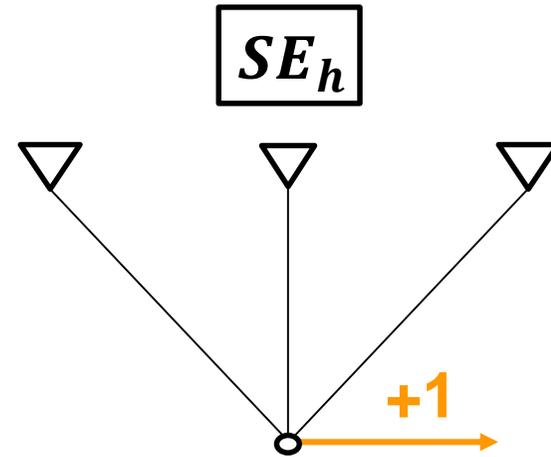
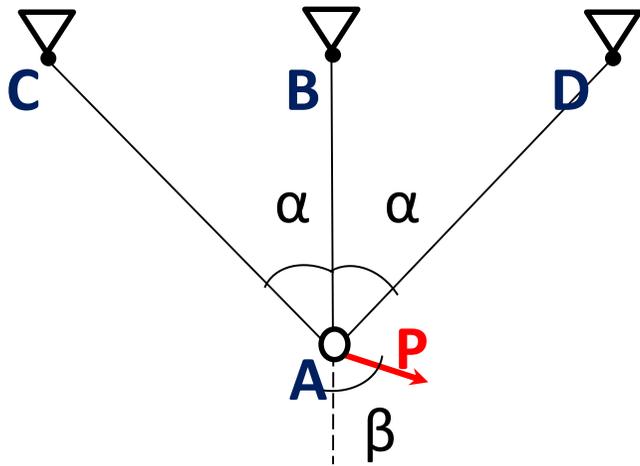
$$N_1 = N_1^P + N_1^x = 96,6 \text{ kN} - 0,707 \cdot 29,3 \text{ kN} = 75,9 \text{ kN}$$

$$N_2 = N_2^P + N_2^x = 0 + 29,3 \text{ kN} = 29,3 \text{ kN}$$

$$N_3 = N_3^P + N_3^x = -25,9 \text{ kN} - 0,707 \cdot 29,3 \text{ kN} = -46,6 \text{ kN}$$



- Resuelto el hiperestático, si quiero calcular el **desplazamiento horizontal** del punto A, como proponen hacer?

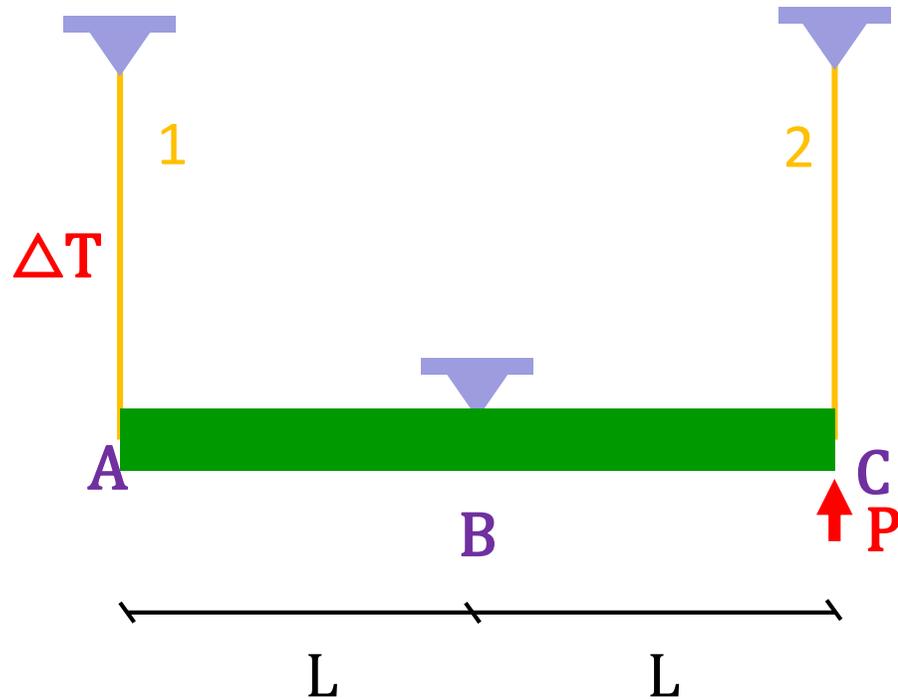


Como equilibrio el SE?

El sistema equilibrado tiene que solo estar en equilibrio, no tiene que cumplir con compatibilidad de deformaciones, y por lo tanto puedo elegir cualquiera de las infinitas opciones de equilibrio que tiene el hiperestático.



## Ejercicio 3:



- Calcular esfuerzos y tensiones en las barras 1 y 2
- Corrimiento en los puntos A, B y C

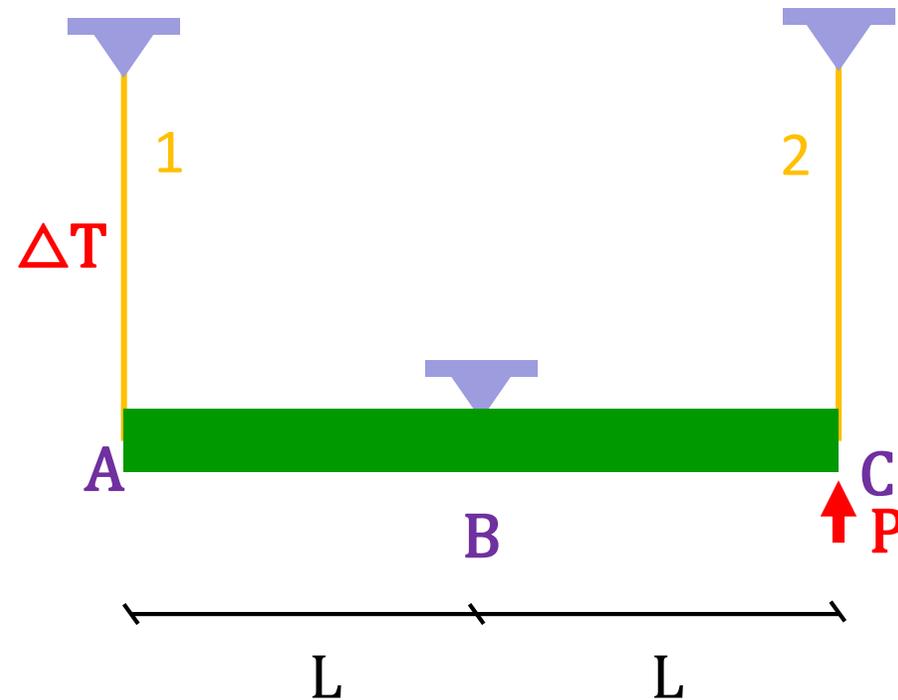
Datos:

$$A_1 = 7 \text{ cm}^2 \quad A_2 = 5 \text{ cm}^2 \quad L_1 = 2 \text{ m} \quad L_2 = 2 \text{ m} \quad L = 2 \text{ m}$$

$$\Delta T = 10 \text{ }^\circ\text{C} \quad P = 20 \text{ kN} \quad \lambda = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} \quad E = 200000 \text{ MPa} \quad \mu = 0.25$$



