

Teoría de Barras.

1. Introducción

El objeto del análisis estructural es, esencialmente, definir un modelo matemático que posibilite establecer relaciones entre causas y efectos. Se ha visto al describir el comportamiento de un medio continuo, que se podía conocer el comportamiento mecánico del mismo si se está en condiciones de determinar para cada uno de los puntos que lo componen el vector estado de tensión y el vector estado de deformación, lo cual implica conocer doce valores para cada uno de esos puntos.

Se puede, por lo tanto, definir que en todo medio continuo en equilibrio bajo la acción de una causa deformante existen doce incógnitas por cada uno de los puntos que lo componen.

Con el fin de poder establecer la posibilidad de determinar esas incógnitas se debe analizar el conjunto de ecuaciones con que se cuenta.

Se ha visto también que es posible plantear tres ecuaciones diferenciales de equilibrio y tres ecuaciones diferenciales de compatibilidad en torno a cada punto del medio continuo, lo que sumado a las seis ecuaciones constitutivas que relacionan tensiones con deformaciones, brindan un sistema de doce ecuaciones que permitirían la solución del problema planteado en algunos casos.

Adoptando la hipótesis de Hooke es posible encarar la determinación de la relación entre las causas y los efectos mediante la solución matemática de las mencionadas ecuaciones. Este camino es conocido como el de la **Teoría Matemática de la Elasticidad** y requiere como es fácil de inferir, un gran esfuerzo matemático.

Este tipo de tratamiento excede los alcances de un segundo curso de Análisis Estructural. En este curso se procederá a resolver una serie de problemas del tipo descripto, mediante la adopción de una serie de hipótesis simplificativas que permiten, en determinados sólidos, obtener resultados con un grado de precisión compatible con el que la técnica demanda en determinados casos.

El conjunto de hipótesis mencionadas se aplica a estructuras compuestas por sólidos en los cuales una de sus dimensiones es predominante con respecto a las restantes, **barras**, configurando el procedimiento identificado como de la **Resistencia de Materiales Clásica**.

2. Barras. Concepto general

Se denominan barras a los sólidos que tienen una dimensión predominante sobre las dos restantes. Estos sólidos pueden suponerse generados por el desplazamiento de una sección perpendicular a una curva a través del baricentro de la sección. La curva directriz se denomina **eje de la barra**.

Si la sección permanece constante en el desplazamiento se tendrán las barras de sección constante. Si el eje de la barra está contenido en un plano se tendrán las barras planas y si el eje es recto las barras de eje recto que serán objeto del estudio a efectuar salvo cuando se aclare especialmente lo contrario.

La definición de barra tiene un límite impreciso pues el concepto de "dimensión predominante" no es cuantificable. No obstante se comienza a considerar un sólido como barra cuando al menos la mayor dimensión es al menos el doble de cualesquiera de las otras dos. La validez de las conclusiones que se obtengan dependerá en la mayor parte de los casos de esta relación. Debe tenerse presente esta consideración al pretender la aplicación de las relaciones que se obtengan a través de las hipótesis que se incluyen en la Resistencia de Materiales.

Más adelante se formularán comentarios sobre la dependencia de los resultados en función de la relación de dimensiones del sólido en estudio.

Se procurará establecer, para estructuras formadas por barras, un modelo matemático que posibilite determinar la relación entre las causas externas a la estructura y los efectos estáticos y cinemáticos asociados a la misma.

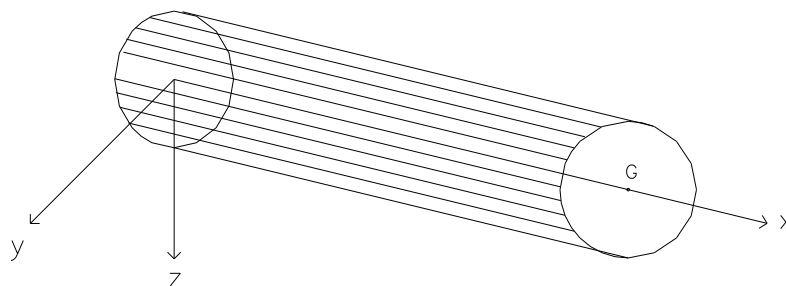


FIGURA 1

Para sistematizar el análisis de las barras se utilizará un sistema de referencia en coordenadas cartesianas locales para cada barra adoptando el eje x en la dirección del eje de la misma y para los ejes y y z las direcciones que se indican en la Figura 1. Se considerará positiva la cara en la cual la normal saliente a la misma coincide con el sentido del eje x .

Se ha visto, en cursos anteriores, el análisis estático de sistemas isostáticos compuestos por barras para los cuales se han determinado las reacciones de

vínculo y las solicitaciones en las diversas secciones mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio.

Se identificarán las solicitaciones en una sección genérica mediante el vector siguiente:

$$\{\mathbf{S}\}^t = \{\mathbf{N}, \mathbf{Q}_y, \mathbf{Q}_z, \mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z\}^t \quad [1]$$

La fuerza \mathbf{N} identifica en la dirección del eje x que con la actuante en la sección simétrica en el corte de la barra define el esfuerzo normal, las fuerzas $\mathbf{Q}_y, \mathbf{Q}_z$, definen de la misma manera el esfuerzo de corte en las dos direcciones contenidas en el plano de la sección. El momento \mathbf{M}_x define el momento torsor y los momentos $\mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z$ definen los momentos flectores.

En las estructuras planas el vector solicitaciones se reduce al esfuerzo normal, un esfuerzo de corte y un momento flector

$$\{\mathbf{S}\}^t = \{\mathbf{N}, \mathbf{Q}_z, \mathbf{M}_y\}^t \quad [2]$$

Tal como se ha visto las ecuaciones de equivalencia son las que vinculan las solicitaciones en una sección con las tensiones actuantes en los distintos elementos superficiales que componen la sección transversal definida.

