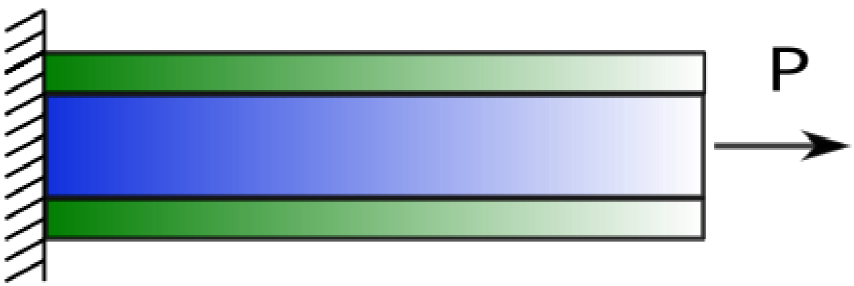
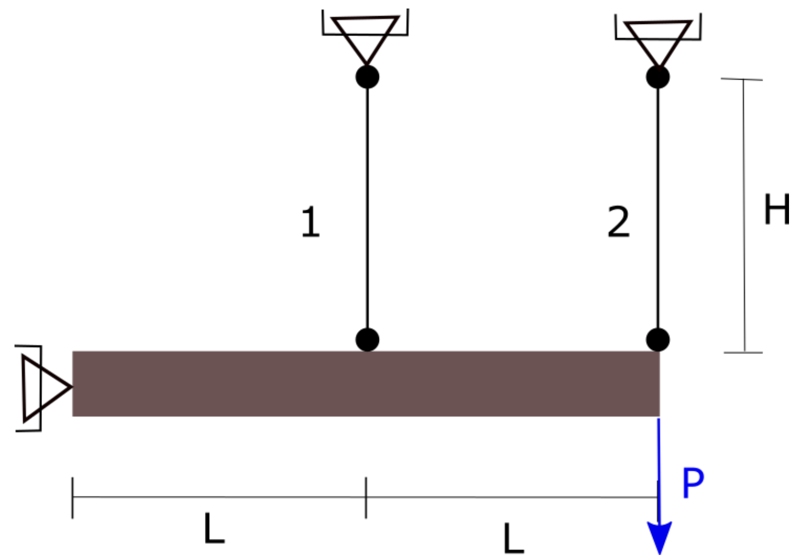
Solicitación Axil en Régimen Elástico