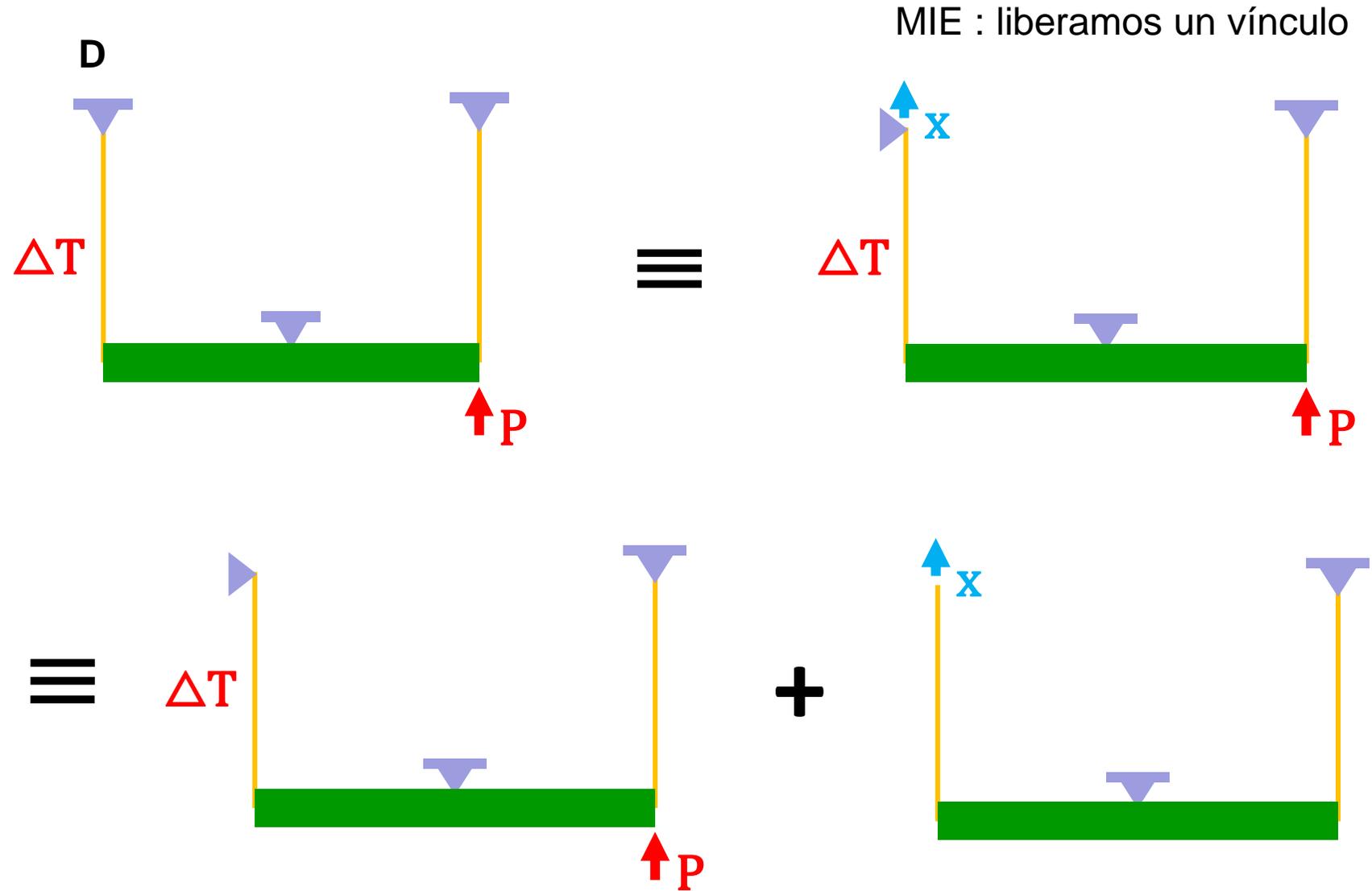
¿Qué podemos saber sin hacer cuentas?