Se pueden plantear las ecuaciones de equivalencia para una sección, en una barra genérica, en forma matricial como se observa a continuación a través de las matrices que se indican en [3]

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{Q}_y \\ \mathbf{Q}_z \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \mathbf{M}_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 & -z \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz $[\mathbf{H}]$ representa la condición de reducción para cada elemento de superficie de la sección transversal

En forma condensada es posible expresar la relación buscada mediante el siguiente producto matricial.

$$\{\mathbf{S}\} = \int_F [\mathbf{H}] \times \{\Gamma\} \times dF \quad [4]$$

A la matriz $[\mathbf{H}]$ se la denominará matriz estática dado que vincula dos vectores cuya magnitud es estática. Al vector $\{\Gamma\}$ se lo denominará vector estado de tensión dado que sus componentes identifican las componentes del estado de tensión en torno al punto en estudio.

Como se ha visto las ecuaciones de equivalencia son ecuaciones de equilibrio que permiten evaluar el carácter del problema que se analiza desde el punto de vista estático. En efecto, si se conoce el vector estado de tensión en todos los puntos de la sección transversal el problema es estáticamente determinado dado que es posible la determinación de las solicitaciones y con estas cualquier magnitud estática asociada a la estructura.

Si se desconoce el vector estado de tensión y sólo se conocen las solicitaciones se está en presencia de un problema estáticamente indeterminado puesto que el número de incógnitas supera al número de ecuaciones que brinda la estática.

Lo expuesto permite también interpretar al vector solicitaciones como el vector que contiene la información estática asociada a una determinada sección de una barra referida al baricentro de la sección.

3. Hipótesis básicas de la Resistencia de Materiales

Se describirán a continuación un conjunto de hipótesis que posibilitan encara el análisis de una barra en forma simplificada

3.1 Principio de Saint Venant

Saint Venant enunció un principio importante para la simplificación de los modelos de análisis que se aplican en sistemas continuos que expresa lo siguiente: ***en puntos del continuo suficientemente alejados de los de aplicación de las cargas exteriores el estado de tensión es independiente de la forma en que se aplican las cargas.***

En el enunciado de este principio existe la indefinición propia del término que define la distancia desde el punto en estudio al punto de aplicación de las cargas pero en general se puede considerar suficientemente alejado un punto cuando se encuentra a una distancia del orden de la mayor dimensión transversal de la barra.

En la Figura 2 se esquematizan tres barras sometidas a la misma fuerza resultante de tracción pero aplicada con una distribución distinta sobre la superficie de la barra. De acuerdo al Principio de Saint Venant el estado de tensión en el punto A, ubicado a una distancia d de la aplicación de la carga será el mismo en los tres casos.

Un corolario que se desprende del principio es que si se aplica un estado de cargas equilibrado en una dirección transversal al eje de una barra el efecto del mismo será nulo a una distancia del punto de aplicación del orden de la mayor dimensión de la sección transversal de la barra. En la Figura 3 se indica un caso de este tipo y la zona en la cual se registran tensiones.

Esta hipótesis permite utilizar en los análisis la simplificación de considerar fuerzas concentradas, en lugar de cargas distribuidas, siempre que los efectos generados por las mismas no se deban determinar en proximidades del punto de aplicación de las mismas.

Asimismo debe tenerse en cuenta que no serán aplicables las conclusiones que se obtengan de aplicar esta hipótesis en aquellas zonas donde se registren

discontinuidades geométricas, tales como nudos o articulaciones. En estas zonas deberá efectuarse un análisis detallado que considere las condiciones de borde tanto desde el punto de vista estático como cinemático recurriendo a la aplicación de la Teoría Matemática de la Elasticidad.

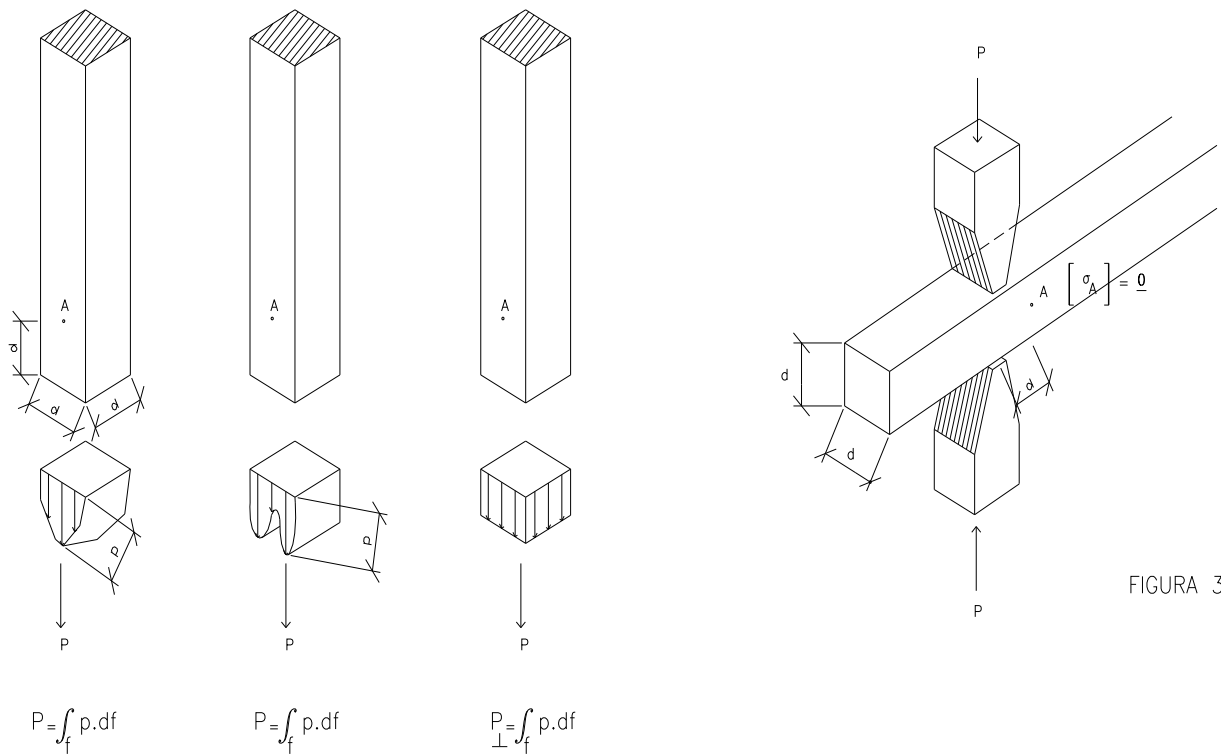


FIGURA 2

FIGURA 3

En lo que sigue se considerará aplicable el principio de Saint Venant.