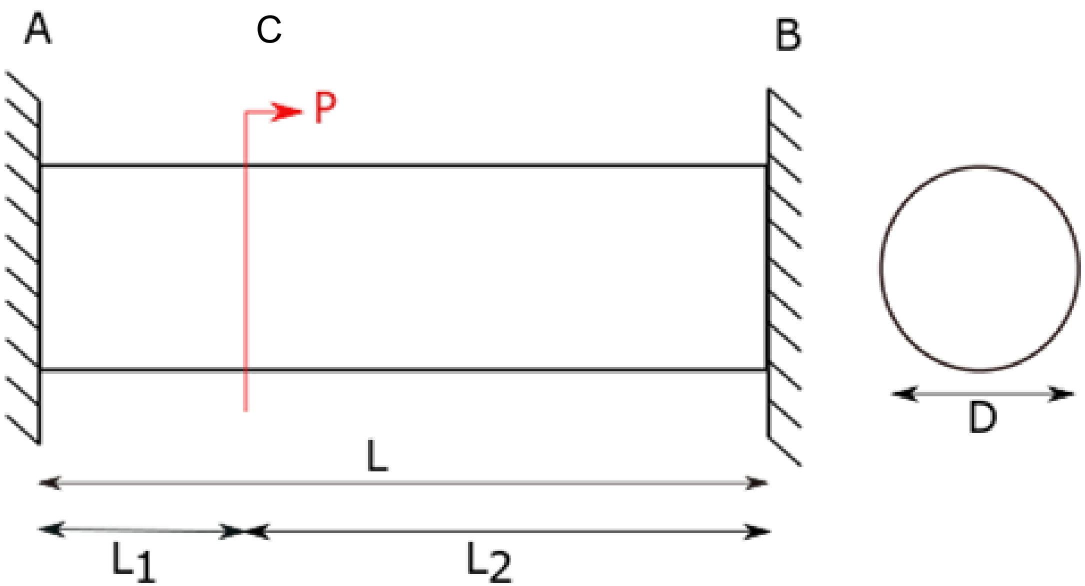




Manuela Medina – Constanza Ruffinelli – Tania Poletilo

Hiperestaticidad externa

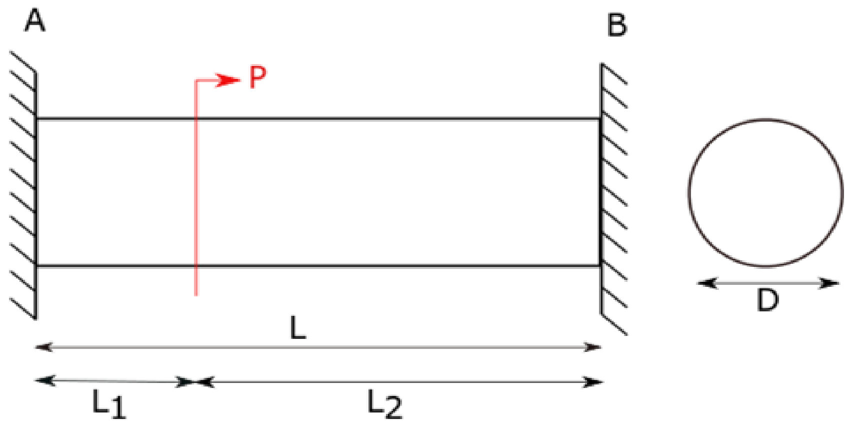
Ejercicio 1: Trazar los diagramas de esfuerzo axil, tensión, deformación y corrimiento



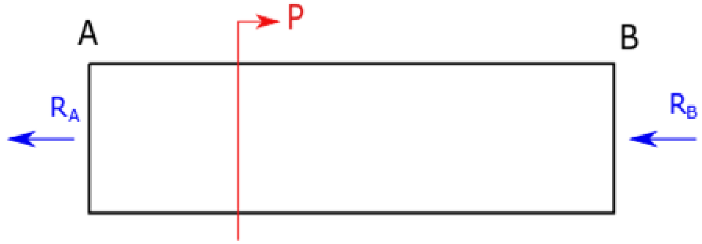
Datos:

$$D = 5\ cm$$
$$L = 7\ m$$
$$L_1 = 2\ m$$
$$L_2 = 5\ m$$
$$E = 100\ GPa$$
$$P = 100\ kN$$

Resolución:



1) Ecuación de Equilibrio



$$P = N_A - N_B$$

2) Ecuación de compatibilidad $\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$

$$\varepsilon_1 \cdot L_1 + \varepsilon_2 \cdot L_2 = 0$$

$$\frac{N_A}{E \cdot A} \cdot L_1 + \frac{N_B}{E \cdot A} \cdot L_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_A = -N_B \cdot \frac{L_2}{L_1}$$

(1) + (2) ⇒

$$P = N_A - N_B$$

$$N_A = -N_B \cdot \frac{L_2}{L_1}$$

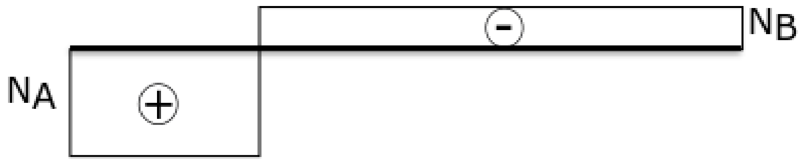
⇒

$$P = -N_B \cdot \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)$$

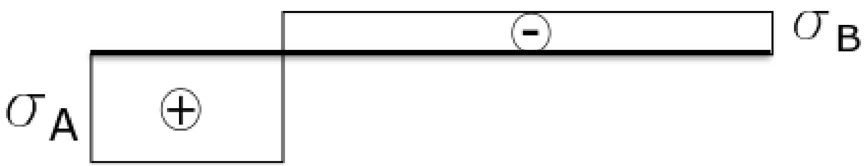
$$N_B := -P \cdot \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2}\right) = -28.57\,\mathrm{kN} \qquad N_A := P + N_B = 71.43\,\mathrm{kN}$$

¿Cómo son los diagramas de N, σ, ε, u?

