TRABAJOS VIRTUALES

Abril 2000

Emisión Preliminar Informativa

1.- Introducción. Trabajo de deformación. Principio de equivalencia

Se ha visto el concepto de trabajo de deformación elemental al analizar el comportamiento mecánico de una parte infinitésima de un sólido deformable. El trabajo de deformación elemental es el que realizan las fuerzas que actúan sobre cada una de las superficies de la parte en el desplazamiento que las mismas experimentan durante la evolución desde un estado inicial a un estado final.

Si se considera que las superficies que delimitan la parte elemental son tan pequeñas como se quiera, se puede suponer a las fuerzas que actúan sobre estas superficies como uniformes y expresables en función de la fuerza uniformemente distribuida la cual, como ya se ha visto, se la denomina tensión.

Los corrimientos relativos que experimentan las superficies que delimitan a la parte pueden ser expresados en términos de la deformación que experimenta el continuo.

Si estos corrimientos son consecuencia de las fuerzas que actúan, variarán, en la evolución desde el estado inicial al final, en la medida que las fuerzas varían su intensidad hasta alcanzar el valor final.

Tal como se había visto el trabajo que se realiza en la parte elemental, definida por planos perpendiculares a los ejes de referencia, se obtendrá la siguiente expresión del trabajo de deformación elemental. La integral debe contemplar la evolución desde el estado de deformación inicial al estado de deformación final

$$dL_i = \int_{\psi} [\Gamma]^t . \ [d\psi] \qquad [1]$$

La suma del trabajo que se realiza en cada una de la partes infinitésimas en las que se ha dividido el todo se denomina trabajo interno de deformación. Si se pretende calcular el trabajo interno de deformación, la integral debe extenderse al volumen del mismo.

$$Li = \int_V \int_{\psi} [\Gamma]^t . \ [d\psi] \ dV \qquad [2]$$

El trabajo que se realiza sobre la totalidad de las partes en que se ha dividido el continuo es igual al que realizan las fuerzas exteriores.

Al trabajo que realizan las fuerzas exteriores se lo denomina trabajo externo de deformación y se puede expresar como

$$L_e = \int [C]^t . \; [da_{C,C}] \qquad [3]$$

La igualdad de estos trabajos se justifica sin ninguna demostración particular por cuanto es la consecuencia directa del modelo de análisis. Si el todo se integra con la totalidad de las partes que se han definido es evidente que lo que le ocurra a ese todo, en términos de trabajo, será la suma de lo que ocurra en cada una de esas partes.

Con el fin de afianzar este razonamiento siempre es posible asumir que cada una de las partes que se han considerado puede a su vez ser considerado como un todo divisible en partes y así razonar indefinidamente.

A esta igualdad se la identifica como **Principio de equivalencia**

$$L_i = \int_v \int_\psi [\Gamma]^t . \; [d\psi] \; dv = \int [C]^t . \; [da_{C,C}] = L_e \qquad [4]$$

La validez de este principio no está condicionada por el comportamiento del continuo ni del material constitutivo del mismo como surge de las consideraciones efectuadas.

La expresión [4] suministra una relación entre las magnitudes asociadas al continuo que se analiza y las magnitudes que se vinculan con cada una de las partes en que se ha dividido arbitrariamente al todo.

De esta expresión se deducen, en función de las hipótesis que se formulen sobre el comportamiento del sistema, diversas expresiones que resultan de suma utilidad para el análisis estructural.

Si el sistema tiene una respuesta lineal, es decir que los efectos son proporcionales a las causas que los producen, la integral en términos de la variación de la deformación con la tensión, es igual a la mitad del producto de la variación de la tensión por la variación de la deformación que se producen durante la transformación.

Esto surge simplemente de resolver la integral [1] considerando que se pueden expresar las deformaciones como una función lineal de las tensiones.