3.2 Hipótesis de la sección plana

En el análisis de las barras se considerará la siguiente hipótesis cinemática: **Los puntos de una sección transversal de una barra ubicados en una sección transversal a la misma permanecerán en un plano luego de la deformación de la misma.**

En la Figura 4 se indican 3 puntos ubicados sobre una barra en un estado inicial y luego de producida una deformación de la misma. El plano definido por los tres puntos en la posición inicial contendrá a los tres puntos en la posición final. Tanto en la posición inicial como en la final estos planos permanecerán perpendiculares al eje de la barra

La adopción de esta hipótesis permite definir los corrimientos que experimenta cualquier punto de la sección transversal conociendo los corrimientos que experimenta el eje de la barra en su intersección con la sección en estudio.

Sea el baricentro de la sección transversal en estudio, el cual pertenece al eje de la barra, en su posición inicial \mathbf{G}_i y en su posición final \mathbf{G}_f ver Figura 4. El corrimiento se podrá expresar mediante el vector corrimiento $\{\mathbf{a}'_G\}$. Este vector indicará el desplazamiento que ha experimentado el punto perteneciente al plano que representa. Se puede imaginar el corrimiento posible de este plano descompuesto en una traslación y en una rotación alrededor de ejes que pasan por el punto que representa la traslación. El vector corrimiento tiene por componentes los corrimientos en la dirección de los ejes coordenados.

$$\{\mathbf{a}'_G\}^t = \{\mathbf{u}_G, \mathbf{v}_G, \mathbf{w}_G\}^t \quad [5]$$

La rotación de la sección transversal se podrá definir mediante un vector giro cuyas componentes serán los giros en correspondencia con los ejes coordenados

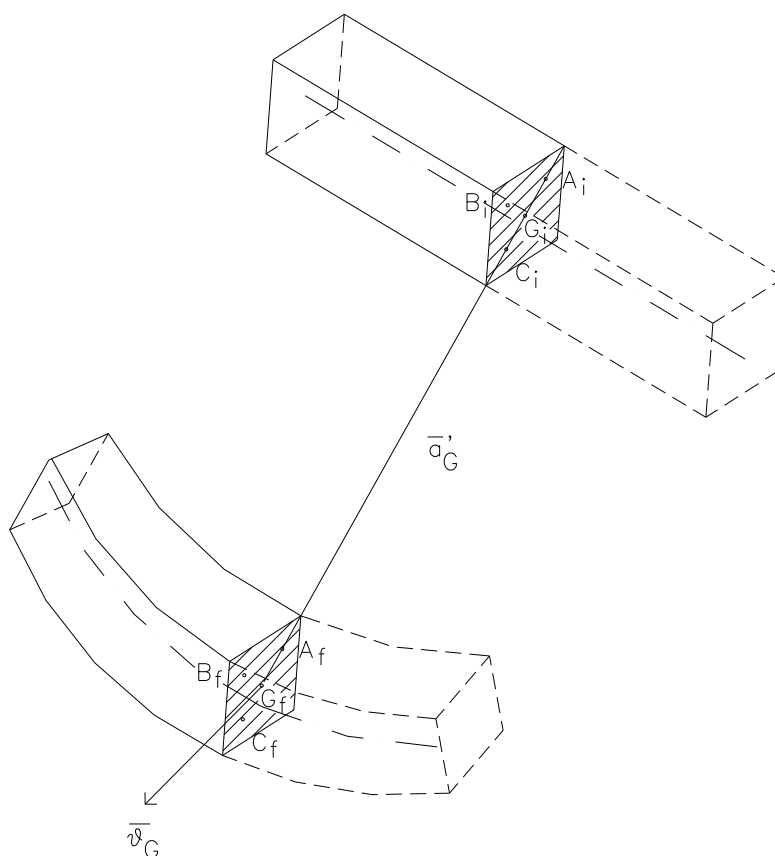


FIGURA 4

$$\{\theta_G\}^t = \{\theta_{xG}, \theta_{yG}, \theta_{zG}\}^t \quad [6]$$

Sobre la base de lo expuesto se puede definir el movimiento del plano mediante un vector que utilice como componentes la traslación y la rotación. A este vector se lo denominará vector del corrimiento generalizado del eje de la barra

$$\{\mathbf{a}_G\}^t = \{\mathbf{a}_G, \theta_G\}^t \quad [7]$$

Si se considera un punto genérico **A** de la sección transversal se definirá el corrimiento de este punto mediante el vector

$$\{\mathbf{a}_A\}^t = \{\mathbf{u}_A, \mathbf{v}_A, \mathbf{w}_A\}^t \quad [8]$$

A su vez será posible expresar el corrimiento del punto **A** en función del vector corrimiento generalizado

$$\{\mathbf{a}_A\} = [\mathbf{A}_a] \times \{\mathbf{a}_G\} \quad [9]$$

La matriz $[\mathbf{A}_a]$ se denominará matriz cinemática porque vincula dos magnitudes cinemáticas y será, de acuerdo a lo que se deduce de la Figura 5, igual a:

[10]

$$A_a := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

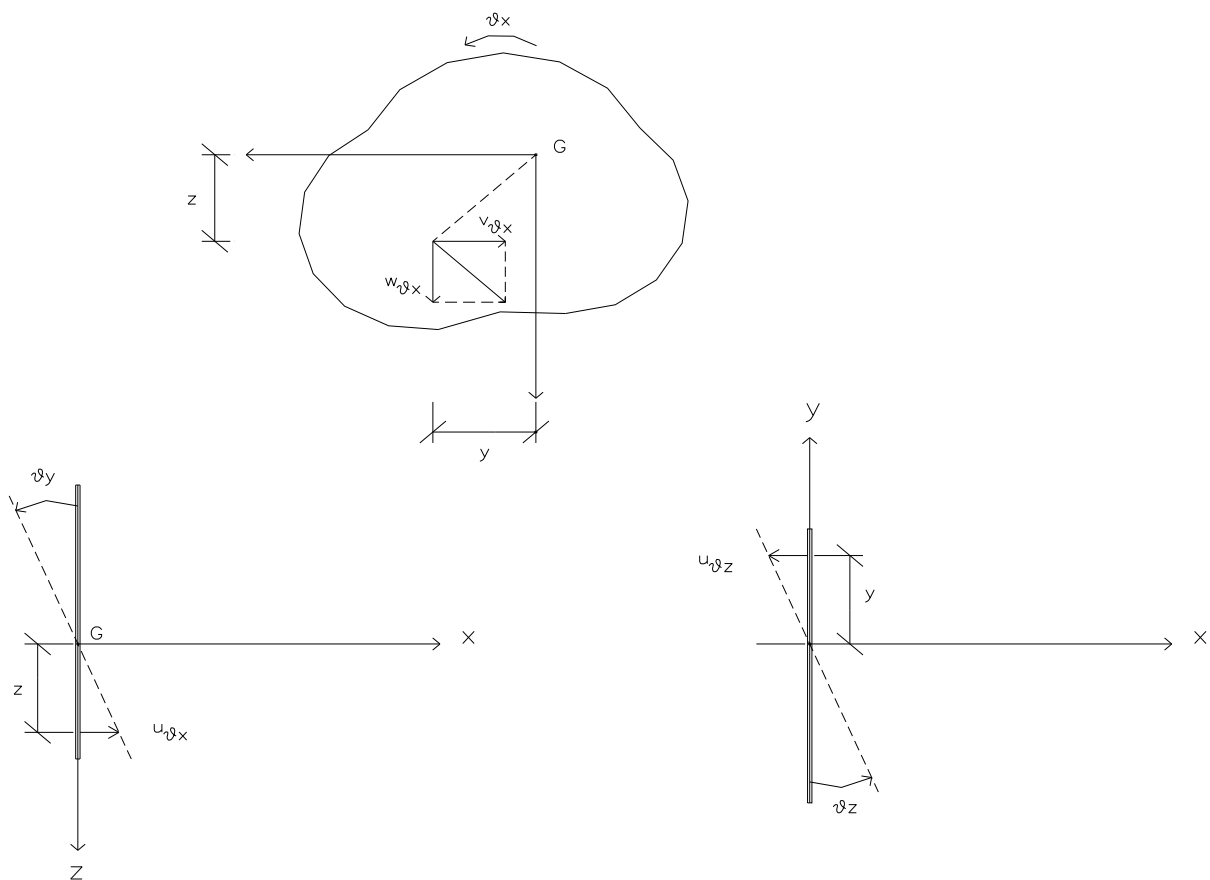


FIGURA 5

3.3 Tensiones normales de dirección perpendicular al eje de la barra y tensiones tangenciales en planos perpendiculares a la sección transversal

En las barras se asume como hipótesis simplificadoras que las tensiones normales de direcciones perpendiculares al eje de la barra σ_y y σ_z y las tensiones tangenciales τ_{yz} y τ_{zy} de dirección paralela a la sección son nulas.

Esta suposición surge de asumir que las cargas transversales a la barra, de existir, no generan, en general, tensiones normales relevantes en estas direcciones y por Cauchy tensiones tangenciales significativas. Las dimensiones reducidas en el sentido transversal y la continuidad de las funciones de tensión facilitan la adopción de esta hipótesis sin mayores demostraciones.

De existir fuerzas transversales concentradas en superficies muy reducidas, de acuerdo a lo visto al enunciar el Principio de Saint Venant, las conclusiones que se obtienen con la aplicación de la Resistencia de Materiales Clásica no son aplicables. No obstante en la mayoría de estos casos, las tensiones que se generan son muy inferiores a las tensiones normales que se desarrollan en la dirección del eje de la barra lo cual justifica la adopción de esta hipótesis.

La consecuencia de la adopción de esta hipótesis es la obtención de estados de tensiones simples o dobles en las barras.

4. Relación entre deformaciones en un punto genérico de una sección transversal y el cambio de forma del eje de la barra

Las deformaciones en torno a un punto se han definido mediante el estudio de los corrimientos relativos con respecto a los puntos contiguos.

Si los corrimientos que experimentan los puntos de una sección pueden ser descritos por los corrimientos que experimenta el eje de la barra, el análisis de los corrimientos relativos entre dos puntos infinitamente próximos del eje podrán definirse mediante los corrimientos relativos que experimentan dos puntos contiguos del eje de la barra.

A los efectos de visualizar lo expuesto se supondrá que durante la deformación se generan corrimientos relativos en la dirección de cada una de las coordenadas utilizadas para definir el vector $\{\mathbf{a}_G\}$, considerando al efecto el cambio de forma que experimenta el volumen definido por dos secciones separadas en dx al que podemos identificar como una “rebanada” de la barra.

Se comienza analizando el corrimiento un corrimiento relativo entre dos puntos contiguos del eje de una barra en la dirección del eje de la misma