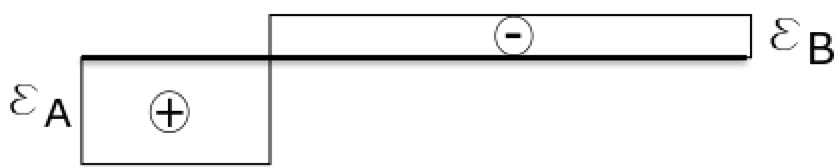
Diagramas



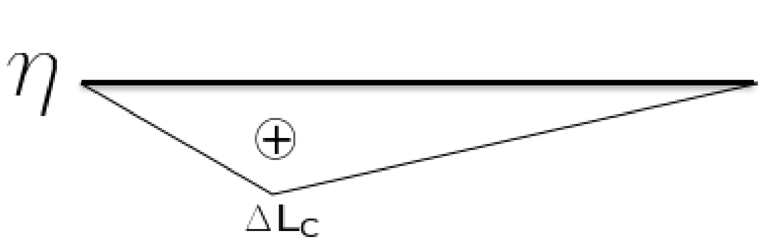
$$N_B := -P\cdot\left(\frac{L_1}{L_1+L_2}\right) = -28.57\,kN \qquad N_A := P + N_B = 71.43\,kN$$



$$\sigma_A := \frac{N_A}{A} = 3.64\,\frac{kN}{cm^2} \qquad \sigma_B := \frac{N_B}{A} = -1.455\,\frac{kN}{cm^2}$$



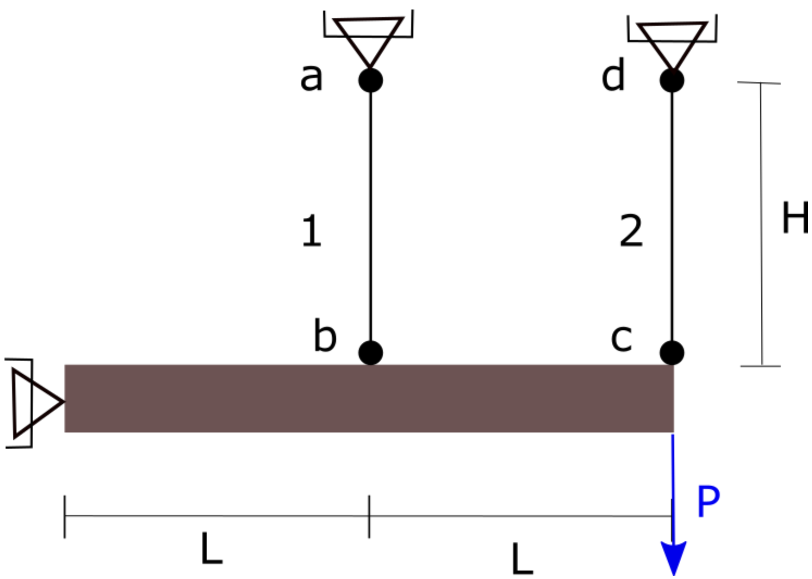
$$\varepsilon_A := \frac{\sigma_A}{E} = 3.638\times10^{-4} \qquad \varepsilon_B := \frac{\sigma_B}{E} = -1.455\times10^{-4}$$



$$\Delta L = \int \varepsilon\, dx$$

$$\Delta L_C := \varepsilon_A\cdot L_1 = 0.073\,cm$$

Ejercicio 2: Calcular esfuerzos en ambas barras y el desplazamiento del punto C



Datos:

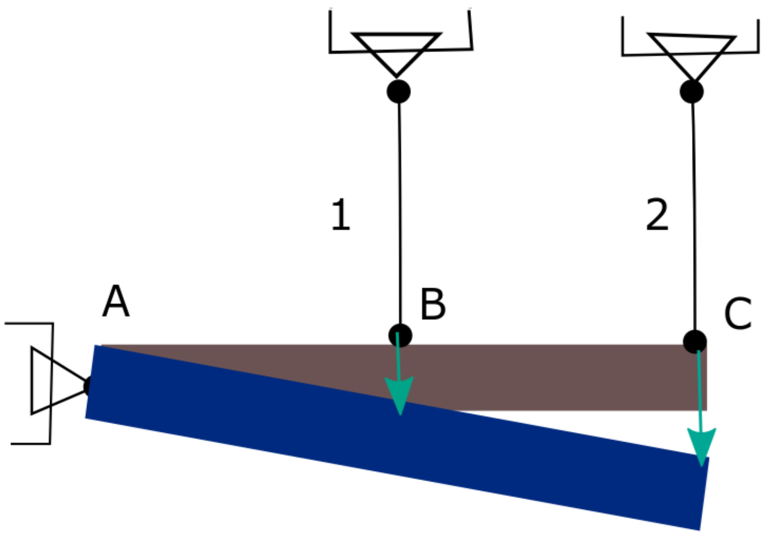
$L = 2\ m$ $H = 3\ m$ $A = 5\ cm^2$

$P = 100\ kN$ $E = 200\ GPa$

*Nota: barra gris es infinitamente rígida

Resolución por inspección

Proponer como deforma la estructura



Suponemos pequeñas deformaciones

Siempre bajo hipótesis de la linealidad cinemática (pequeños desplazamientos)

Por semejanza de triángulos podemos despejar el desplazamiento del punto C, que será dos veces el del punto B; $\delta_C=2\delta_B$

Las flechas turquesas muestran el desplazamiento

1) Ecuación de compatibilidad:

(suponiendo ambas normales positivas; tracción)

$$\Delta L_2 = 2\Delta L_1$$

$$N_2 \cdot \frac{H}{A_2 \cdot E_2} = 2N_1 \cdot \frac{H}{A_1 \cdot E_1}$$

Nota: $E_2 = E_1$ y $A_2 = A_1$

$$N_2 = 2N_1$$

2) Ecuación de Equilibrio

Planteando sumatoria de momentos desde A igual cero:

$$\sum M_a = N_1 \cdot L + N_2 \cdot 2L - P \cdot 2L = 0$$

$$N_1 = \frac{2}{5}P \xrightarrow[N_2 = 2 \cdot N_1]{\qquad\qquad} N_2 = \frac{4}{5}P$$

N_1 y N_2 positivos significa que se mantienen los signos propuestos, en este caso habíamos supuesto tracción en ambas barras

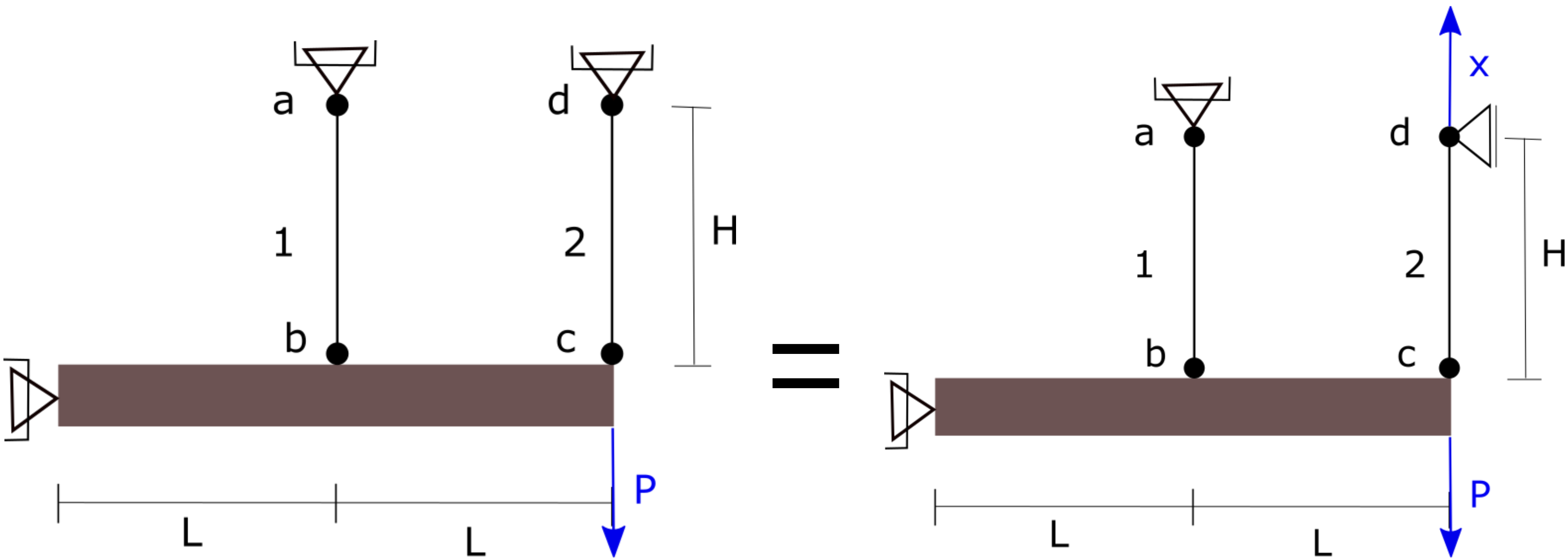
$$\boxed{N_1 = 40\,kN \quad \text{y} \quad N_2 = 80\,kN}$$