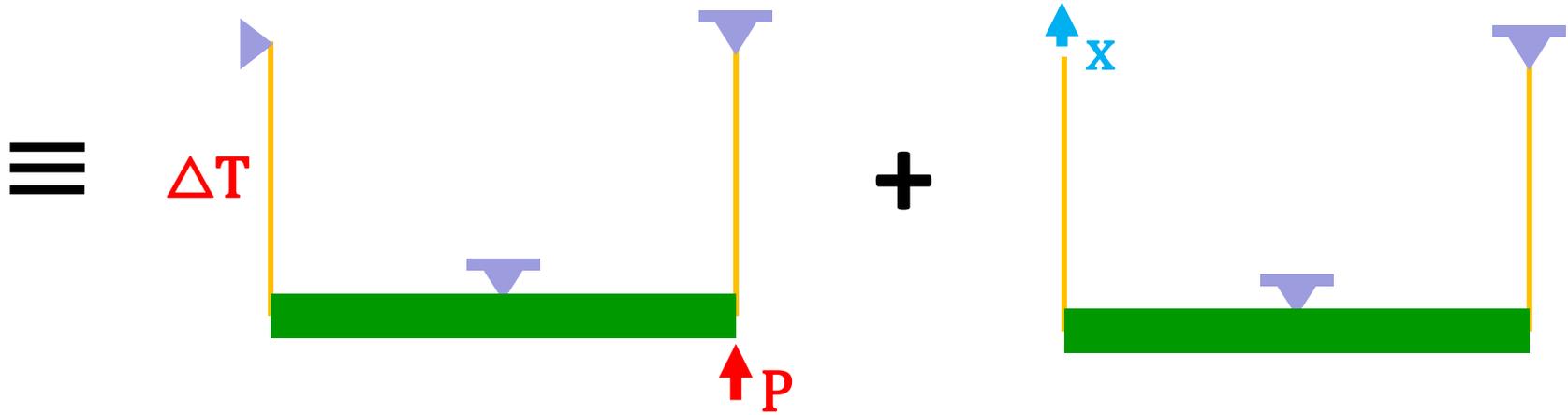




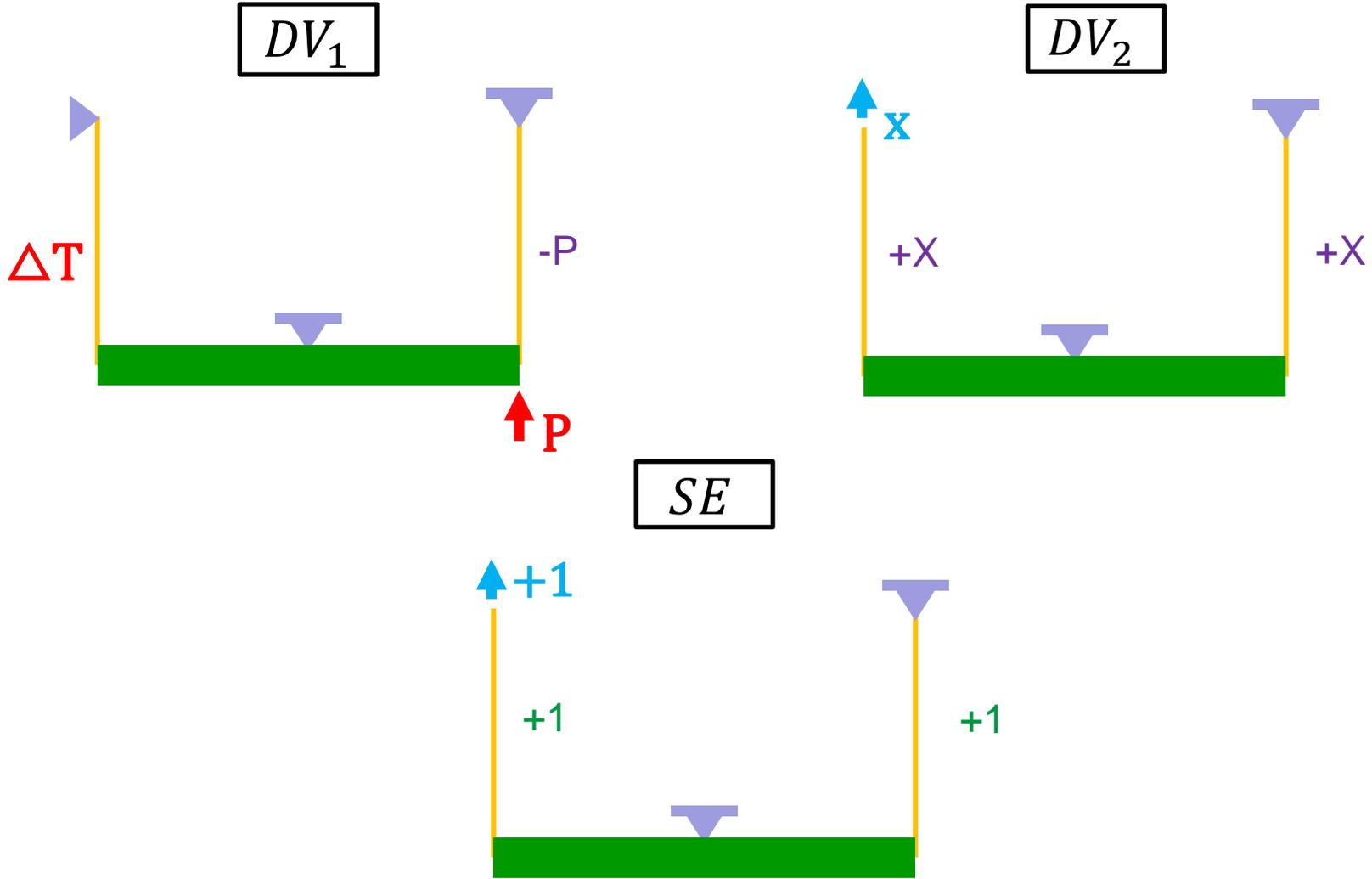
# a) Esfuerzos y tensiones en las barras

Resolución por MIE y TTV





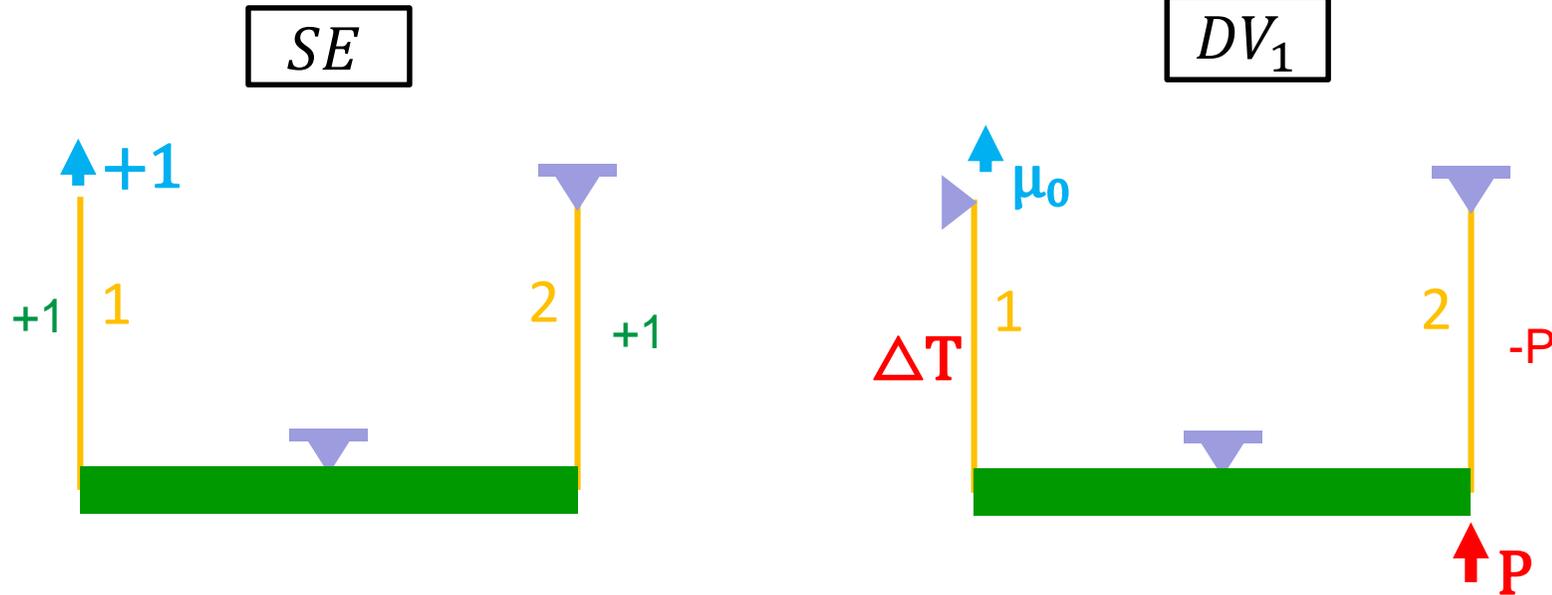
$$\eta_D = \eta_{P, \Delta T}^D + \eta_x^D$$



$$\mu_o = \sum_{b=1}^n \int N^{SE} dn^{DV} = \int \frac{N^{SE} N^{DV}}{EA} dx + \int N^{SE} \cdot \Delta T \cdot \lambda dx$$