La expresión [3] se transforma, por lo tanto, en:

$$½ \; [\Delta C]^t . \; [\Delta a_{C,C}] = ½ \int_v [\Delta\Gamma]^t . \; [\Delta\psi] \; dv \qquad [5]$$

Con el fin de simplificar la escritura de esta expresión, se considera que se parte de un estado inicial en el cual el valor de la fuerza exterior, los corrimientos, las tensiones y las deformaciones son nulas para identificar la variación de estas magnitudes por su valor final.

$$\tfrac{1}{2}\ [C]^{t}.\ [a_{C,C}] = \tfrac{1}{2} \int_{v} [\Gamma]^{t}.\ [\psi]\ dv \qquad [6]$$

2.- Sistemas constituidos por barras

En los sistemas constituidos por barras, mediante la adopción de las hipótesis ya expuestas de la teoría de barras, se posibilita la descripción matemática del continuo adoptando, como partes, “rebanadas” de barra, de ancho infinitésimo “dx”, en lugar de elementos infinitésimos de volumen “dx, dy, dz.” Como se ha visto es posible describir estática y cinemáticamente el comportamiento de una barra mediante magnitudes asociadas a un sistema de referencia vinculado al eje de la barra.

Es así que el estado de tensión o el estado de deformación puede ser definido en base a las solicitaciones o a las “deformaciones” que experimenta el eje de la barra.

Si es posible determinar las tensiones en cualquier punto de una barra conocidas las solicitaciones se puede determinar el trabajo de deformación en términos de solicitaciones.

Se ha visto en una barra que el estado de tensión puede ser expresado como

$$[\Gamma] = [b_s] \text{ x } [S] \qquad [7]$$

A su vez las deformaciones se pueden calcular como

$$[\psi] = [F] \text{ x } [\Gamma] \qquad [8]$$

siendo [F] la matriz que relaciona tensiones con deformaciones para materiales que cumplen las hipótesis de Hooke.

Reemplazando se puede expresar

$$\tfrac{1}{2}\ [C]^{t}.\ [a_{C,C}] = \tfrac{1}{2} \int_{V} [S]^{t} \text{ x } [b_s]^{t} \text{ x } [F] \text{ x } [b_s] \text{ x } [S] \text{ x } dv \qquad [9]$$

o bien dividendo el diferencial volumen y ordenando en función de la sumatoria de barras que componen el sistema

$$\tfrac{1}{2}\ [C]^{t}.\ [a_{C,C}] = \tfrac{1}{2} \Sigma \int_{l} [S]^{t} [S]\ dx\ [\int \Omega\ [b_s]^{t} \text{ x } [F] \text{ x } [b_s]) \text{ x } d\Omega\ ] \qquad [10]$$

Si es posible resolver la integral entre paréntesis se estaría en condiciones de poder calcular el trabajo interno de deformación.

A esta matriz se la identificará como:

$$[f_s] = \int_{\Omega} [b_s]^{t} \text{ x } [F] \text{ x } [b_s]) \text{ x } d\Omega \qquad [11]$$

Como se ha visto la matriz $[b_s]$ es la siguiente

$$[b_s] = \begin{vmatrix} 1/F & 0 & 0 & 0 & z/Jy & -y/Jz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/F & 0 & -z/Jp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/F & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La matriz ¨[F] es, como se ha visto

$$[\,F\,] = \begin{vmatrix} 1/E & -\mu/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & 1/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & -\mu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{vmatrix}$$

Operando matricialmente se obtiene la siguiente matriz producto $[b_s]^t \times [F] \times [b_s]$

$$\begin{vmatrix} 1/EF^2 & 0 & 0 & 0 & z/EJ_yF & -y/EJ_zF \\ 0 & 1/GF^2 & 0 & -z/GFJ_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/GF^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z/GFJ_p & 0 & (z^2+y^2)/GJ_p^{\,2} & 0 & 0 \\ z/EFJ_y & 0 & 0 & 0 & z^2/EJ^2y & -zy/EJ_yJ_z \\ -y/EFJ_z0 & 0 & 0 & 0 & -yz/EJ_yJ_z & y^2/EJ^2{}_z \end{vmatrix}$$

Integrando esta matriz a lo largo de la sección en análisis y recordando, que el sistema de referencia es la terna principal de inercia de la sección, ubicada con el origen en el baricentro de la misma, se reduce la misma a la siguiente matriz que ya ha sido determinada y expresa la relación existente entre las solicitaciones y los cambios de forma que se registran en el eje de la barra.