IMPORTANTE: La suma de ambas normales no da P, ya que hay reacción de vínculo en A

Para calcular el desplazamiento en C calculo:

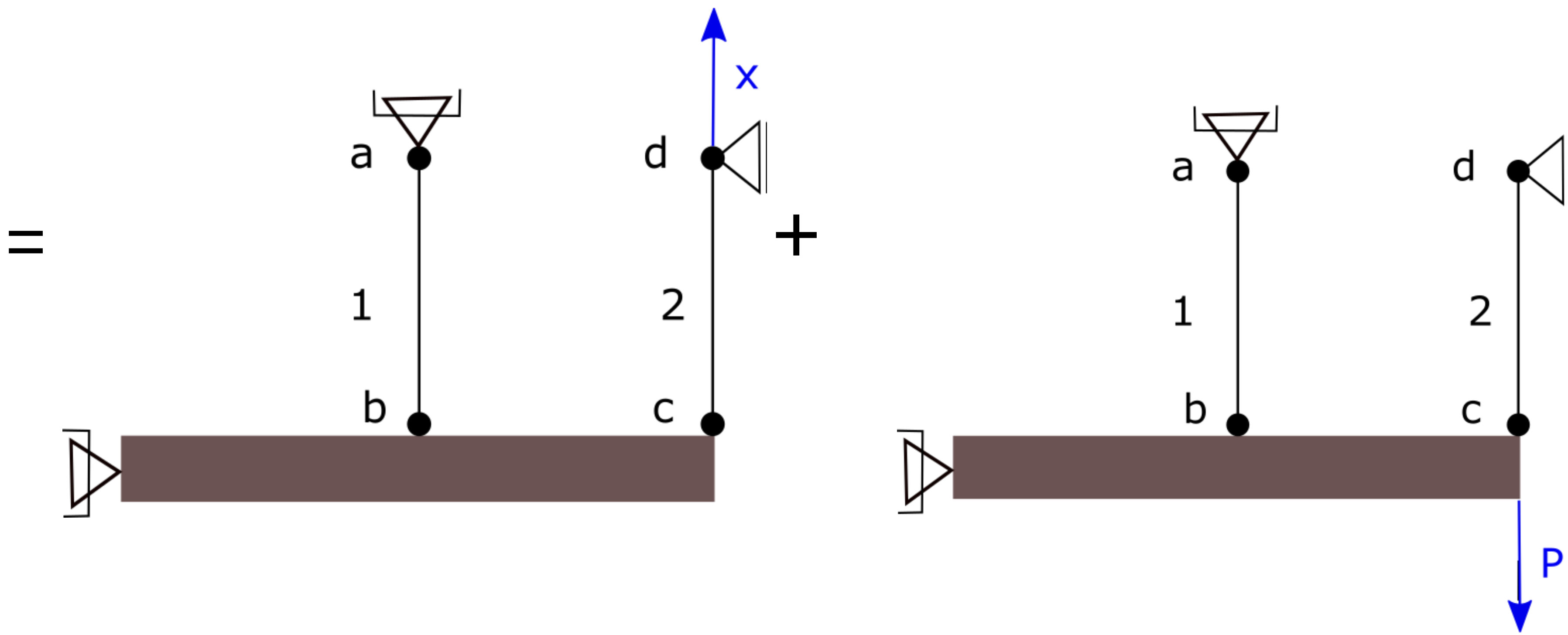
$$\boxed{\delta_c = \Delta L_2 = N_2 \cdot \frac{H}{A_2 \cdot E_2} = 2.4\,mm}$$

Método de las Incógnitas Estáticas



Reemplazo el vínculo vertical en “D” poniendo en evidencia la reacción de vínculo “x”. Al igual que antes requiero dos sistemas de ecuaciones, 1) Ecuaciones de equilibrio, y 2) Compatibilidad de deformaciones, que en este caso es que el punto “D” no se desplaza.