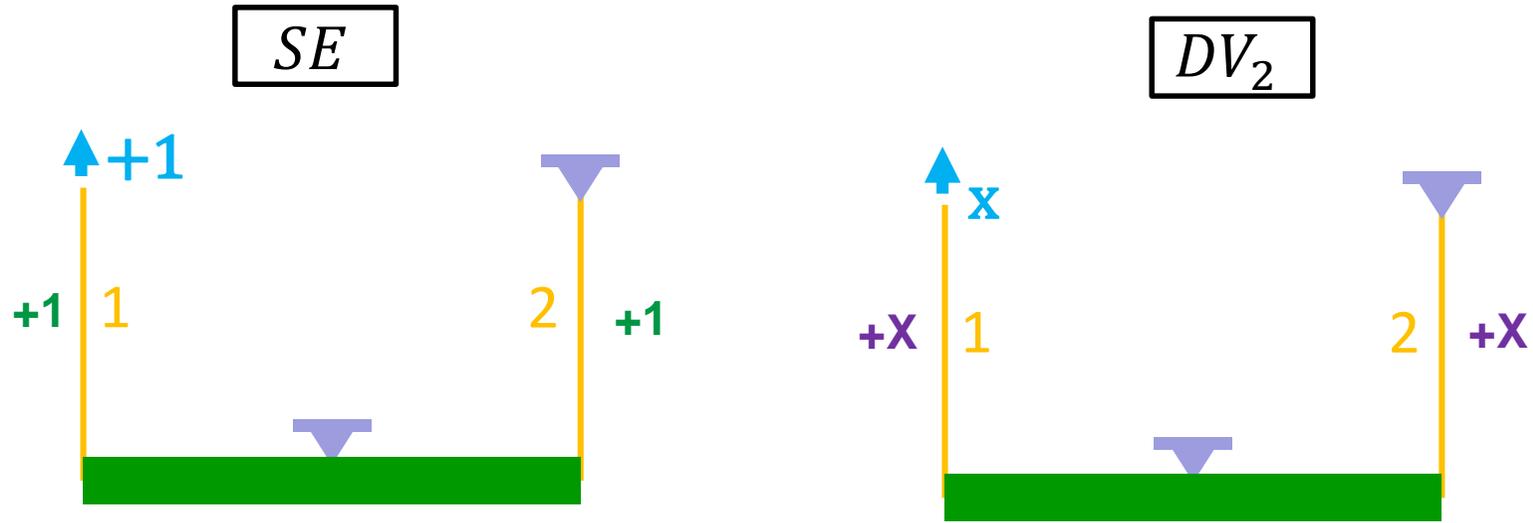
- Desplazamiento debido a las cargas



$$\eta_{P,\Delta T}^D = \frac{(+1) \cdot (-P) \cdot L_2}{E \cdot A_2} + (+1) \cdot \Delta T \cdot \lambda \cdot L_1 = -2 \cdot 10^{-4} m$$



- Desplazamiento debido a X



$$\eta_x^D(x) = \frac{(+1) \cdot x \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \frac{(+1) \cdot x \cdot L_2}{E \cdot A_2}$$



- Ecuación de compatibilidad y superposición de efectos

$$0 = \eta_{P,\Delta T}^D + \eta_x^D$$

$$0 = \frac{(+1) \cdot x \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \frac{(+1) \cdot x \cdot L_2}{E \cdot A_2} + \frac{(+1) \cdot (-P) \cdot L_2}{E \cdot A_2} + (+1) \cdot \Delta T \cdot \lambda \cdot L_1$$

