Introducción de trabajo:

El trabajo de las fuerzas exteriores se define como: $\sum_{j=0}^{n} \int_{l_i}^{l_f} P_j \, dL_j + \sum_{k=0}^{m} \int_{\theta_i}^{\theta_f} M_k \, d\theta_k$

Donde n y m depende de la cantidad de cargas sobre nuestra estructura.

El trabajo de las fuerzas interiores en barras (también llamada energía interna de deformación) se define como:

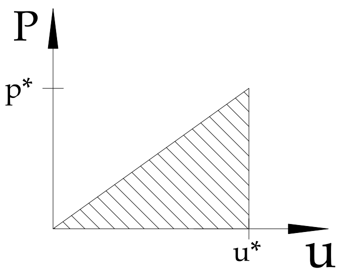
$$\int_{v_i}^{v_f} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_f} \sigma_x \, d\varepsilon_x \, dV + \int_{v_i}^{v_f} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_f} \sigma_y \, d\varepsilon_y \, dV + \int_{v_i}^{v_f} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_f} \sigma_z \, d\varepsilon_z \, dV \ldots$$

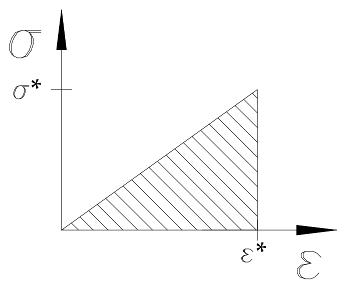
$$+ \int_{v_i}^{v_f} \int_{\gamma_i}^{\gamma_f} \tau_{xy} \, d\gamma_{xy} \, dV + \int_{v_i}^{v_f} \int_{\gamma_i}^{\gamma_f} \tau_{xz} \, d\gamma_{xz} \, dV + \int_{v_i}^{v_f} \int_{\gamma_i}^{\gamma_f} \tau_{zy} \, d\gamma_{zy} \, dV$$

(integral a lo largo de la deformación en todo el volumen)

En el método de cálculo que utilizamos se considera que no existen pérdidas por calor, y que no tenemos fuerzas de inercia (equilibrio estático). Considerando el material perfectamente elástico el trabajo de las fuerzas exteriores es entonces igual al trabajo de las fuerzas interiores por el principio de conservación del energía.

Entonces, llevándolo a un caso sencillo de solicitación axil, para un material elástico lineal:





El trabajo de la fuerza P es la integral a lo largo de su desplazamiento, que resulta: $\frac{1}{2} \cdot p^* \cdot u^*$

El trabajo de las fuerzas interiores resulta solamente el de σ_x: $\int_0^V \frac{1}{2} \cdot \sigma^* \cdot \varepsilon^* \, dV = \frac{1}{2} \cdot \sigma^* \cdot \varepsilon^* \cdot A \cdot L$

Nota: Lo llamado "Energía complementaria" de las fuerzas interiores es también igual al trabajo complementario de las fuerzas exteriores. Estos son $\int_{v_i}^{v_f} \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \varepsilon \, d\sigma \, dV$ y $\int_{p_i}^{p_f} L \, dP$.

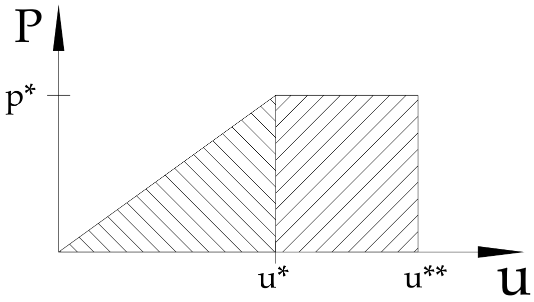
En el caso de los materiales elásticos, son también iguales a los trabajos previamente calculados (se ve en el gráfico que son triángulos iguales).

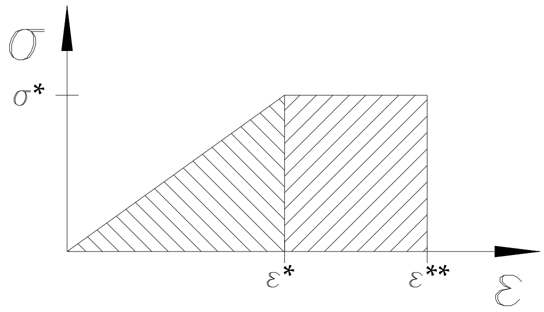
Teorema de los trabajos virtuales:

Por ahora no se hablo de nada virtual, hasta ahora hablamos de trabajos reales.
El teorema de los trabajos virtuales dice entonces que la igualdad vale también cuando una de las dos variables es virtual. El teorema de los trabajos virtuales realmente se divide en dos teoremas. Por un lado el deformaciones virtuales, y por otro el de las tensiones virtuales. Ambos se basan en lo mismo, pero de forma diferente. Nos vamos a concentrar en el de los desplazamientos virtuales.

El teorema dice que dado un *sistema estático o equilibrado* (con su respectivas solicitaciones y deformaciones) si se le aplica una *deformación virtual* sin cambio en las cargas (es decir no altera las solicitaciones solamente las deformaciones) la igualdad de los trabajos todavía se mantiene. El teorema es aplicable a cualquier medio continuo de cualquier material, no tienen que ser ni barras ni ser elásticos necesariamente.