Cabe señalar, que la obtención de esta matriz ha sido hecha asumiendo que los puntos ubicados sobre una sección plana, antes de la deformación, permanecerán sobre un plano luego de la misma. Esta hipótesis no se verifica cuando la barra se encuentra sometida a solicitaciones de flexión variable y a torsión, esencialmente, en esta última solicitación cuando se trata de secciones que presenten discontinuidades en su perímetro. En los casos mencionados se recurre a soluciones aproximadas que en el caso de la solicitación por corte, con ajuste al desarrollo de Jourawsky, conducen a la introducción de un factor de forma y para la torsión a un módulo que puede ser obtenido mediante la aplicación de la resolución del problema mediante la Teoría Matemática de la Elasticidad. En lo que sigue se introducirá el factor de forma y deberá tenerse en cuenta el concepto que se le asigna al momento de inercia polar en torsión.

Esta matriz representa la ecuación diferencial de la elástica en función de las solicitaciones.

$$[f_s] = \begin{vmatrix} 1/EF & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y/GF & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z/GF & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/GJ_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/EJ_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/EJ_z \end{vmatrix}$$

Reemplazando en la expresión [10] se obtiene

$$½ \ [C]^t . \ [a_{C,C}] = ½ \ \Sigma \int_l \ [S]^t \times [f_s] \times [S] \times dx \qquad [12]$$

Si se observa detalladamente esta expresión y se la compara con la [10] se podrá apreciar que se ha expresado el trabajo interno de deformación en términos de las magnitudes asociadas a partes de nuestro todo que corresponden a las “rebanadas” en que consideramos dividida nuestra barra en reemplazo de las partes infinitésimas de las cuales se ha partido.

Recordando que la matriz $[f_s]$ representaba la relación entre las solicitaciones y los cambios de forma del eje de la barra se podría expresar la [12] de la siguiente manera

$$\tfrac{1}{2}\ [C]^{t}.\ [a_{C,C}] = \tfrac{1}{2}\ \Sigma\int_{l}\ [S]^{t} \times [da_{g}/dx] \times dx \qquad [13]$$

expresión que pone en evidencia al computar el trabajo interno el producto de una magnitud estática por una magnitud cinemática.

La expresión [11] expresa el principio de equivalencia aplicado a una barra ubicada en el espacio sometida a una solicitación genérica. En el supuesto de considerar solicitaciones simples se podrá simplificar la expresión general debido a que algunas de las componentes del vector solicitaciones o del vector cambio de forma del eje de la barra se anulan.

Para determinar el trabajo interno total a lo largo de una barra habrá que integrar la expresión a lo largo del eje de la barra y si se analiza una estructura compuesta por varias barras habrá que adicionar el trabajo que se realiza en cada una de ellas para obtener el trabajo interno total de deformación para la evolución que se analiza.

3.- Trabajo virtual

En lo que antecede se ha considerado el trabajo que realiza un sistema de fuerzas exteriores durante la deformación que experimenta el mismo. Se ha planteado también la equivalencia entre este trabajo y el trabajo interno de deformación.

Es posible imaginar también el trabajo que realice un sistema de fuerzas en la deformación que produce otra causa deformante. Para ello basta pensar en un sistema que se encuentre en equilibrio, ya deformado, bajo la acción de un determinado sistema de fuerzas.