➔  $x = 5.833 \text{ kN}$

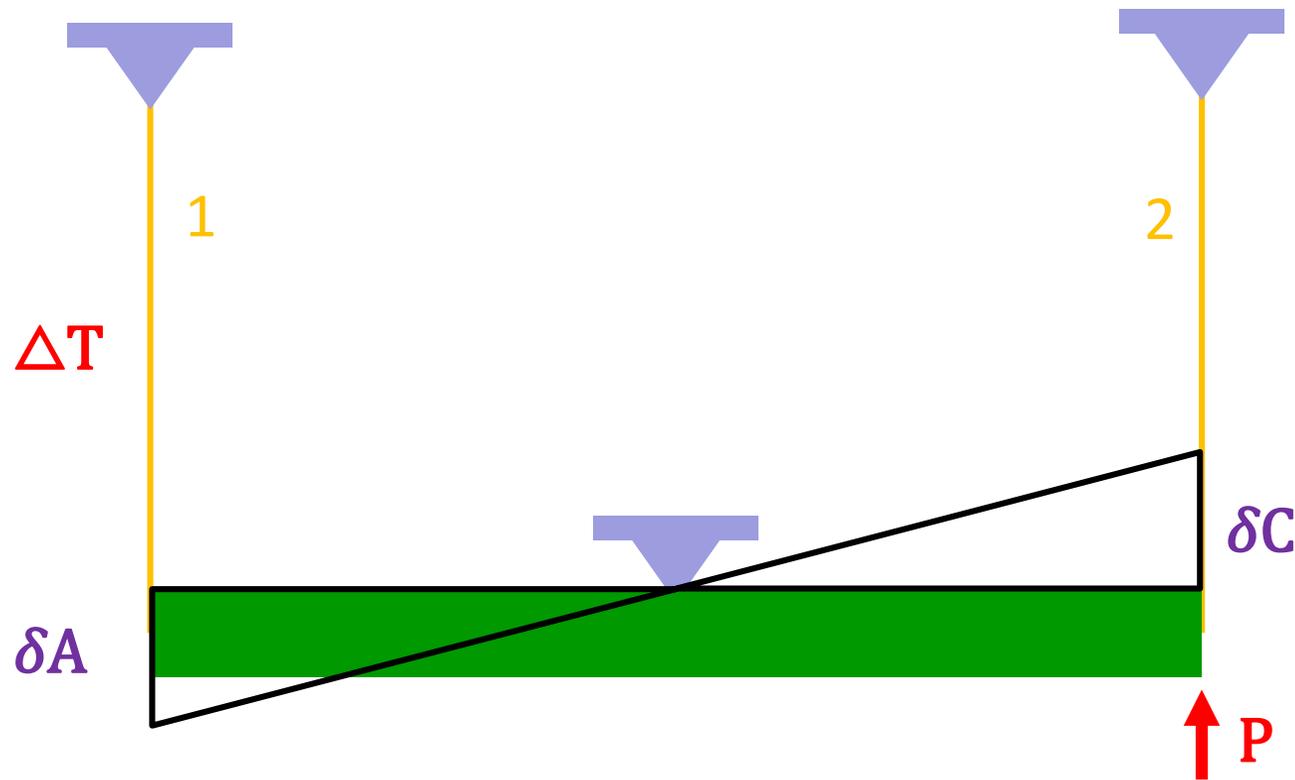
$$N_1 = x = 5.833 \text{ kN}$$

$$N_2 = x - P = -14.167 \text{ kN}$$



# a) Esfuerzos y tensiones en las barras

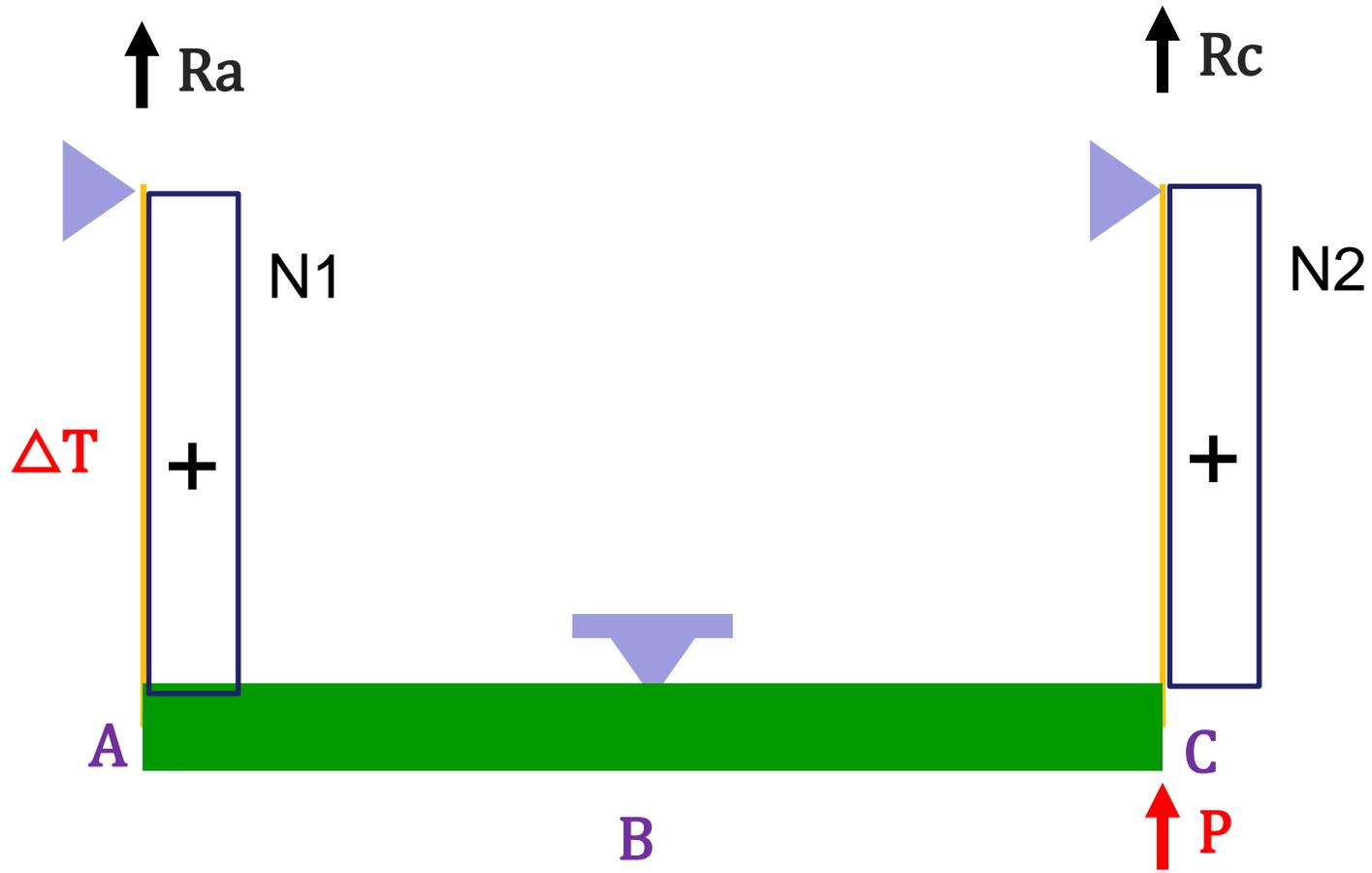
Resolución por inspección



$$\delta_A = -\delta_C$$

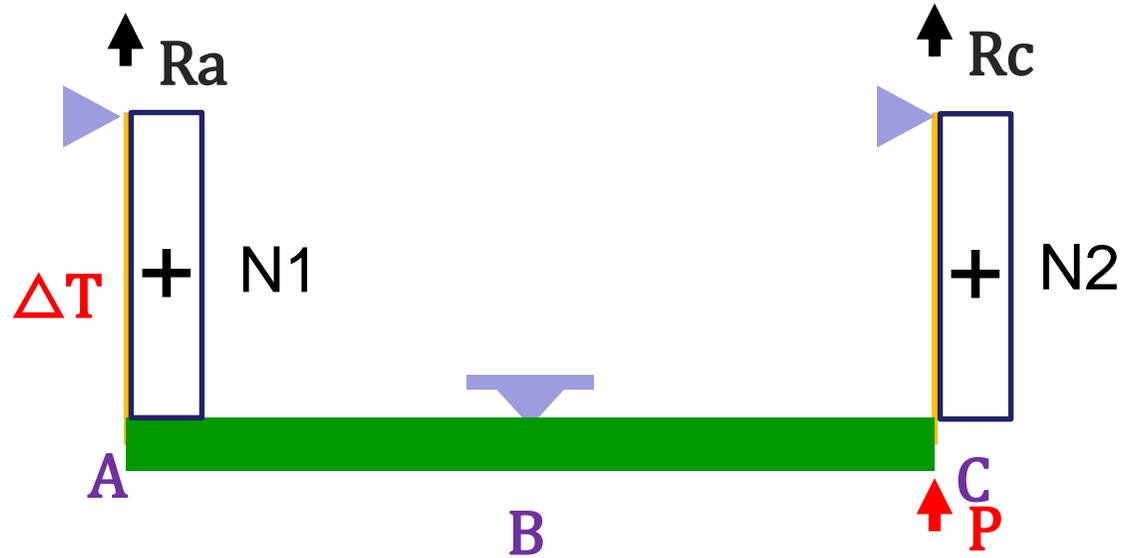


Proponemos un equilibrio posible:





# Resolución del hiperestático por inspección:



Ecuación de equilibrio:  
Momentos respecto de B

$$N_1 \cdot L - N_2 \cdot L = P \cdot L \quad \Longrightarrow \quad N_1 = P + N_2$$

Ecuación de compatibilidad :  
Desplazamientos de cada punto

$$\delta_A = \Delta L_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \Delta T \cdot \lambda \cdot L_1$$

$$\delta_C = \Delta L_2 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E \cdot A_2}$$



Reemplazando los términos:

$$\delta_A = -\delta_C \quad \frac{N_1 \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \Delta T \cdot \lambda \cdot L_1 = \frac{-N_2 \cdot L_2}{E \cdot A_2}$$

$$\frac{(P + N_2) \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \Delta T \cdot \lambda \cdot L_1 = \frac{-N_2 \cdot L_2}{E \cdot A_2}$$

$$\frac{P \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \Delta T \cdot \lambda \cdot L_1 = \frac{-N_2 \cdot L_2}{E \cdot A_2} - \frac{N_2 \cdot L_1}{E \cdot A_1}$$

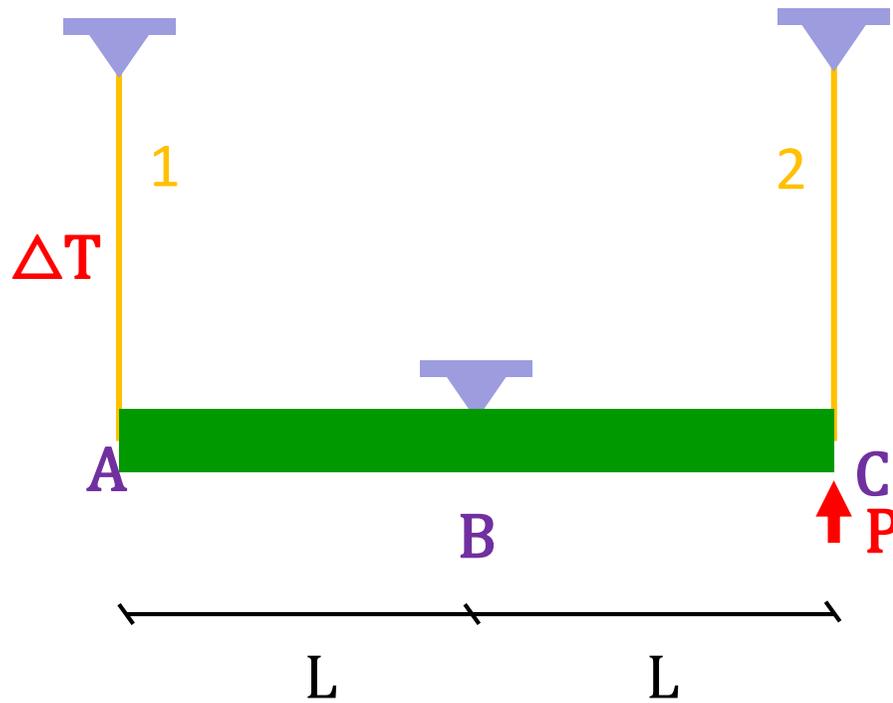
$$\frac{P \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \Delta T \cdot \lambda \cdot L_1 = N_2 \left( \frac{-L_2}{E \cdot A_2} - \frac{L_1}{E \cdot A_1} \right)$$