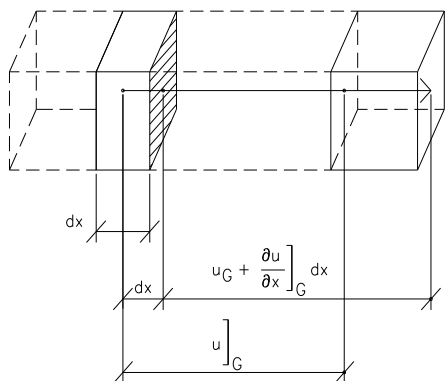


FIGURA 6a

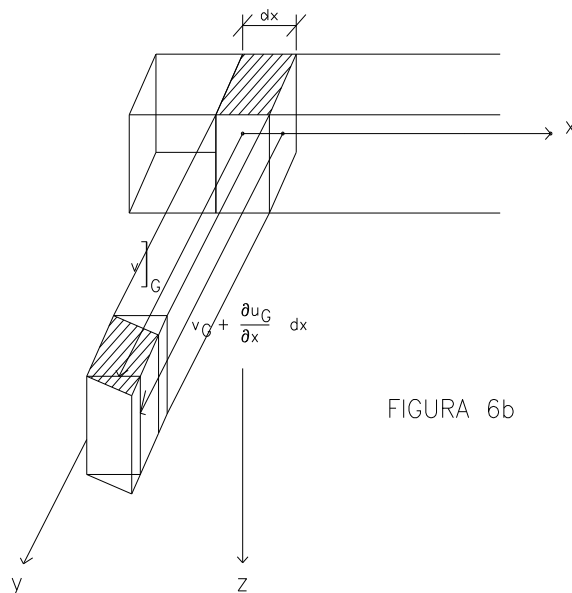


FIGURA 6b

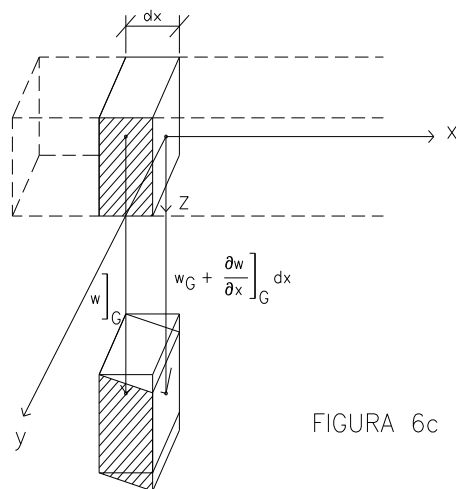


FIGURA 6c

$$du]_G = \partial u / \partial x]_G dx \quad [11]$$

Este diferencial será igual al aumento de distancia en la dirección considerada de ambas caras de la “rebanada”, tal como se indica en la Figura 6a. También se puede identificar a este corrimiento relativo como la deformación longitudinal específica en la dirección x en torno al baricentro de la sección transversal multiplicada por el espesor de la rebanada.

$$du]_G = \epsilon_{xG} \times dx \quad [12]$$

Con un razonamiento similar se obtiene en la dirección y , tal como se indica en la Figura 6b

$$d\mathbf{v}]_G = \partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{x}]_G d\mathbf{x} \quad [13]$$

Este diferencial será igual al corrimiento relativo de ambas caras de la rebanada en la dirección del eje y , perpendicular al eje x . El corrimiento debido a un cambio de forma puede ser identificado como la distorsión angular de los ejes xy multiplicada por el espesor de la rebanada.

$$d\mathbf{v}]_G = \gamma_{xyG} \times d\mathbf{x} \quad [14]$$

Lo mismo ocurre al analizar el corrimiento en la dirección del eje z

$$d\mathbf{w}]_G = \gamma_{xzG} \times d\mathbf{x} \quad [15]$$

Los corrimientos relativos de este tipo son expresables mediante componentes de deformación ya analizadas al estudiar el estado de deformación en torno a un punto. La situación cambia cuando debe describirse el giro relativo entre ambas caras de la "rebanada" luego de la deformación pues se tiene según se indica en la Figura 7a

$$d\theta_x]_G = \partial\theta_x/\partial\mathbf{x}]_G d\mathbf{x} \quad [16]$$

La derivada del giro con respecto a la coordenada x puede ser representada como la variación del giro con respecto al arco en la medida en que se considere una geometría donde la tangente, el seno y el ángulo se puedan igualar. En ese caso la variación del ángulo con respecto a la proyección del arco será igual a la variación del ángulo con respecto al arco es decir la curvatura. Cuando se verifica esta condición se señala que se ha adoptado la hipótesis de la Linealidad Cinemática.

La expresión [15] se transforma en:

$$d\theta_x]_G = \chi_x]_G d\mathbf{x} \quad [17]$$

De la misma manera puede interpretarse el giro en las direcciones de los otros dos ejes:

$$d\theta_y]_G = \partial\theta_y/\partial\mathbf{x}]_G d\mathbf{x} = \chi_y]_G d\mathbf{x} \quad [18]$$

$$d\theta_z]_G = \partial\theta_z/\partial\mathbf{x}]_G d\mathbf{x} = \chi_z]_G d\mathbf{x}$$

Derivando la expresión [9] con respecto a x se obtiene

$$\{d\mathbf{a}_A/dx\} = [\mathbf{A}_a] \times \{d\mathbf{a}_G/dx\} \quad [19]$$

Las componentes del vector del primer miembro de la expresión [19] son por definición la deformación longitudinal específica en la dirección del eje de la barra y las distorsiones angulares de las direcciones xy y xz . En el segundo miembro

se obtienen las deformaciones asociadas a la “rebanada” en análisis referidas, en el razonamiento realizado, al eje de la barra

$$\{\epsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}\}^t_A = [A_a] \times \{\epsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{zx}, \chi_x, \chi_y, \chi_z\}^t_G \quad [20]$$

La expresión obtenida permite determinar las componentes del vector estado de deformación en cualquier punto de la barra conociendo el cambio de forma que ha experimentado el eje de la barra.

Si se pretendiese determinar la expresión completa del vector estado de deformación en un punto genérico de la sección transversal debería completarse el vector incluido en el primer miembro de la expresión [20] con las restantes componentes de deformación que por las hipótesis adoptadas precedentemente deben tener los siguientes valores