A este sistema de fuerzas se lo denominará ***sistema equilibrado*** y está representado por las fuerzas exteriores y las fuerzas interiores que coexisten con aquellas. Se puede por lo tanto identificar a este sistema por un vector fuerza exterior y un vector solicitaciones originado por aquella.

$$\{\mathbf{C}_{e}\} \longrightarrow \{\mathbf{S}_{Ce}\}$$

Si se aplica una causa deformante a este sistema equilibrado (puede ser debida a causas estáticas o a otro tipo de causas –variación de temperatura o cedimiento de vínculos-) se producirán en el mismo deformaciones que se pueden identificar como asociadas a esa causa deformante.

$$\{\mathbf{C}_{d}\} \longrightarrow \{\ \mathbf{da_{g}/dx}_{\ Cd}\} \longrightarrow \{\mathbf{a}_{gCd}\}$$

A este estado de deformación se lo denominará ***deformación virtual***, puesto que el mismo puede ser real o producto de nuestra imaginación.

En esta transformación las magnitudes estáticas del sistema equilibrado se mantienen constantes mientras las deformaciones se van incrementando hasta alcanzar su valor final correspondiente al momento en que se alcanza el valor final de $\mathbf{C}_{d}$.

El trabajo exterior que realizaran las fuerzas exteriores cuando se produce el cambio de forma será igual al producto de las fuerzas del vector $\mathbf{C}_d$ por el valor de los corrimientos que experimenta el sistema en la dirección de esas fuerzas $\{\mathbf{a}_{Ce,Cd}\}$, que se identifica con dos subíndices, el primero que identifica la coordenada de las fuerza que realiza el trabajo y el segundo que identifica la causa que origina la deformación que se considera. En este supuesto desaparece el factor ½ que imponía, incluso, la adopción de la hipótesis de respuesta lineal en el sistema, por la constancia de las fuerzas del sistema equilibrado.

A este trabajo se lo denominará ***trabajo virtual externo*** y se lo identificará como $\mathbf{L}_{ve}$,

$$\mathbf{L}_{ve} = \{ \mathbf{C}_d \} \times \{ \mathbf{a}_{Ce,Cd} \}^t \qquad [14]$$

De acuerdo a lo visto se podría calcular también el trabajo virtual interno, $\mathbf{L}_{vi}$

$$\mathbf{L}_{vi} = \Sigma \int_l [\mathbf{S}_{Ce}]^t \times [d\mathbf{a}_g/dx]_{Cd} \times dx \qquad [15]$$

El principio de equivalencia permite, establecer la equivalencia entre ambos trabajos con lo cual se obtiene una expresión conocida como la resultante del teorema de los trabajos virtuales o también como principio de los trabajos virtuales, en el supuesto de adoptar a ése como principio.

$$\{ \mathbf{C}_e \} \times \{ \mathbf{a}_{Ce,Cd} \}^t = \Sigma \int_l [\mathbf{S}_{Ce}]^t \times [d\mathbf{a}_g/dx]_{Cd} \times dx \qquad [16]$$

Esta expresión resulta de suma utilidad porque posibilita vincular magnitudes externas de nuestro sistema con magnitudes internas –evidenciadas al descomponer al todo en partes-

Si los cambios de forma son consecuencia de la actuación de un sistema de fuerzas se puede reemplazar sobre la base de la [11] en la expresión [16] obteniendo:

$$\{ \mathbf{C}_e \} \times \{ \mathbf{a}_{Ce,Cd} \}^t = \Sigma \int_l [\mathbf{S}_{Ce}]^t \times [f_s] \times [\mathbf{S}_{Cd}] \times dx \qquad [17]$$

Estas expresiones permiten determinar fuerzas o desplazamientos incógnitos en determinados problemas.

Para la determinación de fuerzas incógnitas se debe ubicar a la incógnita dentro del sistema equilibrado y adoptar una deformación virtual que la ponga en evidencia de manera de explicitarla en la expresión [16] o [17]

Para la determinación de desplazamientos se debe ubicarlo dentro de la deformación virtual y adoptar un sistema equilibrado que posibilite poner en evidencia el desplazamiento que se pretende calcular en la expresión [16] o en la [17]

En todos los casos se requiere la determinación de las magnitudes estáticas o cinemáticas asociadas a cada una de las partes en que se ha procedido a dividir el sistema.

