

TEORÍAS DE ROTURA O FALLA O DE LOS ESTADOS LÍMITE

El estado límite de falla se define como aquel que lleva a la estructura o parte de la misma a dejar de comportarse dentro de los parámetros mecánicos preestablecidos como admisibles dentro del período de comportamiento lineal elástico, o no lineal (plástico), del cuerpo deformable.

En particular si la falla la definimos en un punto cualquiera del cuerpo deformable, sometido a cargas de cualquier origen, esta nos conducirá a los criterios de rotura o falla que analizaremos. En este caso el límite lo determina la capacidad de resistencia en el punto mas solicitado del cuerpo o estructura. Este límite correspondera a la tensión definida como última (fluencia y/o rotura frágil) según el tipo de material.

Si la falla la definimos no en un punto si no en una sección, sobre la cual existirá algún esfuerzo interno, aplicado en la sección, esta estará definida por la **capacidad límite de resistencia de la sección mas solicitada**. Esta capacidad límite estará asociada a la reserva de resistencia de la sección agotando su deformación plástica, lo que nos conduce al **esfuerzo último de la sección. De este tema nos ocuparemos mas adelante en la materia.**

Si la falla la definimos como falla de la estructura, el estado límite corresponderá a la **carga última de la estructura que lleva a la misma al colapso (carga de colapso)**, una vez agotada la capacidad de reserva plástica de la estructura, que se convertirá en un mecanismo. **De este tema nos ocuparemos mas adelante en la materia.**

Los criterios en que se basan las diferentes teorías de falla en un punto están asociados a los parámetros mecánicos que se toman como determinantes de la falla o del estado límite.

En general cada problema particular corresponderá a un determinado estado de tensión y/o deformación complejo, cuyo análisis podrá conducirnos a la obtención del parámetro mecánico de interés, según el criterio de falla adoptado.

Este parámetro deberá tener algún **patrón de comparación. Este patrón de comparación corresponderá al mismo parámetro mecánico de análisis pero comprobado experimentalmente a traves de ensayo de laboratorio.**

El ensayo de laboratorio mas simple de realizar es el ensayo de tracción simple y/o compresión simple. A traves de estos se obtienen las características mecánicas del material, que serán los que me permitan comparar los dos estados.

Estos ensayos corresponden a un **estado de tensión simple o axial y que es el mismo simultaneamente en todos los puntos de la sección transversal. Consecuentemente el estado de tensión complejo de nuestro problema será comparado con el estado de tensión simple. Esto nos permite obtener valores límites en forma experimental en laboratorio.**

Conceptualmente este planteo considera al estado de tensión complejo de nuestro problema como igualmente peligroso al estado de tensión simple, que materializamos en el laboratorio para los distintos materiales, valorando los parámetros mecánicos del material correspondiente a nuestro problema, según el criterio de falla aplicado, en forma experimental.

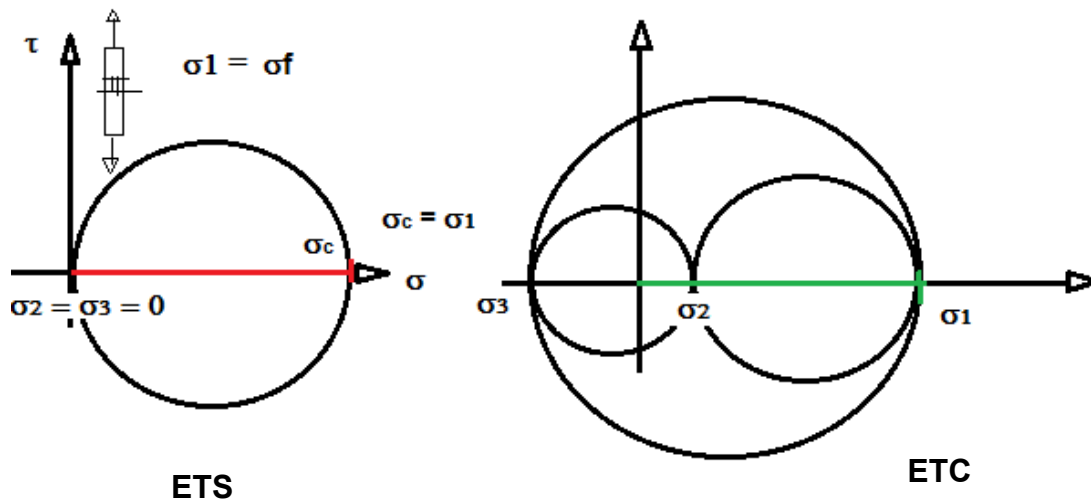
Las Teorías que analizamos son las siguientes (las que consideramos mas importantes):