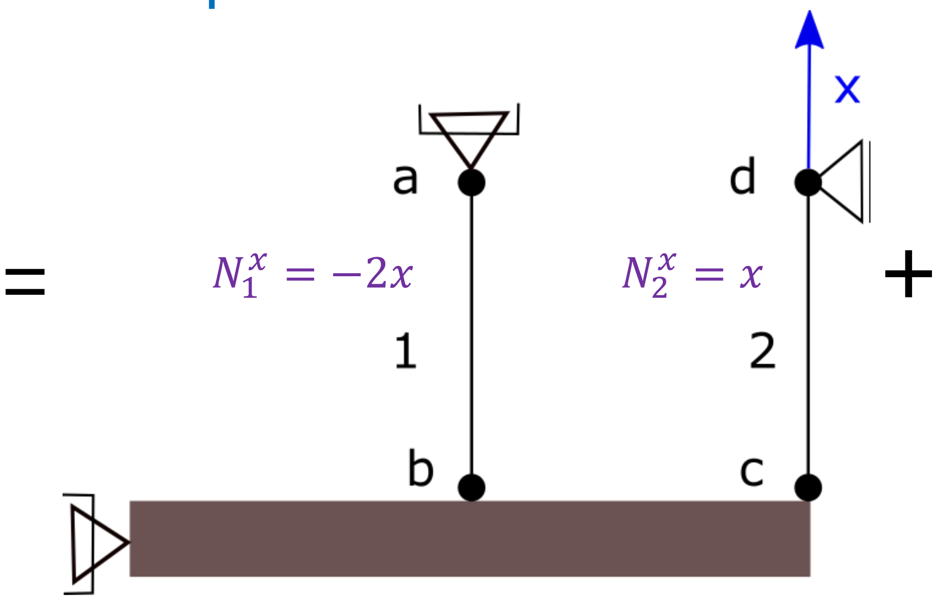
Divido al sistema anterior como la suma de dos sistemas, uno con las cargas y otro con la incógnita.

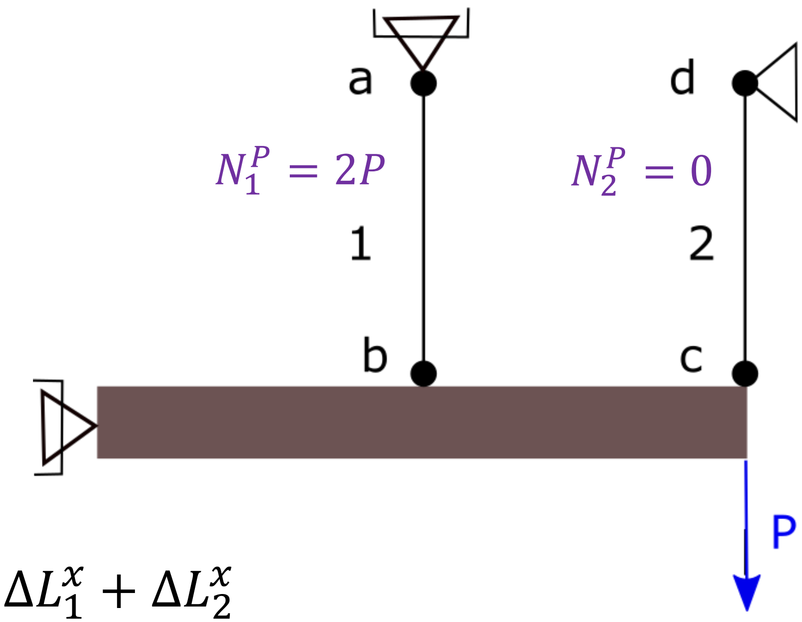


Ecuación de compatibilidad $\delta_d^x + \delta_d^P = 0$

Tenemos ahora que proceder a calcular esos dos desplazamientos. Para ello tenemos dos opciones, usar inspección o usar el teorema de los trabajos virtuales.