Si se considera una única fuerza incógnita se puede aplicar un desplazamiento unitario transformando la [16] en lo que se conoce como el teorema del desplazamiento unitario.

$$\{ \mathbf{C}_e \} \times \{ \mathbf{1}_{Ce,d} \}^t = \Sigma \int_l [\mathbf{S}_{Ce}]^t \times [d\mathbf{a}_g/dx]_{1d} \times dx \qquad [18]$$

Esta expresión ha sido utilizada en cursos anteriores para determinar magnitudes estáticas en sistemas isostáticos indeformables. La expresión se igualaba a 0 por ser nulo el trabajo virtual interno debido a la no existencia de deformaciones.

De la misma manera se pueden determinar desplazamientos si se aplica una fuerza unitaria obteniendo la expresión identificada como teorema de la fuerza unitaria.

$$\{ \mathbf{1}_e \} \times \{ \mathbf{a}_{,1e,Cd} \}^t = \Sigma \int_l [\mathbf{S}_{1e}]^t \times [d\mathbf{a}_g/dx]_{Cd} \times dx \qquad [19]$$

4.- Sistemas constituidos por barras sometidas a solicitación axil únicamente.

En este caso el vector solicitaciones se reduce a una única componente que es el esfuerzo normal, simplificándose las expresiones anteriores puesto que el vector solicitaciones tiene una sola componente.

La hipótesis del comportamiento mecánico del sistema surge mediante la aplicación de la matriz $[f_s]$

Las expresiones del teorema del desplazamiento unitario se transforman en este caso en

$$\{ \mathbf{C}_e \} \times \{ \mathbf{1}_{Ce,d} \}^t = \Sigma \int_l \mathbf{N}_{Ce} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{g,1d} \times dx \qquad [20]$$

extendiéndose la sumatoria a la totalidad de las barras que componen el sistema. Los esfuerzos normales en las distintas barras se calcularán por alguno de los métodos conocidos y la deformación del eje de la barra dependerá del tipo de causa deformante.

Si las causas deformantes generan solicitaciones axiles en las barras la determinación se efectuará mediante

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{g,Cd} = \mathbf{N}_{Cd} / (E \times F) \qquad [21]$$

Siendo E el módulo de elasticidad longitudinal del material y F la sección transversal.

Las expresiones del teorema de la fuerza unitario se transforman en

$$\{ \mathbf{1}_e \} \times \{ \mathbf{a}_{,1e,Cd} \}^t = \Sigma \int_l \mathbf{N}_{1e} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{g,Cd} \times d\mathbf{x} \qquad [22]$$

que para causas fuerza se transformará en

$$\{ \mathbf{1}_e \} \times \{ \mathbf{a}_{,1e,Cd} \}^t = \Sigma \int_l \mathbf{N}_{1e} \times \mathbf{N}_{Cd} \, / \, (E \times F) \times d\mathbf{x} \qquad [23]$$

5.- Sistemas constituidos por barras sometidas a torsión

En este caso el vector solicitaciones se reduce a una única componente que es el momento torsor, simplificándose las expresiones anteriores puesto que el vector solicitaciones tiene una sola componente. Es poco frecuente un sistema formado por barras que sólo estén sometidas a torsión, no obstante esta solicitación está presente en, prácticamente, la totalidad de las estructuras reales.

Con el objeto de simplificar los cálculos se asume, cuando la obtención del equilibrio así lo permite y los efectos de torsión no son relevantes en el problema en estudio, es modelo plano en el cual no existe la torsión.

La hipótesis del comportamiento mecánico del sistema surge mediante la aplicación de la matriz $[f_s]$

Las expresiones del teorema del desplazamiento unitario se transforman en este caso en

$$\{ \mathbf{C}_e \} \times \{ \mathbf{1}_{Ce,d} \}^t = \Sigma \int_l \mathbf{M}_{\mathbf{x}Ce} \times \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{x}g,1d} \times d\mathbf{x} \qquad [24]$$

extendiéndose la sumatoria a la totalidad de las barras que componen el sistema. Los esfuerzos normales en las distintas barras se calcularán por alguno de los métodos conocidos y la deformación del eje de la barra dependerá del tipo de causa deformante.