$$N_2 = \frac{\frac{P \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \Delta T \cdot \lambda \cdot L_1}{\frac{-L_2}{E \cdot A_2} - \frac{L_1}{E \cdot A_1}} = -14.167 \text{ kN}$$

$$N_1 = P + N_2 = 5.833 \text{ kN}$$



## a) Corrimientos en A, B y C



$$\delta_A = \frac{N_1 \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \Delta T \cdot \lambda \cdot L_1 = 0.283 \text{ mm}$$

$$\delta_B = 0 \text{ mm}$$

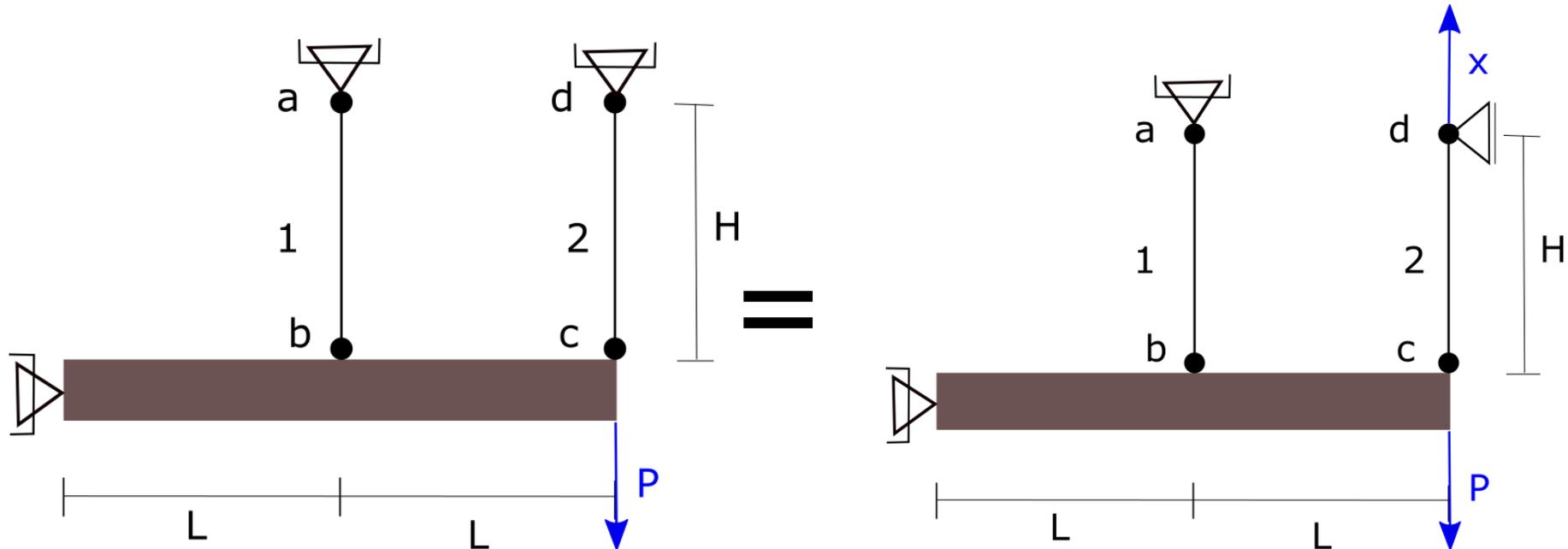
$$\delta_C = \frac{N_2 \cdot L_2}{E \cdot A_2} = -0.283 \text{ mm}$$

# Método de las Incógnitas Estáticas

## Teorema de los Trabajos Virtuales



**Ejercicio 4:** Calcular los esfuerzos normales de cada barra

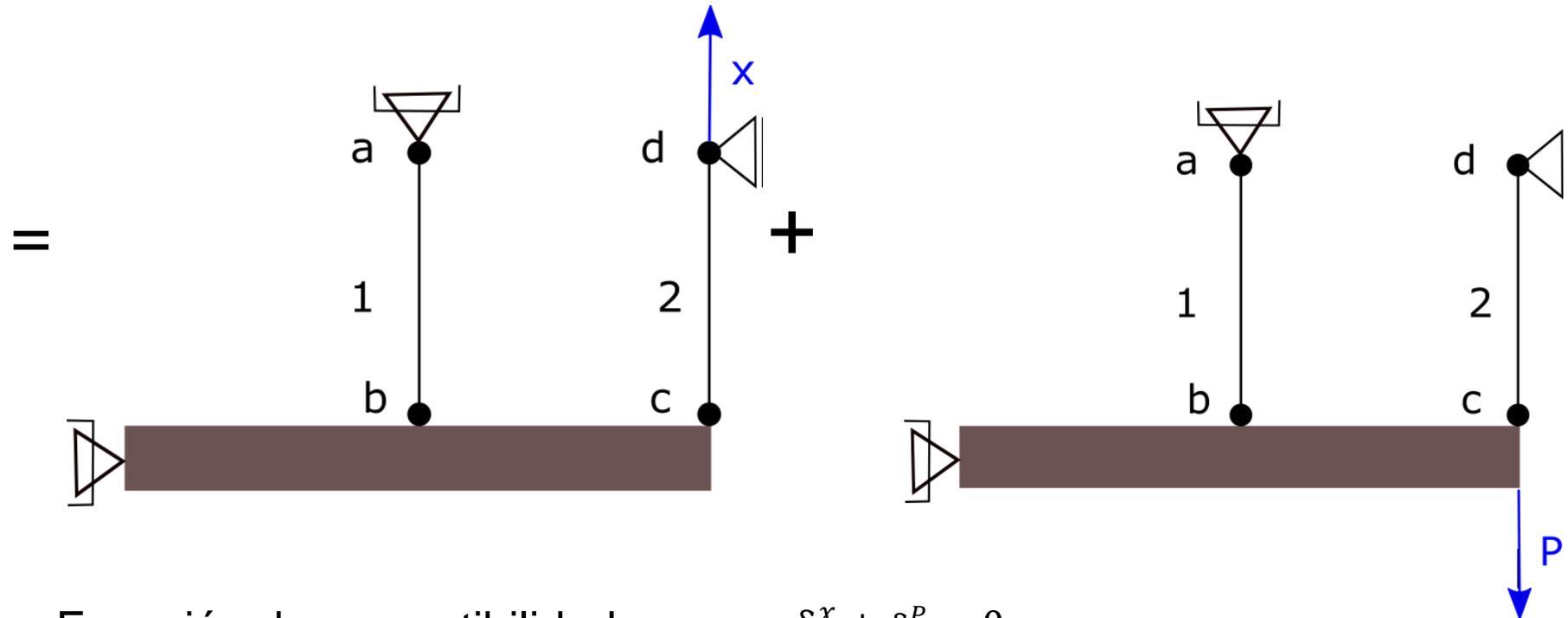


Reemplazo el vínculo vertical en “D” poniendo en evidencia la reacción de vínculo “x”. Al igual que antes requiero dos sistemas de ecuaciones:

- 1) Ecuaciones de equilibrio
- 2) Compatibilidad de deformaciones, que en este caso es que el punto “D” no se desplaza.



Divido al sistema anterior como la suma de dos sistemas, uno con las cargas y otro con la incógnita.