Por Inspección





Sistema “x”

$$\delta_d^x = \delta_c^x + \Delta L_2^x = -2\,\Delta L_1^x + \Delta L_2^x$$

$$\delta_d^x = -\frac{2 \cdot N_1^x \cdot H}{E \cdot A} + \frac{N_2^x \cdot H}{E \cdot A} = -2 \cdot \left(\frac{-2x \cdot H}{E \cdot A}\right) + \frac{x \cdot H}{E \cdot A} = 5 \cdot \frac{x \cdot H}{E \cdot A}$$

Sistema “P”

$$\delta_d^P = \delta_c^P = -2\Delta \mathrm{L}_1^{\mathrm{P}}$$

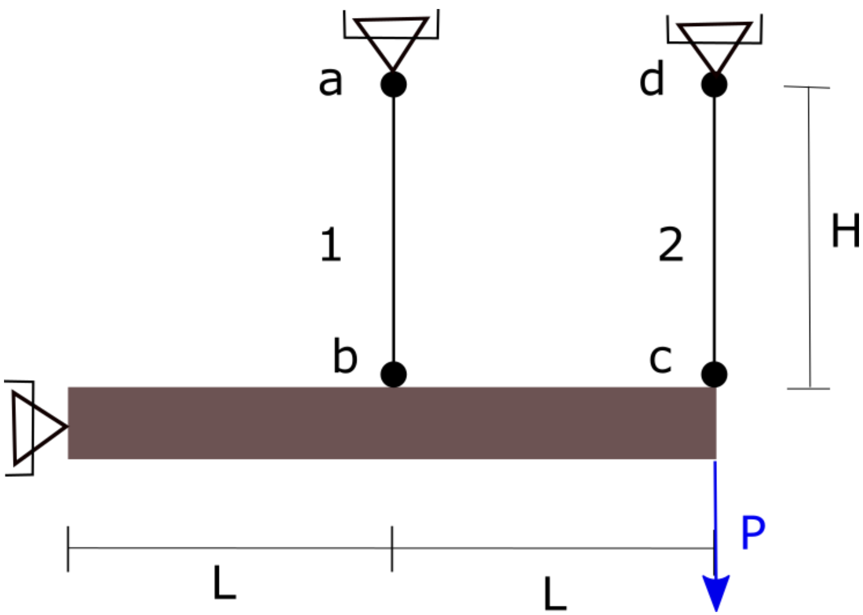
$$\delta_d^P = -\frac{2 \cdot N_1^P \cdot H}{E \cdot A} = -4 \cdot \frac{P \cdot H}{E \cdot A}$$

Entonces

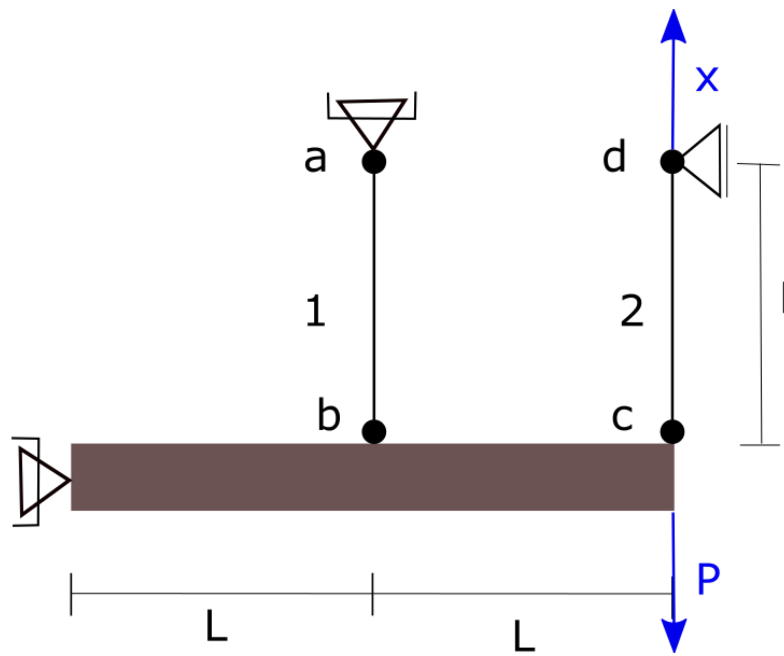
$$\delta_d^x + \delta_d^P = 0$$

$$5 \cdot \frac{x \cdot H}{E \cdot A} - 4 \cdot \frac{P \cdot H}{E \cdot A} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{5} \cdot P \qquad \boxed{x = 80kN}$$