Viéndolo gráficamente con el ejemplo anterior es:





Al sistema que teníamos antes le aplicamos una variación en la deformación. Según el teorema de los trabajos virtuales el trabajo 'de los rectángulos' deben ser iguales. Matemáticamente:

$$p^* \cdot (u^{**} - u^*) = \sigma^* \cdot (\varepsilon^{**} - \varepsilon^*) \cdot A \cdot L$$

Si queremos ser matemáticamente correcto se debe escribir: $\boxed{p^* \cdot \delta u = \sigma^* \cdot \delta\varepsilon \cdot A \cdot L}$

Donde el delta ' δ ' quiere decir variación. La variación es algo similar a la diferenciación, pero en vez de moverse un diferencial en una dirección lo que hace es hacer una pequeña variación a toda una función. El cálculo variacional es similar al diferencial. Pero como realmente no nos compete en este momento la formalidad, vamos a dejar la matemática ahí y continuar.

Esta variación o desplazamiento/deformación virtual debe ser:
- Arbitraria
- Infinitamente pequeña
- Compatibles con los vínculos del SE
- No producir cambios en las cargas ni solicitaciones

Dicho todo este preludio lo que vamos a hacer ahora es entonces igualar los trabajos generados por: las cargas y solicitaciones de mi Sistema Equilibrado con los desplazamientos y deformaciones de mi Deformación Virtual, que es la fórmula recuadrada en esta hoja.

Dependiendo de la situación, adoptaremos la DV y el SE que más nos convengan. Recordemos que también existe el teorema de las tensiones virtuales, el cual es otra herramienta que puede llegar a resultar útil, aunque menos utilizada.

Trabajo de las fuerzas interiores o Energía interna de deformación:

Calcularemos por separado los trabajos que genera cada solicitación. En el caso de tener más de una solicitación nos valdremos de la superposición de efectos para calcular el total, valido solo para problemas físico lineales.
El trabajo de una deformación virtual se define como:

$$\int_0^V \sigma_x \cdot \delta\varepsilon_x \, dV + \int_0^V \sigma_y \cdot \delta\varepsilon_y \, dV + \int_0^V \sigma_z \cdot \delta\varepsilon_z \, dV + \int_0^V \tau_{xy} \cdot \delta\gamma_{xy} \, dV + \int_0^V \tau_{zy} \cdot \delta\gamma_{zy} \, dV + \int_0^V \tau_{xz} \cdot \delta\gamma_{xz} \, dV$$

Donde la tensión sigma será la del SE, y la variación de deformación será la del DV. Por lo tanto, para no complicar con subíndices, se sobrentiende que lo que queda antecedido por un δ implica “de la DV”.

Las relaciones que calcularemos a continuación son solamente aplicables a barras tomando las siguientes hipótesis:
- Material elástico lineal.
- Linealidad estática.
- Linealidad cinemática.
- Los ejes de la terna de referencia coinciden con los ejes principales de inercia de la sección.
- Bernoulli - Navier.

Axil: La única tensión no nula es σ_x

$$\int_0^V \sigma_x \cdot \delta\varepsilon_x \, dV = \int_0^L \int_0^A \sigma_x \cdot \frac{\delta\sigma_x}{E} \, dA \, dL = \int_0^L \int_0^A \frac{N}{A} \cdot \frac{\delta N_x}{A \cdot E} \, dA \, dL = \frac{N \cdot \delta N_x}{A \cdot E} \cdot L$$

Flexión: La única tensión no nula es σ_x

$$\int_0^V \sigma_x \cdot \delta\varepsilon_x \, dV = \int_0^L \int_0^A \sigma_x \cdot \frac{\delta\sigma_x}{E} \, dA \, dL = \int_0^L \int_0^A \frac{M_x \cdot y}{I} \cdot \frac{\delta M_x \cdot y}{I \cdot E} \, dA \, dL = \int_0^L \frac{M_x}{I} \cdot \frac{\delta M_x}{I \cdot E} \cdot \int_0^A y^2 \, dA \, dL$$

Resultando: $$\int_0^L \frac{M_x \cdot \delta M_x}{I \cdot E} \, dL$$

Nótese que: $\frac{\delta M_x}{I \cdot E} = \delta\chi$ Lo cual comprueba que el trabajo de un momento es la integral de este por el giro. Según la convención puede quedar con un menos la igualdad.