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \epsilon_x \quad [21]$$

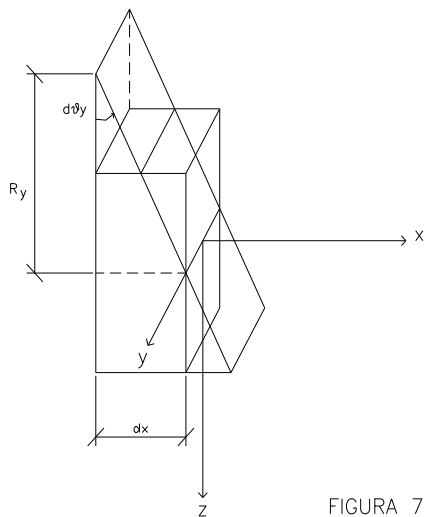


FIGURA 7b

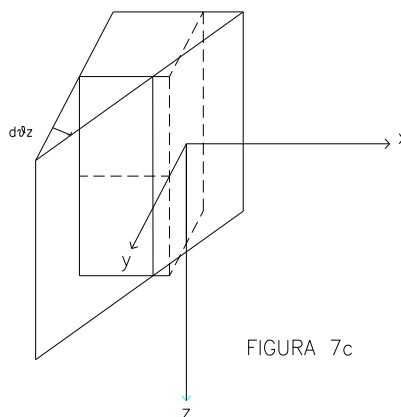


FIGURA 7c

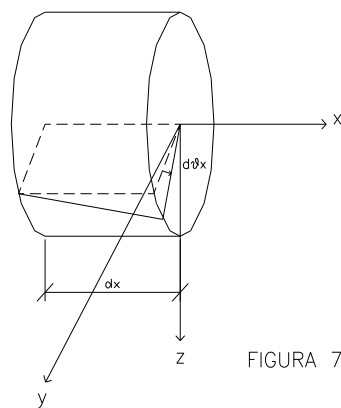


FIGURA 7a

dado que por las hipótesis formuladas las tensiones normales en las direcciones y y z son nulas.

Además se verifica que

$$\gamma_{yz} = 0 \quad [22]$$

Si se identifica al vector estado de deformación con el vector $\{\Psi\}_A$ en el punto genérico A cuyas componentes son:

$$\{\Psi\}_A^t = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}_A^t \quad [23]$$

es posible transformar la ecuación [19] en

$$\{\Psi\}_A^t = [\mathbf{A}] \times \{d\mathbf{a}_G/dx\} \quad [24]$$

que posibilita obtener el estado de deformación en cualquier punto de la barra. La matriz $[\mathbf{A}]$ se modifica a

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & -\mu \cdot z & \mu \cdot y \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & -\mu \cdot z & \mu \cdot y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \text{coeficiente de Poisson} \quad [25]$$

5. Relación entre las sollicitaciones y las deformaciones del eje de la barra

De la expresión [4] es posible determinar el estado de tensión en cada punto de la barra en términos de las deformaciones del eje de la misma mediante la matriz obtenida con las hipótesis planteadas sobre el comportamiento de los materiales (Linealidad mecánica, homogeneidad e isotropía)

Se identifica al vector estado de tensión como:

$$\{\Gamma\}_A^t = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}_A^t \quad [26]$$

La matriz que vincula el estado de tensión con el estado de deformación con ajuste a las hipótesis mencionadas se identifica como $[\mathbf{R}]$ [27]

La matriz $[\mathbf{R}]$ es la inversa de la matriz $[\mathbf{F}]$, $[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}]^{-1}$

$$F := \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2 \cdot (1 + \mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2 \cdot (1 + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2 \cdot (1 + \mu)} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{E}$$

$$F^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E - E \cdot \mu}{2 \cdot \mu^2 + \mu - 1} & -\frac{E \cdot \mu}{2 \cdot \mu^2 + \mu - 1} & -\frac{E \cdot \mu}{2 \cdot \mu^2 + \mu - 1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E \cdot \mu}{2 \cdot \mu^2 + \mu - 1} & \frac{E - E \cdot \mu}{2 \cdot \mu^2 + \mu - 1} & -\frac{E \cdot \mu}{2 \cdot \mu^2 + \mu - 1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E \cdot \mu}{2 \cdot \mu^2 + \mu - 1} & -\frac{E \cdot \mu}{2 \cdot \mu^2 + \mu - 1} & \frac{E - E \cdot \mu}{2 \cdot \mu^2 + \mu - 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot E + 2 \cdot E \cdot \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot E + 2 \cdot E \cdot \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot E + 2 \cdot E \cdot \mu \end{pmatrix}$$

E: Módulo de elasticidad longitudinal del material

Se plantea la relación

$$\{\Gamma\}_A = [\mathbf{R}] \times \{\Psi\}_A \quad [28]$$

Reemplazando en la [24] se obtiene

$$\{\Gamma\}_A = [\mathbf{R}] \times [\mathbf{A}] \times \{d\mathbf{a}_G/dx\} \quad [29]$$

Sustituyendo en la [4] se obtiene

$$\{\mathbf{S}\} = \int_F [\mathbf{H}] \times [\mathbf{R}] \times [\mathbf{A}] \times \{d\mathbf{a}_G/dx\} \times dF \quad [30]$$

Siendo $\{d\mathbf{a}_G/dx\}$, el vector que registra el cambio de forma del eje de la barra, constante para toda la sección se lo puede extraer de la integral resultando

$$H(\mathbf{R}_a, \mathbf{A}) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} \frac{\mu-1}{2\mu^2+\mu-1} + \frac{2\mu^2}{2\mu^2+\mu-1} & 0 & 0 & 0 & \frac{z(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} + \frac{2\mu^2 z}{2\mu^2+\mu-1} & -\frac{y(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} - \frac{2\mu^2 y}{2\mu^2+\mu-1} \\ 0 & 2\mu+2 & 0 & -z(2\mu+2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu+2 & y(2\mu+2) & 0 & 0 \\ 0 & -z(2\mu+2) & y(2\mu+2) & (2\mu+2)y^2 + (2\mu+2)z^2 & 0 & 0 \\ \hline z \left(\frac{\mu-1}{2\mu^2+\mu-1} + \frac{2\mu^2}{2\mu^2+\mu-1} \right) & 0 & 0 & 0 & z \left[\frac{z(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} + \frac{2\mu^2 z}{2\mu^2+\mu-1} \right] & -z \left[\frac{y(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} + \frac{2\mu^2 y}{2\mu^2+\mu-1} \right] \\ -y \left(\frac{\mu-1}{2\mu^2+\mu-1} + \frac{2\mu^2}{2\mu^2+\mu-1} \right) & 0 & 0 & 0 & -y \left[\frac{z(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} + \frac{2\mu^2 z}{2\mu^2+\mu-1} \right] & y \left[\frac{y(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} + \frac{2\mu^2 y}{2\mu^2+\mu-1} \right] \end{array} \right]$$

$$\{\mathbf{S}\} = \left\{ \int_V [\mathbf{H}] \times [\mathbf{R}] \times [\mathbf{A}] \times dV \right\} \{d\mathbf{a}_G/dx\} \quad [31]$$

Se observa que la integral de la expresión [30] depende de las características geométricas y mecánicas de la sección transversal exclusivamente por lo tanto es posible determinarla con independencia de las causas deformantes que actúan sobre la sección.