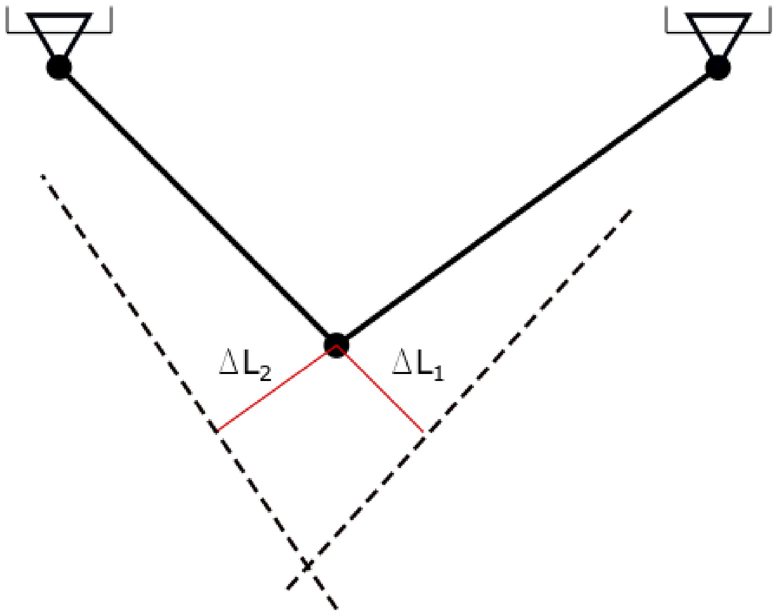
¿Que era x?

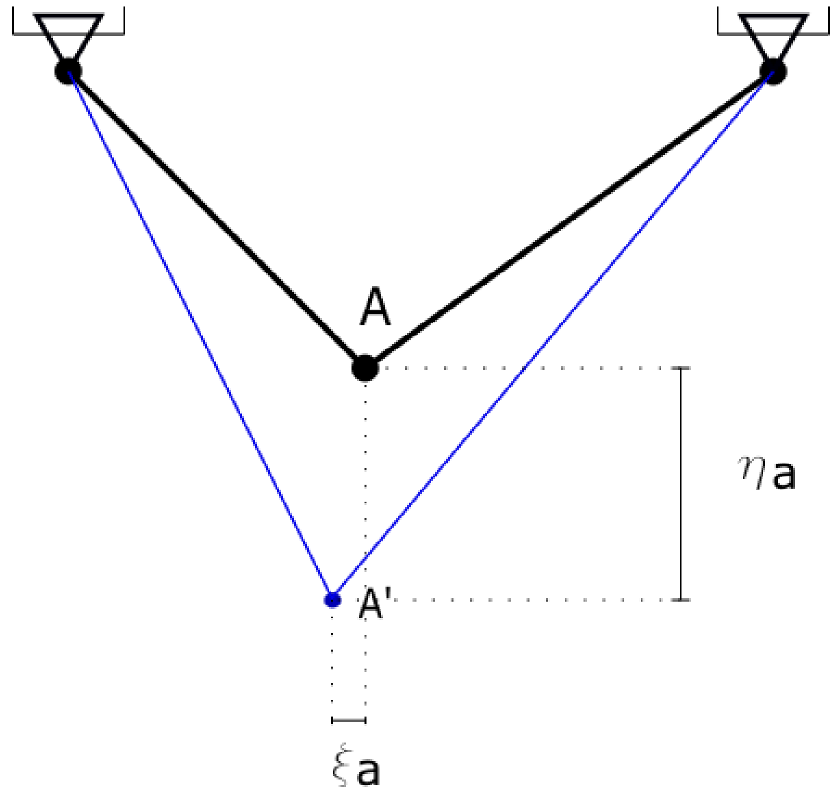


=



Método de Williot





Cada barra se alarga un cierto ΔL y se desplaza perpendicular a su eje. Ya que gira entorno a un punto fijo y es válida la hipótesis de pequeños desplazamientos.

Al estar vinculadas ambas barras deben desplazarse al mismo punto A'. Dicho punto será donde se intersecan ambos desplazamientos.