Torsión: La única tensión no nula es τ (Tau)

$$\int_0^V \tau\cdot\delta\gamma\, dV = \int_0^L\int_0^A \tau\cdot\frac{\delta\tau}{G}\, dA\, dL$$

Sección con simetría de revolución:

$$\int_0^L\int_0^A \frac{M_t\cdot r}{J_p}\cdot\frac{\frac{\delta M_t\cdot r}{J_p}}{G}\, dA\, dL = \int_0^L \frac{M_t\cdot\delta M_t}{J_p\cdot J_p\cdot G}\cdot\int_0^A r^2\, dA\, dL = \int_0^L \frac{M_t\cdot\delta M_t}{J_p\cdot G}\, dL$$

Sección rectangular:

En este caso no tenemos la función tau, no conocemos su valor para cualquier punto de la sección. Entonces deberemos utilizar fórmulas empíricas, y no podremos hacer las integraciones como venimos haciendo, sino que tendremos que calcular el trabajo como el Momento multiplicado por el giro:

$$\int_0^L M_t\cdot\delta\chi\, dL = \int_0^L \frac{M_t\cdot\delta M_t}{G\cdot\beta\cdot a^3\cdot b}\, dL$$

Sección cerrada (Bredt):

$$\int_0^L\int_0^A \frac{M_t}{2\cdot\Omega\cdot e}\cdot\frac{\frac{\delta M_t}{2\cdot\Omega\cdot e}}{G}\, dA\, dL = \int_0^L \frac{M_t\cdot\delta M_t}{4\cdot\Omega^2\cdot G}\cdot\int_0^A \frac{1}{e^2}\, dA\, dL = \int_0^L \frac{M_t\cdot\delta M_t}{4\cdot\Omega^2\cdot G}\cdot\int_0^s \frac{e}{e^2}\, ds\, dL$$

Resultando: $$\int_0^L \frac{M_t\cdot\delta M_t}{4\cdot\Omega^2\cdot G}\cdot\int_0^s \frac{1}{e}\, ds\, dL$$

Corte: La única tensión no nula es τ (Tau en el sentido que esté el corte)

$$\int_0^V \tau\cdot\delta\gamma\, dV = \int_0^L\int_0^A \tau\cdot\frac{\delta\tau}{G}\, dA\, dL = \int_0^L\int_0^A \frac{Q\cdot S}{I\cdot b}\cdot\frac{\delta Q\cdot S}{I\cdot b\cdot G}\cdot\frac{A}{A}\, dA\, dL = \int_0^L \frac{Q\cdot\delta Q}{G\cdot A}\cdot\frac{A}{I^2}\cdot\int_0^A \frac{S^2}{b^2}\, dA\, dL$$

Definiendo $\xi_c = \frac{A}{I^2}\cdot\int_0^A \frac{S^2}{b^2}\, dA$ Coeficiente que esta tabulado y depende únicamente de la sección

Resultando: $$\int_0^L \frac{Q\cdot\delta Q}{G\cdot A}\cdot\xi_c\, dL$$

Temperatura:

Hasta ahora calculamos el trabajo solo debido a las cargas y entonces $\delta\varepsilon = \frac{\delta\sigma}{E}$ y $\delta\gamma = \frac{\delta\tau}{G}$. Pero cuando tenemos también temperatura esto no es así.

En el caso de tener solamente temperatura en la barra $\delta\varepsilon = \alpha \cdot \delta T^{o}$ siendo alfa el coeficiente de dilatación propio de cada material. Por lo cual el trabajo es:

$$\int_0^V \sigma \cdot \delta\varepsilon \, dV = \int_0^V \sigma \cdot \alpha \cdot \delta T^{o} \, dV$$

Si la temperatura es constante en toda sección y longitud de la barra resulta entonces:

$$\int_0^V \sigma \cdot \alpha \cdot \delta T^{o} \, dV = \sigma \cdot \alpha \cdot \Delta T^{o} \cdot L \cdot A = N \cdot \alpha \cdot \delta T^{o} \cdot L$$

En cambio si la temperatura no es uniforme, sino que en el lado inferior es diferente al superior, la variación produce una deformación longitudinal de la sección más un giro.

Deformación de la fibra baricéntrica: $\alpha \cdot \left(\frac{\delta T^{o}_i + \delta T^{o}_s}{2} \right)$

Curvatura de la sección: $\frac{\alpha \left(\delta T^{o}_i - \delta T^{o}_s \right)}{h}$ Donde h es la altura de la barra.

Para calcular el trabajo generado por una variación no uniforme de temperatura se podría hacer de dos formas. Una es buscar la función de variación del ε e integrarlo en el área como venimos haciendo. La segunda posibilidad es calcularlo como la suma de trabajo del Momento x Giro más el trabajo de la Normal x el desplazamiento promedio, es decir:

$$N \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\delta T^{o}_i + \delta T^{o}_s}{2} \right) \cdot L + \int_0^L \frac{M \cdot \alpha \left(\delta T^{o}_i - \delta T^{o}_s \right)}{h} \, dL$$

<u>Aclaraciones</u>

Antes de ver un par de ejemplos y aplicar el teorema de los trabajos virtuales vale pena hacer ciertas aclaraciones.