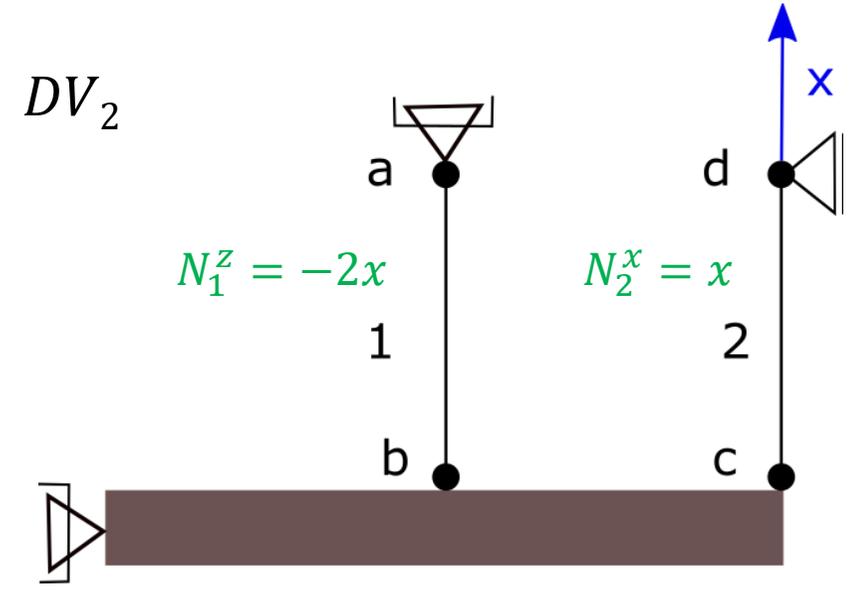
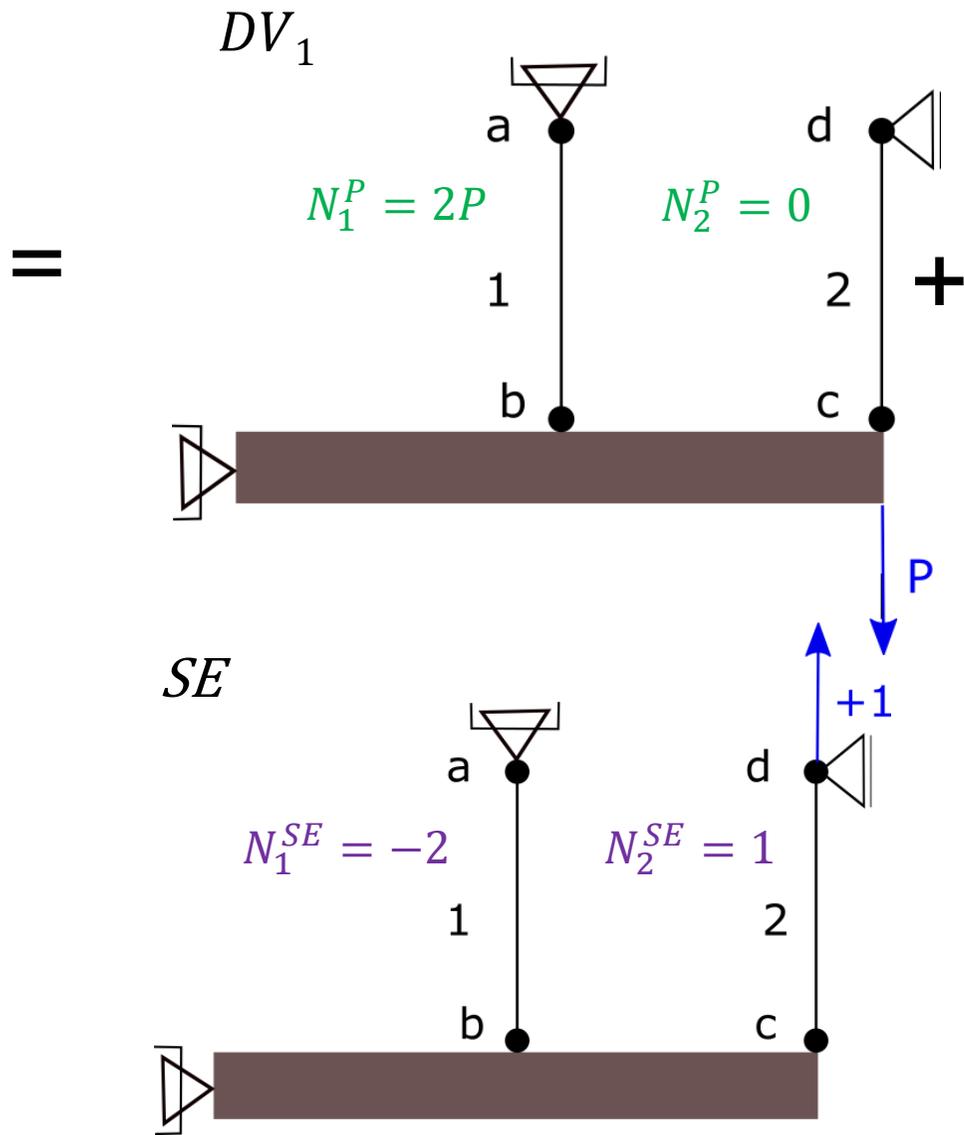
Ecuación de compatibilidad

$$\delta_d^x + \delta_d^P = 0$$

Tenemos ahora que proceder a calcular esos dos desplazamientos. Para ello tenemos dos opciones, usar inspección o usar el teorema de los trabajos virtuales.



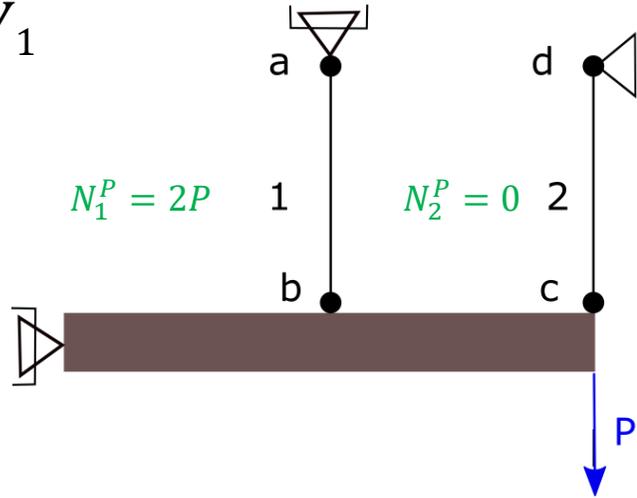
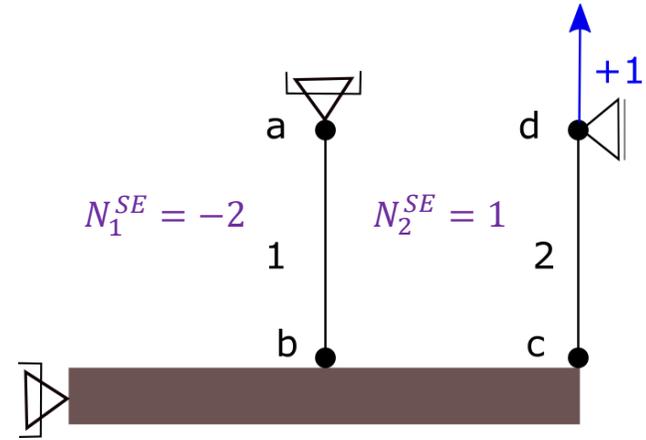
# Calculo de los desplazamientos utilizando el Teorema de los Trabajos Virtuales