Si las causas deformantes generan momentos torsores en las barras la determinación de la curvatura se efectuará mediante

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{x}g,d} = \mathbf{M}_{\mathbf{x}Cd} \, / \, (G \times J_p) \qquad [25]$$

Siendo G el módulo de elasticidad transversal del material y J_p el momento de inercia polar de la sección transversal.

Las expresiones del teorema de la fuerza unitaria se transforman en

$$\{ \mathbf{1}_e \} \times \{ \mathbf{a}_{,1e,Cd} \}^t = \Sigma \int_l \mathbf{M}_{\mathbf{x}1e} \times \mathbf{M}_{\mathbf{x}Cd} \, / \, (G \times J_p) \times d\mathbf{x} \qquad [26]$$

6.- Sistemas constituidos por barras sometidas a flexión y a flexión y corte (flexión variable)

En este caso el vector solicitaciones puede tener, referido a la terna conformada por los ejes principales de inercia de la sección, cuatro componentes no nulas.

$$[\mathbf{S}_{Cd}]^t = (0 \,;\, \mathbf{Q}_y \,;\, \mathbf{Q}_z \,;\, 0 \,;\, \mathbf{M}_y \,;\, \mathbf{M}_z) \qquad [27]$$

En forma simplificada se pueden eliminar las componentes nulas y definir el comportamiento mecánico del sistema mediante la aplicación de la matriz $[f_s]$ reducida a estas componentes

Las expresiones del teorema del desplazamiento unitario se transforman en este caso en

$$\{ \mathbf{C}_e \} \times \{ \mathbf{1}_{Ce,d} \}^t = \Sigma \int_l (\mathbf{Q}_{yCe} \times \kappa_z/GF + \mathbf{Q}_{zCe} \times \kappa_y/GF + \mathbf{M}_{yCe}/EJ_y + \mathbf{M}_{zCe}/EJ_z) \times d\mathbf{x} \quad [28]$$

7.- Causas deformante variación de temperatura. Caso general

La variación de temperatura genera cambios de formas sin que existan solicitaciones en sistemas isostáticos, pero en sistemas hiperestáticos se pueden generar, adicionalmente solicitaciones

Las deformaciones de la rebanada, debidas al vector solicitaciones, originadas por la temperatura (en sistemas hiperestáticos), se determinan mediante la matriz $[f_s]$ indicada en [15]. Las deformaciones debidas a la variación de temperatura en cada barra dependen de la variación de temperatura correspondiente a la fibra superior de la barra y a la fibra inferior de la barra y se pueden expresar mediante una matriz $[b_{\Delta t}]$ que relaciona las deformaciones de la rebanada afectada por la variación de temperatura considerada.

Se considera, la variación lineal de la temperatura a través de la barra, lo que se corresponde con un material homogéneo y en los casos prácticos con un estado permanente. Se considera la variación de la temperatura a lo largo de uno de los ejes principales solamente. Seguidamente se asume que la variación se produce a lo largo del eje z.

$$[d\mathbf{a_g}/d\mathbf{x}] = \begin{vmatrix} ½ & ½ \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/h & 1/h \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_{ts} \\ \Delta_{ti} \end{vmatrix} \lambda \qquad [29]$$

Siendo en la matriz “h” la altura de la barra en la dirección del eje z

Aplicando esta relación en la expresión [19] se determina la expresión del teorema de la fuerza unitaria para causas deformantes variación de temperatura. Recordar que en sistemas hiperestáticos se debe considerar la deformación provocada por la temperatura y adicionarle la generada por las solicitaciones que la misma provoca.

8.- Ejemplos.

Seguidamente se incorporan ejemplos de aplicación de los conceptos expuestos.