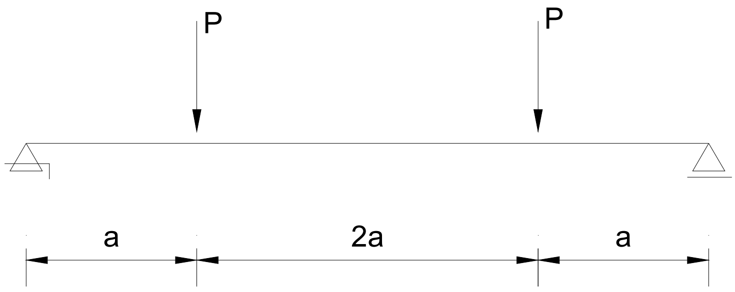
<u>Sistema Equilibrado:</u> También llamado estático o fundamental. Este sistema puede ser cualquier sistema que esté en equilibrio estático, como su nombre lo indica.
En el caso de que sea isoestático existe solo una solución de equilibrio para un estado de cargas dado, y este será el SE.
Un hiperestático en cambio es indeterminado por el lado de las tensiones, es decir que tiene infinitas soluciones, infinitas maneras de que esté equilibrado. La solución real es única y se haya utilizando compatibilidad, pero nuestro SE no tiene que cumplir necesariamente compatibilidad, con ser un sistema estático es suficiente. Podemos entonces equilibrar el sistema a nuestra conveniencia para facilitar el cálculo. Veremos un ejemplo de esto a continuación.

<u>Fuerza unitaria:</u> Cuando uno elige un SE generalmente opta por uno que esté solicitado por una fuerza +1. La razón de esto es simplemente para simplificar las cuentas. El valor que le pongamos a la fuerza no afecta el resultado final, no puede afectarlo, no tendría sentido pues se postula un SE para hallar alguna incógnita de mi estructura, y obviamente la respuesta de la estructura a sus cargas no dependen del SE que yo invente. Matemáticamente es fácil verlo, el valor que yo le de a la fuerza afectara a los dos lados de la igualdad de trabajos de la misma forma, aparece a ambos lados y lo cancelaríamos, entonces le damos el valor 1 para simplificar.

Generalmente nuestro SE es un sistema que tenga una fuerza o momento unitario en el punto y sentido de la variable cinemática que queramos calcular, pues es el que nos conviene.

Ejemplo 1:

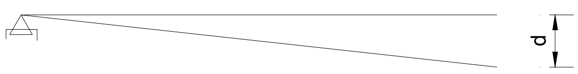
Veamos dos ejemplos para comprender mejor. Primero aplicaremos el teorema a un sistema isoestático, como hacíamos en Estabilidad 1. Dado el siguiente sistema:



Aunque podríamos calcular las reacciones simplemente por equilibrio, lo haremos utilizando el teorema de los trabajos virtuales. Para hallar la reacción derecha proponemos el siguiente sistema estático y deformación virtual:

Sistema Estático:

Deformación virtual:



Trabajo de las fuerzas exteriores: $\frac{P \cdot d}{4} + \frac{P \cdot d \cdot 3}{4} + R_b \cdot d$

Trabajo de las fuerzas interiores: Como el sistema es un mecanismo, nuestra deformación virtual tiene una rotación sin deformación, por lo cual este trabajo es nulo.

Igualando trabajos:

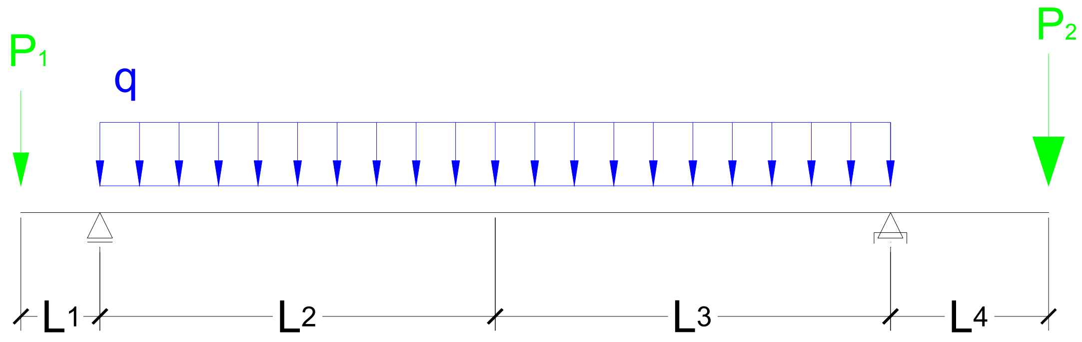
$$\frac{P \cdot d}{4} + \frac{P \cdot d \cdot 3}{4} + R_b \cdot d = 0$$

$$R_b = \frac{P \cdot d}{d} = P$$

Nótese que, obviamente, el valor de la reacción no depende del desplazamiento 'd' adoptado.

Ejemplo 2:

En este caso vamos a resolver el calculo de una solicitación interna mediante el teorema de los trabajos virtuales. El problema a resolver es el momento en el punto medio entre los apoyos del siguiente problema:



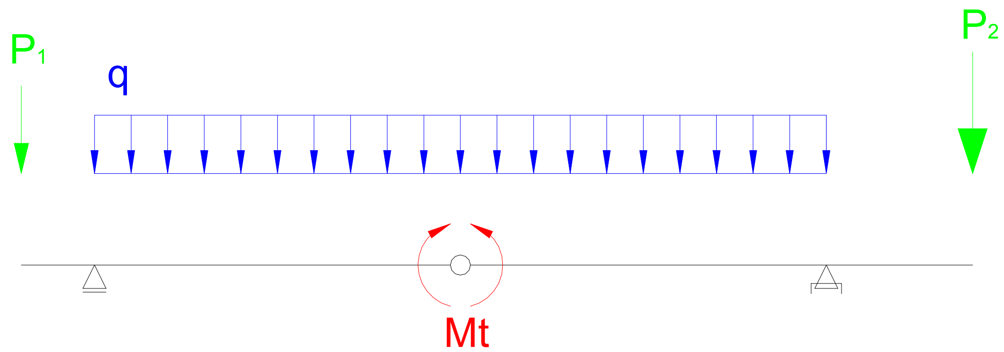
Datos: Cargas: $P_1 := 10kN$ Distancias: $L_1 := 1m$