- 1- Teoría de la Máxima Tensión Normal Principal (T. de Rankine):
- 2- Teoría de la Maxima Deformación Específica Principal (T. de Saint Venant).
- 3- Teoría de la Máxima Tensión Tangencial (T. de Guest- Coulomb).
- 4- Teoría del Máximo Trabajo de Distorsión o Cambio de Forma (T. Von Mises-Huber-Hencky).
- 5- Teoría de Mohr (Teoría general experimental).

Nota: Las Expresiones generales de todas las teorías son funciones de las Tensiones Principales, por lo tanto el estudio del ET para cada problema es la base de la solución. Las expresiones de cada teoría también se expresan por las componentes del ET.

1- Teoría de la Máxima Tensión Normal Principal (T. de Rankine):

Por medio de la construcción gráfica de la circunferencia de Mohr planteamos la comparación del estado de tensión simple con el estado de tensión complejo, evidenciando la tensión de comparación correspondiente.



$\sigma_c = \sigma_{fl}$ Si material Dúctil

$\sigma_c = \sigma_r$ Si material frágil

$\frac{\sigma_{fl}}{\nu} = \sigma_c = \sigma_{(adm)}$

Si : ν = Coeficiente de seguridad

$\nu = \frac{\sigma_{fl}}{\sigma_c}$ O $\nu = \frac{\sigma_r}{\sigma_c}$

La Fórmula de Verificación o Dimensionamiento surge de la relación:

$\sigma_1 \leq \sigma_c = \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$

Si : $|\sigma_3| > |\sigma_1|$ será: $|\sigma_3| \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$

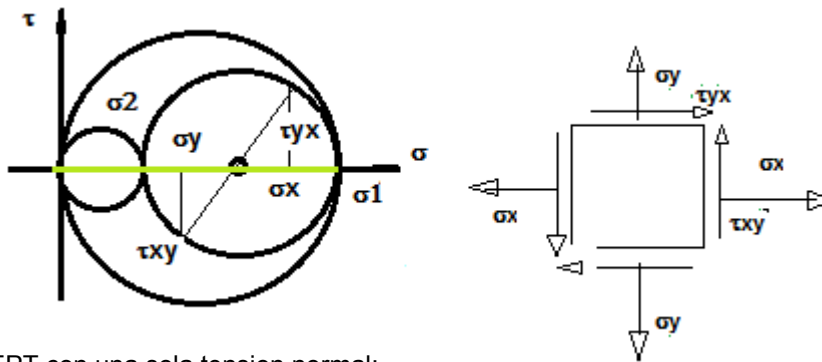
Autor: Ing. Eduardo Rofrano

Si expresamos las Tensiones Principales en función de las componentes de nuestro estado de tensión complejo y este corresponde (como en la mayoría de los casos de aplicación práctica) a un estado plano o biaxial de tensiones (EPT) tendremos los siguientes tres casos particulares:

EPT con ambas tensiones normales:

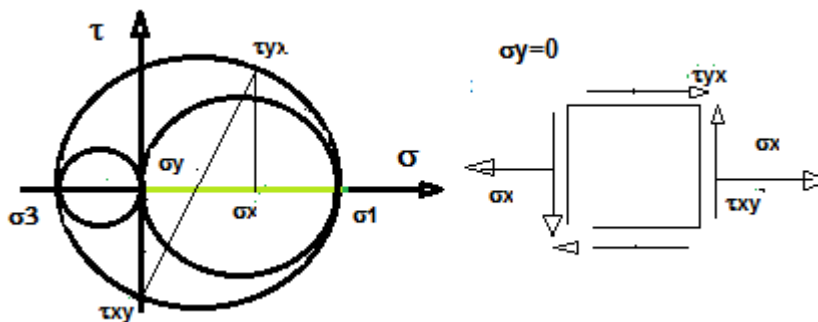
$$\sigma_c = \sigma_1 \quad \text{Máxima Tensión Principal}$$

$$\sigma_c = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$$



EPT con una sola tension normal:

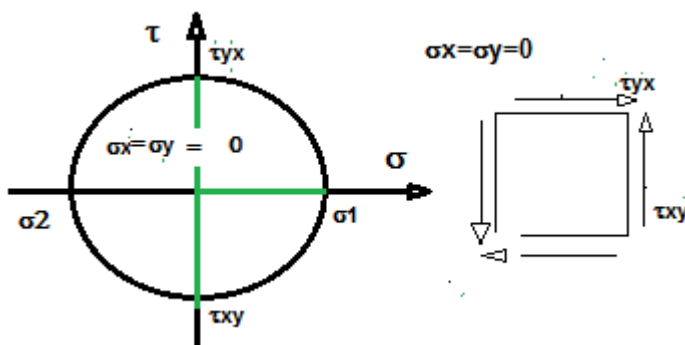
$$\sigma_c = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$$



EPT con solo tensiones tangenciales(resbalamiento puro):

$$\sigma_c = \tau_{xy} \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu} \quad (1)$$

Para esta Teoría la relación entre las tensiones tangenciales y normales es:

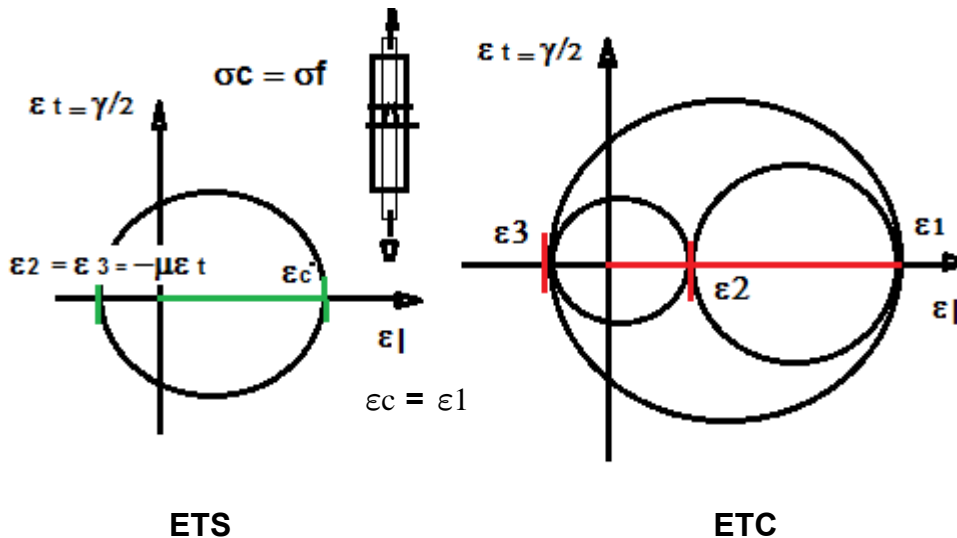


$$\tau = \sigma$$

Autor: Ing. Eduardo Rofrano

2- Teoría de la Maxima Deformación Específica Principal (T. de Saint Venant).

Por medio de la construcción gráfica de la circunferencia de Mohr planteamos la comparación del estado de Deformación simple con el estado de Deformación complejo, evidenciando la tensión de comparación correspondiente.



$$\sigma_c = E \cdot \epsilon_c$$

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E}$$

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\epsilon_c = \epsilon_1$$

$$\sigma_c = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq \frac{\sigma_f}{\nu}$$

Si expresamos las Tensiones Principales en función de las componentes de nuestro estado de tensión complejo asociado y este corresponde (como en la mayoría de los casos de aplicación práctica) a un estado plano o biaxial de tensiones (EPT) tendremos los siguientes tres casos particulares:

EPT con ambas tensiones normales:

$$\sigma_2 = 0$$

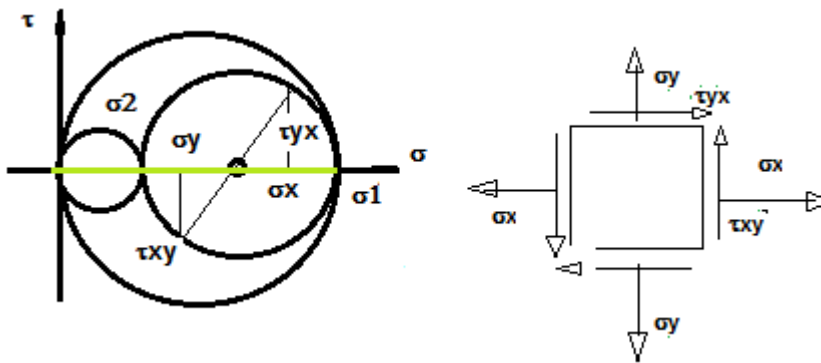
$$\sigma_c = \sigma_{\max} - \mu \cdot \sigma_{\min}$$

$$\sigma_c = \sigma_1 - \mu \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_c = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} - \mu \cdot \left[\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \right]$$

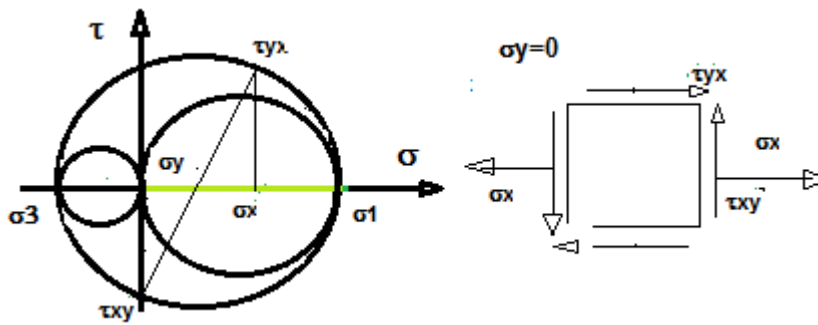
$$\sigma_c = \frac{(1 - \mu)(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(1 + \mu)}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \frac{\sigma_f}{\nu}$$

Autor: Ing. Eduardo Rofrano



EPT con una sola tension normal:

$$\sigma_c = \frac{(1 - \mu) \cdot \sigma_x}{2} + \frac{(1 + \mu)}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$$



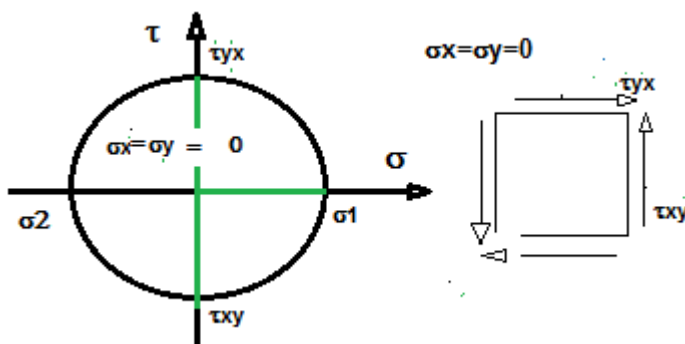
EPT con solo tensiones tangenciales (resbalamiento puro):

$$\sigma_c = \frac{(1 + \mu)}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$$

Para esta Teoría la relación entre las tensiones tangenciales y normales es: si $\mu = 0,25$ (v. medio)

$$\sigma_c = (1 + \mu) \cdot \tau_{xy} \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu} \quad (2)$$