La resolución de la integral posibilita la obtención de una matriz que vincula las sollicitaciones en la sección con el cambio de forma que experimenta el eje de la barra en correspondencia con la misma.

Si se identifica como $[\mathbf{R}_s]$ la matriz resultante se obtiene

$$[\mathbf{R}_s] = \left\{ \int_V [\mathbf{H}] \times [\mathbf{R}] \times [\mathbf{A}] \times dV \right\} \quad [32]$$

$$\mathbf{R}_s := \begin{pmatrix} \mathbf{EF} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{ES}_y & -\mathbf{ES}_z \\ 0 & \mathbf{GF} & 0 & -\mathbf{GS}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{GF} & \mathbf{GS}_z & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{GS}_y & \mathbf{GS}_z & \mathbf{GJ}_p & 0 & 0 \\ \mathbf{ES}_y & 0 & 0 & 0 & \mathbf{EJ}_y & \mathbf{EJ}_{yz} \\ -\mathbf{ES}_z & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{EJ}_{yz} & \mathbf{EJ}_z \end{pmatrix}$$

En esta matriz los términos de cada uno de los elementos se corresponden con el producto de una de las propiedades de la sección transversal respecto a un par de ejes genéricos baricéntricos por uno de los módulos de elasticidad del material constitutivo de la barra

- G: Módulo de elasticidad transversal
- S: Momento estático
- J: Momento centrífugo, momento de inercia y momento de inercia polar

Asimismo es fácil observar que si se eligiese como sistema de referencia un sistema ortogonal baricéntricos coincidente con las direcciones principales de inercia de la sección transversal se anularían los momentos estáticos y el momento centrífugo reduciéndose la matriz a una matriz diagonal que posibilita determinar la relación entre las solicitaciones y las deformaciones del eje de la barra en forma directa mediante una expresión sencilla.

La expresión general será

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{R}_s] \times \{d\mathbf{a}_G/dx\} \quad [33]$$

o bien adoptando la terna principal con la matriz $[\mathbf{R}_{sp}]$

$$R_{sp} := \begin{pmatrix} EF & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GF & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GF & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_z \end{pmatrix}$$

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{R}_{sp}] \times \{d\mathbf{a}_G/dx\} \quad [34]$$

La matriz diagonal obtenida permite corroborar la independencia existente entre cada una de las solicitaciones definidas con la correspondiente deformación del eje de la barra.

Dado que la matriz $[\mathbf{R}_{sp}]$ no puede ser singular se podrá determinar su inversa para definir el vector cambio de forma en función de las solicitaciones actuantes en la sección

$$\{d\mathbf{a}_G/dx\} = [\mathbf{R}_{sp}]^{-1} \times \{\mathbf{S}\} \quad [35]$$

Esta expresión posibilita la resolución del problema planteado puesto que conocido el vector cambio de forma mediante la aplicación de la expresión [29] se puede determinar el vector estado de tensión en cualquier punto de la sección y conocido éste es posible mediante la aplicación de la relación [28], determinar el estado de deformación, lo cual permitiría estática y cinemáticamente definir el comportamiento de cada uno de los puntos de la barra en función de las solicitaciones.

La expresión [35] matemáticamente define además la ecuación diferencial de eje deformado de la barra en función de las solicitaciones actuantes. Estas expresiones se conocen como las ecuaciones diferenciales de la elástica de la barra de eje recto.

Se destaca lo señalado en el sentido de poder definir las diversas componentes de la deformada de la barra en forma independiente para cada una de las sollicitaciones mediante la adopción del sistema de referencia indicado.

6. Relación entre sollicitaciones y tensiones o deformaciones en cualquier punto de la barra

Para determinar el estado de deformación en cualquier punto de la sección transversal es suficiente aplicar las relaciones encontradas

De [24] y [35]

$$\{\Psi\}_A^t = [\mathbf{A}] \times [\mathbf{R}_{sp}]^{-1} \times \{\mathbf{S}\} \quad [36]$$

$$f_{ls} := \begin{pmatrix} \frac{1}{EF} & 0 & 0 & 0 & \frac{z}{EJ_y} & \frac{-y}{EJ_z} \\ \frac{-\mu}{EF} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu \cdot z}{EJ_y} & \frac{\mu y}{EJ_z} \\ \frac{-\mu}{EF} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu \cdot z}{EJ_y} & \frac{\mu y}{EJ_z} \\ 0 & \frac{1}{GF} & 0 & \frac{-z}{GJ_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GF} & \frac{y}{GJ_p} & 0 \end{pmatrix}$$

Llamando a la matriz que vincula las deformaciones con las sollicitaciones

$$[\mathbf{f}] = [\mathbf{A}] \times [\mathbf{R}_{sp}]^{-1} \quad [37]$$

De la expresión [36] se pueden obtener conclusiones de interés como ser:

- a. Las deformaciones específicas longitudinales son función del esfuerzo normal y de los momentos flectores

$$\varepsilon_x = \mathbf{N}/E \cdot F + \mathbf{M}_y \cdot z/E \cdot J_y - \mathbf{M}_z \cdot y/E \cdot J_z \quad [38]$$

- b. Las distorsiones específicas son función de los esfuerzos de corte y del momento torsor

$$\gamma_{xy} = \mathbf{Q}_y /G \cdot F - \mathbf{M}_x \cdot z/G \cdot J_p \quad [39]$$