$$\delta_d^H = 0 = \delta_d^P + \delta_d^x$$

 $\delta_P^d$ 

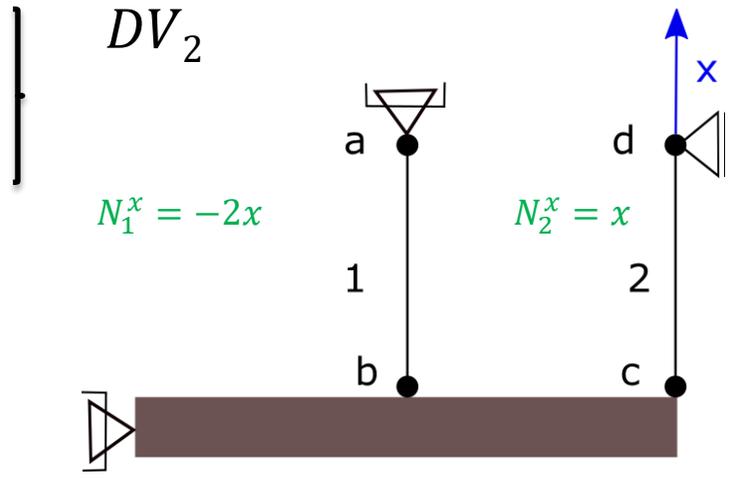
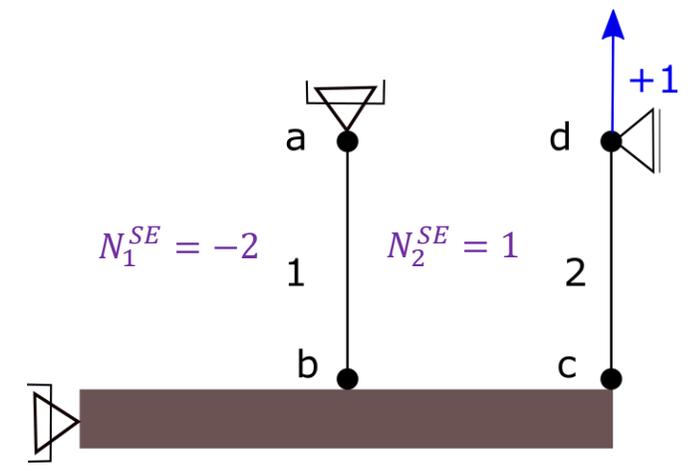
DV1  
SE

 $DV_1$  $SE$ 

$$(+1) \cdot \delta = \sum_{b=1}^n \int N^{SE} \cdot dn^{DV} = \sum \int \frac{N^{SE} \cdot N^{DV}}{E \cdot A} \cdot dx \quad \xrightarrow{N_i = cte} \quad (+1) \cdot \delta = \sum \frac{N^{SE} \cdot N^{DV} \cdot L}{E \cdot A}$$

$$(+1) \cdot \delta_P^d = N_1^{SE} \cdot \frac{N_1^P \cdot H}{A_1 \cdot E_1} + N_2^{SE} \cdot \frac{N_2^P \cdot H}{A_2 \cdot E_2} = (-2) \cdot \frac{2P \cdot H}{A_1 \cdot E_1} + (+1) \cdot \frac{0 \cdot H}{A_2 \cdot E_2}$$

$$\delta_P^d = -\frac{4P \cdot H}{A_1 \cdot E_1} \quad \xrightarrow{A_1 \cdot E_1 = A_2 \cdot E_2 = A \cdot E} \quad \boxed{\delta_P^d = -\frac{4P \cdot H}{A \cdot E}}$$

 $\delta_x^d$  $DV_2$   
 $SE$  $SE$ 

$$(+1) \cdot \delta = \sum \frac{N^{SE} \cdot N^{DV} \cdot L}{E \cdot A}$$

$$(+1) \cdot \delta_x^d = N_1^{SE} \cdot \frac{N_1^x \cdot H}{A_1 \cdot E_1} + N_2^{SE} \cdot \frac{N_2^x \cdot H}{A_2 \cdot E_2} = (-2) \cdot \frac{(-2x) \cdot H}{A_1 \cdot E_2} + (+1) \cdot \frac{(+x) \cdot H}{A_2 \cdot E_2}$$

$$\delta_x^d = \frac{4H \cdot x}{A_1 \cdot E_1} + \frac{H \cdot x}{A_2 \cdot E_2} \xrightarrow{A_1 \cdot E_1 = A_2 \cdot E_2 = A \cdot E} \boxed{\delta_x^d = \frac{5 \cdot H \cdot x}{A \cdot E}}$$

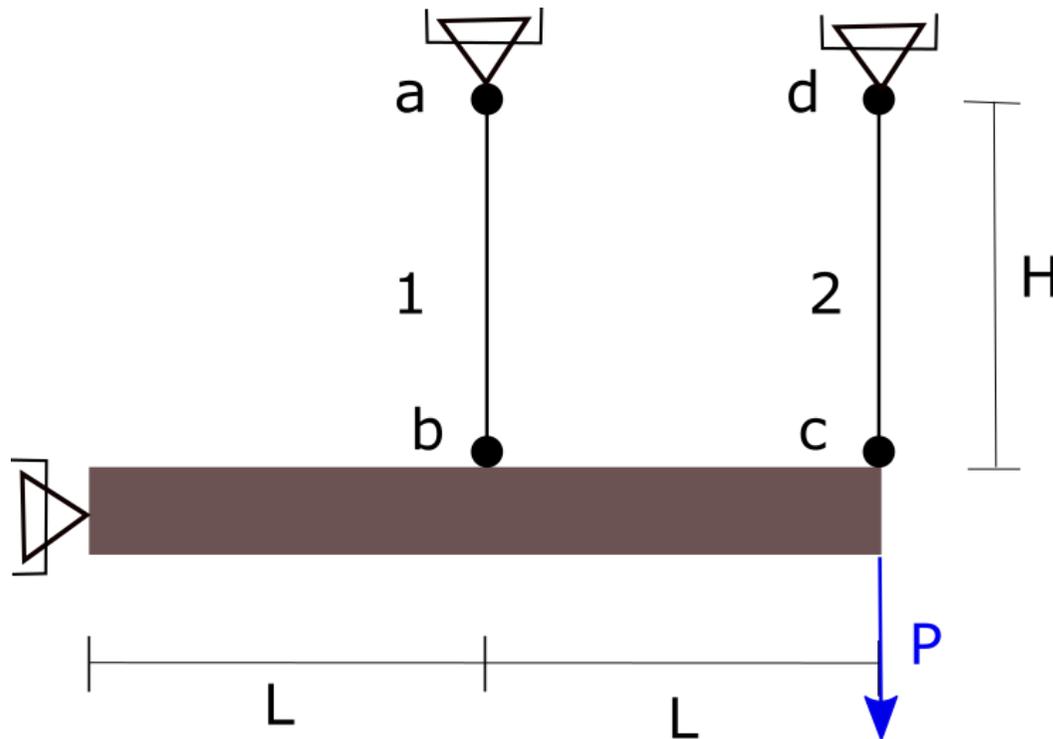


$$\delta_d^x + \delta_d^P = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{4 \cdot P \cdot H}{A \cdot E} + \frac{5 \cdot H \cdot x}{A \cdot E} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{5} \cdot P$$

Entonces

$$N_1^H = 2P - 2X = 2P - 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot P = \frac{2}{5} \cdot P$$

$$N_2^H = 0 + x = \frac{4}{5} \cdot P$$



$$N_1^H = \frac{2}{5} \cdot P$$

$$N_2^H = \frac{4}{5} \cdot P$$