$P_2 := 20kN$ $L_2 := 5m$

$q := 1\frac{kN}{m}$ $L_3 := 5m$

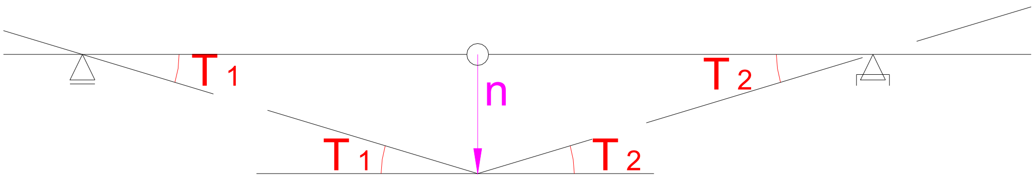
$L_4 := 2m$

Como queremos hallar el momento en el punto medio lo ponemos evidencia. El esquema anterior es equivalente a:



Hasta aquí no utilizamos el TTV, lo vamos a utilizar para justamente calcular el valor Mf.

Planteamos entonces un sistema fundamental que haga trabajar a nuestra incógnita. El sistema a elegir es uno que tenga un giro en el punto donde queremos hallar el momento. El sistema resulta entonces:



Debemos ahora calcular el trabajo externo e interno de las deformaciones de nuestro sistema fundamental con las cargas de mi sistema original, el cual podremos denominar Sistema de tensiones virtuales. Una vez calculamos por el TTV sabemos que deben ser iguales.

Podemos ver en primer lugar que nuestro sistema fundamental es un mecanismo, por lo cual se deforma sin deformaciones especificas 'ε'. Por esta razón el trabajo interno será igual a 0, pues no existe trabajo de las tensiones.

El trabajo externo será, en cambio, diferente de 0, pues tenemos desplazamientos en nuestro sistema fundamental que trabajaran con las fuerzas de nuestro sistema de tensiones virtuales.

Notemos en primer lugar que como: $n = \Theta_1 \cdot L_3 = \Theta_2 \cdot L_4$

Llegamos a que: $\Theta_2 := \Theta_1 \cdot \frac{L_2}{L_3}$ Que para este caso $\Theta_2 = 1 \cdot \Theta_1$

Teniendo ahora los desplazamientos referidos a la misma incógnita nos disponemos a calcular el trabajo externo de cada carga por separado:

En primer lugar calculamos el trabajo de la fuerza P_1. Este será dicha fuerza por el desplazamiento generado en ese punto en el sistema fundamental. Notemos que el desplazamiento es hacia arriba, mientras que la fuerza es hacia abajo, por lo cual el trabajo será negativo.

Desplazamiento de dicho punto: $\eta_1 := -\Theta_1 \cdot L_1$

El trabajo resulta entonces: $W_{P1} := -P_1 \cdot \Theta_1 \cdot L_1$

Calculamos ahora el trabajo de la fuerza P_2.

Desplazamiento de dicho punto: $\eta_2 := -\Theta_2 \cdot L_4$

El trabajo resulta entonces: $W_{P2} := -P_2 \cdot \Theta_2 \cdot L_4$

El trabajo de la carga distribuida resulta el de multiplicar la carga por el desplazamiento punto a punto, esto es equivalente a la integral de la carga por la función deformación. En este caso la carga y el desplazamiento ambos son hacia abajo, por lo cual el trabajo será positivo.

La función deformación es una función partida compuesta por dos funciones lineales:

$$v(x) := \begin{cases} -\Theta_1 \cdot L_1 + \Theta_1 \cdot x & \text{if } 0 < x < L_1 + L_2 \\ \Theta_2 \cdot L_3 - \Theta_2 \cdot (x - L_1 - L_2) & \text{if } L_1 + L_2 \le x < L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \end{cases}$$

El trabajo resulta entonces: $W_q := \int_{L_1}^{L_1+L_2+L_3} q \cdot v(x)\, dx$

Por ultimo calculamos el trabajo del momento Mf. Dicho trabajo es el momento por el giro relativo de dicha sección

Giro Relativo: $\Theta_r := \Theta_1 + \Theta_2$

El trabajo resulta entonces: $W_{Mt}(M_f) := M_f \cdot \Theta_r$

Podemos entonces calcular el trabajo externo total como la suma de dichos trabajos:

$$W_{Ext} = W_{P1} + W_{P2} + W_q + W_{Mt}(M_f)$$

El trabajo interno era igual a 0 como vimos antes, por lo cual: $W_{Ext} = W_{Int} = 0$

Llegamos entonces a que: $-W_{Mt}(M_f) = W_{P1} + W_{P2} + W_q$

Notemos que el valor de Θ_1 queda a ambos lados de la igualdad, pues lo cual se puede cancelar y despejar de esta ecuación el valor de Mf.