Lo expuesto se observa claramente si se reordena la matriz $[\mathbf{f}]$ mediante las dos matrices subsiguientes: [40]

$$f_{ls} := \begin{pmatrix} 1 & z & -y \\ EF & EJ_y & EJ_z \\ -\mu & -\mu \cdot z & \mu y \\ EF & EJ_y & EJ_z \\ -\mu & -\mu \cdot z & \mu y \\ EF & EJ_y & EJ_z \end{pmatrix}$$

Esta matriz relaciona las deformaciones longitudinales específicas con el esfuerzo normal, y los momentos flectores

$$\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}^t = [f_{ls}] \{N, M_y, M_z\}^t \quad [41]$$

y la matriz $[f_{ds}]$ que relaciona las deformaciones angulares específicas con los esfuerzos de corte y el momento torsor

$$f_{ds} := \begin{bmatrix} \frac{1}{G \cdot F} & 0 & \frac{-z}{G \cdot J_p} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G \cdot F} & \frac{y}{G \cdot J_p} \end{bmatrix}$$

Que se puede sintetizar como

$$\{\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^t = [f_{ds}] \{Q_y, Q_z, M_x\}^t \quad [43]$$

Es fácil observar que la matriz $[f]$ ordenada según las submatrices precedentes puede ser escrita como sigue:

$$f_s := \begin{bmatrix} f_{ls} & 0 \\ 0 & f_{ds} \end{bmatrix}$$

Esta expresión permite justificar el ordenamiento que habitualmente se sigue para el análisis de las relaciones causa efecto entre las distintas sollicitaciones. Por un lado se encara el estudio de la flexión compuesta (esfuerzo normal y flexión) y por otro lado se analiza el esfuerzo de corte y la torsión.

La expresión [36] permite la determinación del estado de deformación en cualquier punto de la sección transversal. Conocido el estado de deformación es posible la determinación del estado de tensión en forma inmediata de acuerdo a lo visto. De la expresión [28] y la [36] se obtiene

$$\{\Gamma\}_A = [R] \times [A] \times [R_{sp}]^{-1} \times \{S\} \quad [45]$$

o bien

$$\{\Gamma\}_A = [\mathbf{r}] \times \{\mathbf{S}\} \quad [46]$$

donde

$$[\mathbf{r}] = [\mathbf{R}] \times [\mathbf{A}] \times [\mathbf{R}_{sp}]^{-1} \quad [47]$$

$$r := \begin{bmatrix} \frac{1}{F} & 0 & 0 & 0 & \frac{z}{J_y} & \frac{-y}{J_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F} & 0 & \frac{-z}{J_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F} & \frac{-y}{J_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de esta relación se pueden expresar las relaciones que posibilitan identificar las tensiones actuantes en el plano de la sección

$$\sigma_x = \mathbf{N}/F + \mathbf{M}_y \cdot z/J_y - \mathbf{M}_z \cdot y/J_z \quad [48]$$

Las tensiones normales resultan de desarrollar la primera fila de la expresión [45] y posibilita la determinación de las tensiones normales que se originan frente a una sollicitación de flexión compuesta.

Asimismo desarrollando la cuarta y sexta fila se obtienen las tensiones tangenciales

$$\tau_{xy} = \mathbf{Q}_y / F - \mathbf{M}_x \cdot z/J_p \quad [49]$$

$$\tau_{xz} = \mathbf{Q}_y / F - \mathbf{M}_x \cdot y/J_p \quad [50]$$

Se observa de estas expresiones que el esfuerzo de corte generaría una tensión tangencial uniforme sobre toda la sección transversal mientras que el momento torsor da lugar a tensiones tangenciales variables con los valores máximos en los puntos más alejados del baricentro de la sección transversal.

En el caso de la tensión tangencial debido al esfuerzo de corte, por las ecuaciones de equivalencia la dirección de las tensiones debe coincidir con la del esfuerzo de corte por lo cual se obtendrían en los bordes de la sección transversal perpendiculares a esa dirección tensiones tangenciales no nulas. Esta situación, es incompatible con lo postulado por el Teorema de Cauchy dado que las tensiones tangenciales en el perímetro de la barra son nulas.

Se llega, por lo tanto, a un resultado incompatible con una condición de equilibrio lo cual revelaría que alguna de las hipótesis adoptadas es incorrecta. La

existencia misma de las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo de corte constituye un apartamiento de la hipótesis del mantenimiento de las secciones planas una vez deformada la estructura puesto que estas tensiones son consecuencia de distorsiones incompatibles con la mencionada hipótesis.

Oportunamente se verá un procedimiento para salvar esta incongruencia mediante un procedimiento también aproximado basado en la obtención de una solución equilibrada que satisface la condición de Cauchy (Teoría de Jourawski)

Las tensiones tangenciales debidas al momento torsor satisfacen la condición de Cauchy si la sección transversal es circular pero no si la sección presenta discontinuidades en su perímetro. En este último caso se presenta también una incongruencia debido a que no se verifica la hipótesis de la sección plana luego de la deformación. No son válidas las expresiones obtenidas por este procedimiento.

7. Análisis crítico de los resultados obtenidos

Las incongruencias obtenidas en el modelo planteado en las tensiones tangenciales pueden hacer presumir la inaplicabilidad del mismo debido a la no verificación de la hipótesis de las secciones planas.

Si bien el modelo no concuerda exactamente con el comportamiento del continuo se demuestra experimentalmente que el mismo permite obtener una aproximación razonable para el nivel de precisión que requieren las aplicaciones prácticas en la determinación de las tensiones normales debidas a la flexión compuesta y las deformaciones longitudinales específicas asociadas a las mismas y para la determinación de las tensiones tangenciales y las distorsiones angulares específicas debidas a la torsión en las secciones circulares.

Situaciones como las planteadas con los resultados obtenidos del análisis realizado se presentan en la resolución de los problemas que aborda la ingeniería y son consecuencia de la incertidumbre que se encuentra presente en toda hipótesis que debe ser introducida para generar el paso de la realidad al modelo de análisis.

Los apartamientos propios de todo modelo deben ser evaluados experimentalmente a fin de acotar la aplicabilidad del mismo y justificar la búsqueda de nuevas soluciones que reduzcan la incertidumbre que es el principal aliciente para la investigación en el campo de la ingeniería