Para los datos dados: $M_f = 12.5 \cdot kN \cdot m$

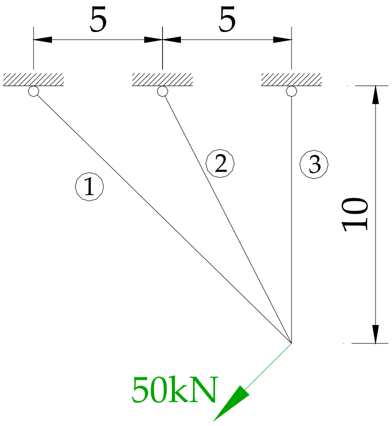
Ejemplo 3:

Apliquemos ahora el teorema a un sistema hiperestático, con solo solicitación axil:

$$L_3 := 10m$$

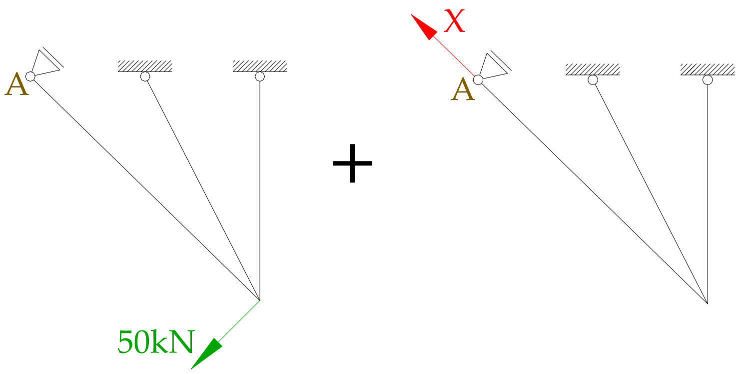
$$L_2 := \sqrt{(5m)^2 + (10m)^2}$$

$$L_1 := \sqrt{(10m)^2 + (10m)^2}$$



La carga tiene un ángulo de 45º con la vertical.

Resolveremos la estructura obviamente utilizando el teorema de los trabajos virtuales. Al tener un grado de hiperestaticidad, por el lado de tensiones nos encontramos con un sistema compatible indeterminado, por lo cual deberemos utilizar la compatibilidad de deformaciones para poder encontrar la solución. Usaremos ahora dos deformaciones virtuales, y luego compatibilizaremos las deformaciones.
Decimos que la estructura es la suma de dos isoestáticas:

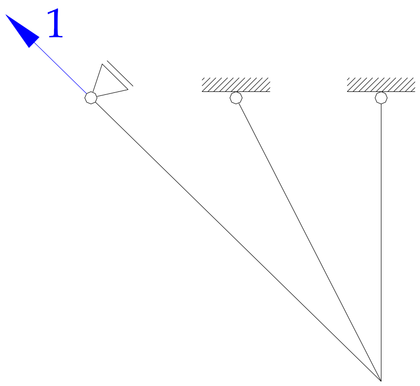


Donde X es nuestra variable a determinar.

La ecuación de compatibilidad es que el desplazamiento del punto extremo de la barra 1, el punto A, es nulo en mi estructura original. Esto se traduce en que la suma de los desplazamientos de los casos debe ser nulo. Es decir, cada isoestático tendrá un desplazamiento, pero X será tal que genere un desplazamiento igual en módulo pero en sentido contrario al otro. Es decir: $\eta_x + \eta_p = 0$

Lo que debemos hacer ahora es hallar esos desplazamientos para igualarlos a cero y despejar X. Para hallar estos desplazamientos utilizaremos el Teorema de los trabajos virtuales.

Elegimos un SE que nos convenga:



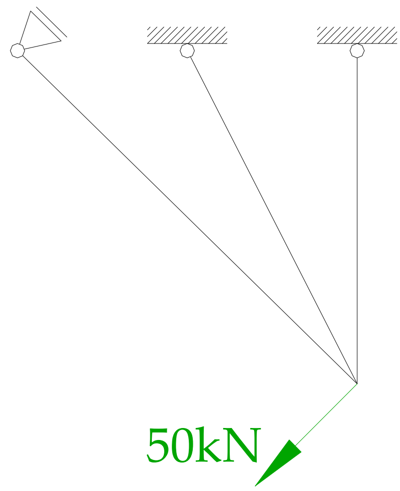
Y buscamos las solicitaciones tal que quede equilibrado el sistema:

$N_{1se} := 1 \qquad N_{3se} := -\cos(45º)$

$$N_{2se} := \frac{2\cos(45º)}{\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{5}{10}\right)\right)}$$

Y lo haremos trabajar con las deformaciones virtuales. Estas no serán otra cosa que mis dos isoestáticas de la hoja anterior.

Primero trabajamos con la DV 1:



$N_{1dv1} := 0$

$$N_{2dv1} := \frac{-50kN\cdot\sin(45º)}{\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{5}{10}\right)\right)}$$

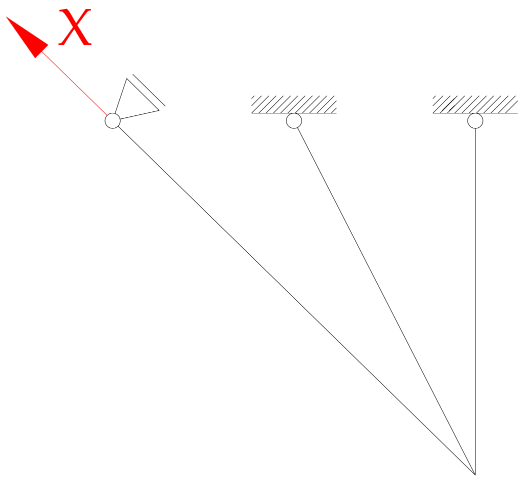
$$N_{3dv1} := \frac{50kN\cdot\cos\left(45º - \operatorname{atan}\left(\frac{5}{10}\right)\right)}{\cos\left(90º - \operatorname{atan}\left(\frac{5}{10}\right)\right)}$$

El desplazamiento del punto A debido a la carga resulta:

Trabajo de las fuerzas exteriores = Trabajo de las fuerzas interiores

$$1\cdot\eta_p = \frac{N_{2dv1}\cdot N_{2se}\cdot L_2}{E\cdot A_2} + \frac{N_{3dv1}\cdot N_{3se}\cdot L_3}{E\cdot A_3}$$

Repetimos con la DV 2:



$N_{1dv2}(X) := X$

$$N_{2dv2}(X) := \frac{X \cdot 2\cos(45º)}{\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{5}{10}\right)\right)}$$

$N_{3dv2}(X) := -X \cdot \cos(45º)$

El desplazamiento del punto A debido a la incógnita resulta:

$$\eta_x = \frac{N_{1dv2}(X) \cdot N_{1se} \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \frac{N_{2dv2}(X) \cdot N_{2se} \cdot L_2}{E \cdot A_2} + \frac{N_{3dv2}(X) \cdot N_{3se} \cdot L_3}{E \cdot A_3}$$

Planteamos: $\eta_x + \eta_p = 0$ Que es nuestra ecuación de compatibilidad.

Si todas las barras tiene el mismo material y sección:

$$N_{2dv1} \cdot N_{2se} \cdot L_2 + N_{3dv1} \cdot N_{3se} \cdot L_3 + N_{1dv2}(X) \cdot N_{1se} \cdot L_1 + N_{2dv2}(X) \cdot N_{2se} \cdot L_2 + N_{3dv2}(X) \cdot N_{3se} \cdot L_3 = 0$$

Y se puede despejar: $X = 45.602\ \text{kN}$

Una vez obtenido el valor de X podemos determinar las solicitaciones reales de mi estructura. Por superposición de efectos que enunciamos al principio del ejercicio:

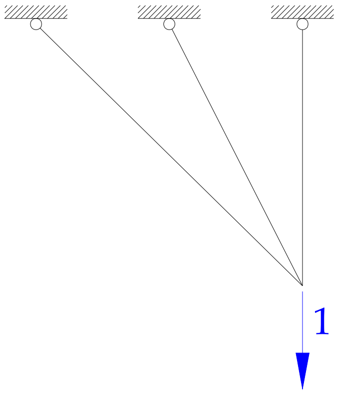
$N_1 := N_{1dv1} + N_{1dv2}(X) = 45.602\ \text{kN}$

$N_2 := N_{2dv1} + N_{2dv2}(X) = -6.954\ \text{kN}$

$N_3 := N_{3dv1} + N_{3dv2}(X) = 73.82\ \text{kN}$

Supongamos ahora que queremos hallar el desplazamiento vertical del punto donde esta aplicada la carga.

Opto entonces por el siguiente sistema estático:



Como enunciamos en las aclaraciones en el SE hiperestático con que esté en equilibrio nos es suficiente, las solicitaciones no deben tener compatibilidad alguna de deformaciones. Podemos entonces proponer las solicitaciones que queramos nosotros, sin necesidad de resolver el hiperestático 'real', con la única condición que las cargas y solicitaciones estén en equilibrio. Entonces propongo entonces para ese SE las siguientes solicitaciones.

$N_{1se2} := 0 \qquad N_{2se2} := 0 \qquad N_{3se2} := 1$

Valores que claramente no corresponden con los 'reales', pero que nos serán cómodos para calcular nuestra incógnita.

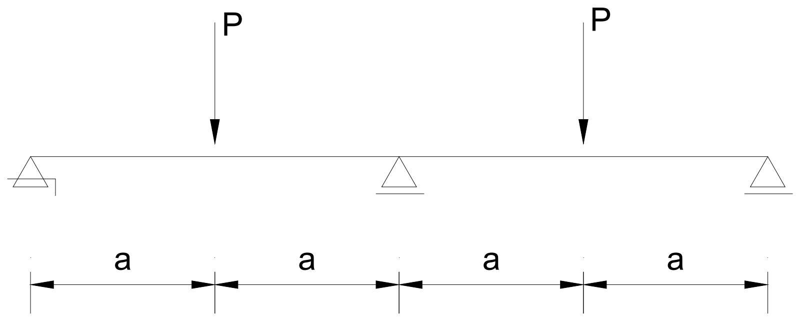
Usando como DV 1 la estructura real plantemos:

$$\eta_v := \frac{N_{3se2} \cdot N_3 \cdot L_3}{E \cdot A_3} = 5.721 \cdot mm$$

Con: $E := 200000 \frac{N}{mm^2}$ $\qquad A_3 := in^2 = 6.452 \cdot cm^2$

Ejemplo 4:

Apliquemos el teorema a otro sistema hiperestático, pero ahora con solo flexión:



Si queremos hallar el momento en el apoyo intermedio planteamos el siguiente sistema estático:

Sistema Equilibrado

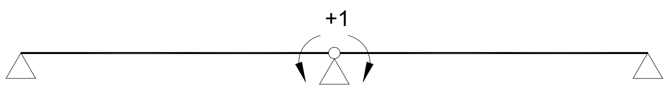
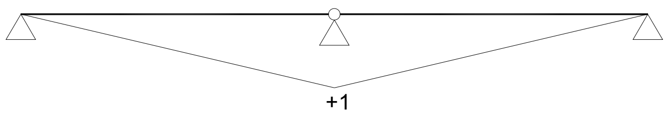


Diagrama de Momentos: M_1



Y planteamos los siguientes desplazamientos virtuales:

Desplazamiento Virtual 1

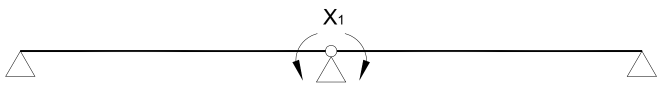
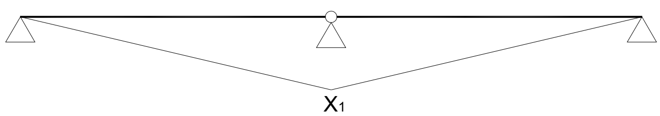


Diagrama de Momentos: M_{x1}



Desplazamiento Virtual 2

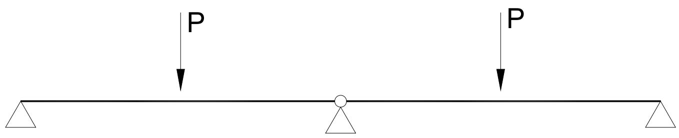
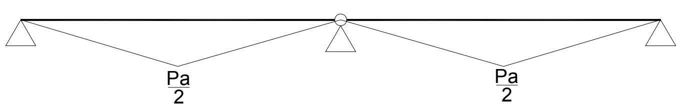


Diagrama de Momentos: M_p



La variable X_1 representa el valor del momento en el centro del tramo. Utilizamos entonces el teorema de los trabajos virtuales, entre el sistema estático y la deformación virtual 1.

El trabajo de las fuerzas exteriores es el momento de mi sistema estático, el cual es +1, multiplicado por el giro relativo que tiene mi desplazamiento virtual en la articulación, al cual denominamos a_{11} .

El trabajo de las fuerzas interiores es, como vimos anteriormente: $\displaystyle\int_0^L \frac{M_1 \cdot M_{x1}}{I \cdot E} \, dL.$

Como adicionalmente sabemos que $M_{x1} = M_1 \cdot X_1$, podemos rescribir como: $\displaystyle X_1 \cdot \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_1}{I \cdot E} \, dL$

Igualando los trabajos, el giro del punto medio en la DV1, originado por X_1 resulta:

$$a_{11} = \frac{X_1}{I \cdot E} \cdot \int_0^L M_1 \cdot M_1 \, dL$$

Procedemos de la misma forma para la deformación virtual 2.

Trabajo de las fuerzas exteriores: $1 \cdot a_{1p}$

Trabajo fuerzas interiores: $\displaystyle\frac{1}{I \cdot E} \cdot \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_p}{I \cdot E} \, dL$

Igualando los trabajos, el giro del punto medio en la DV2, originado por las cargas resulta:

$$a_{1p} = \frac{1}{I \cdot E} \cdot \int_0^L M_1 \cdot M_p \, dL$$

Ahora es cuando utilizamos compatibilidad. Las variables a_{11} y a_{1p} son, el giro relativo generado por el momento X_1 y el generado por las cargas respectivamente. Mi estructura original, la real, no puede tener un giro relativo ya que no posee una articulación, por lo cual la suma de ambos debe ser nulo y la ecuación de compatibilidad resulta: $a_{11} + a_{1p} = 0$

Planteamos entonces: $\displaystyle\frac{X_1}{I \cdot E} \cdot \int_0^L M_1 \cdot M_1 \, dL = \frac{1}{I \cdot E} \cdot \int_0^L M_1 \cdot M_p \, dL$

$$X_1 = \frac{\displaystyle\int_0^L M_1 \cdot M_p \, dL}{\displaystyle\int_0^L M_1 \cdot M_1 \, dL}$$

Lo único que faltaría es calcular la integral del producto de las funciones momento, lo cual se puede hacer utilizando los ábacos que se utilizan en clase o definiendo las funciones e integrando con algún programa de cálculo como Mathcad.

Nótese que en este caso resulta que la solicitación no depende del material de mi estructura. Esto sucede siempre y cuando nuestra estructura sea de un mismo material.