$$\tau = \frac{1}{1.25} \cdot \sigma$$

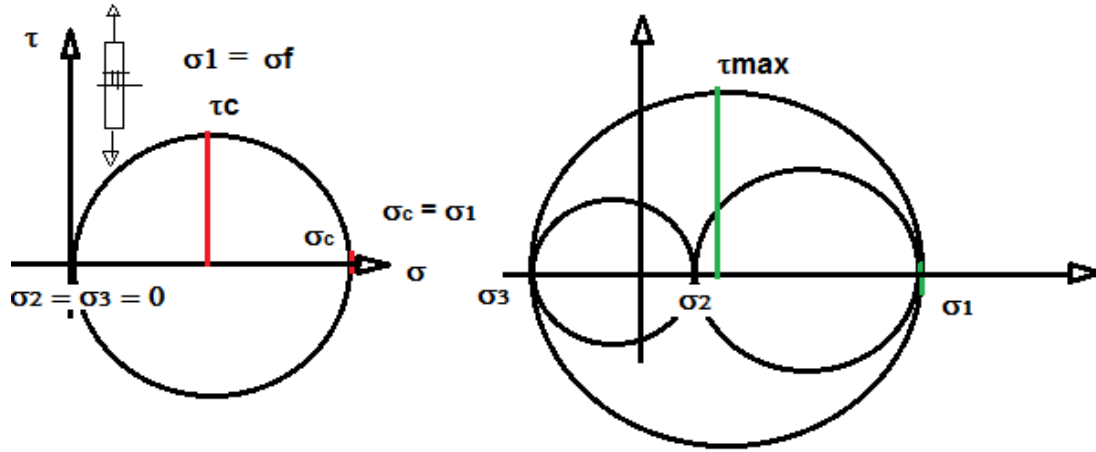


$$\tau = 0.8 \cdot \sigma$$

Autor: Ing. Eduardo Rofrano

3- Teoría de la Máxima Tensión Tangencial (T. de Guest- Coulomb)

Por medio de la construcción gráfica de la circunferencia de Mohr planteamos la comparación del estado de Tensión simple con el estado de Tensión complejo, evidenciando la tensión de comparación correspondiente.



ETS

$$\tau_c = \frac{\sigma_c}{2}$$

$$\tau_c = \tau_{max}$$

ETC

$$\tau_{max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

$$\sigma_c = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{\sigma_f}{\nu}$$

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

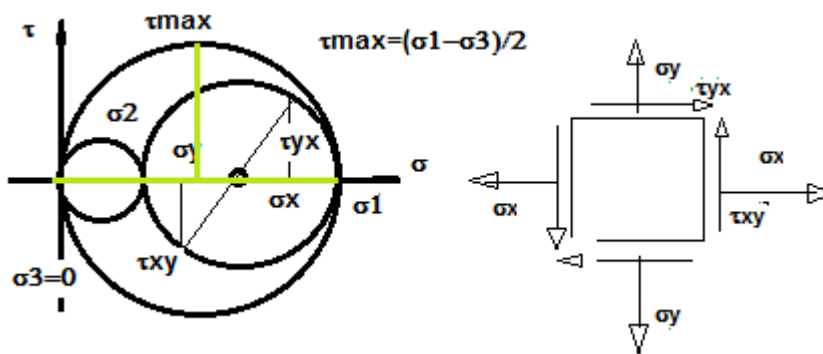
$$\sigma_3 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Si expresamos las Tensiones Principales en función de las componentes de nuestro estado de tensión complejo y este corresponde (como en la mayoría de los casos de aplicación práctica) a un estado plano o biaxial de tensiones (**EPT**) tendremos los siguientes tres casos particulares:

EPT con ambas tensiones normales:

$$\sigma_c = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \frac{\sigma_f}{\nu}$$

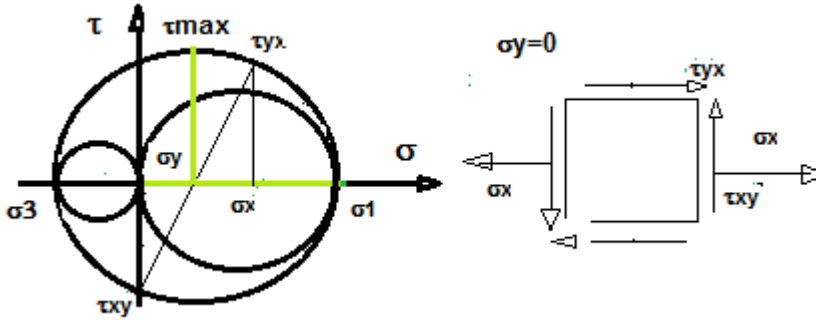
$$\tau_{max} = \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}}{2} \leq \frac{\sigma_f}{\nu}$$



Autor: Ing. Eduardo Rofrano

EPT con una sola tension normal:

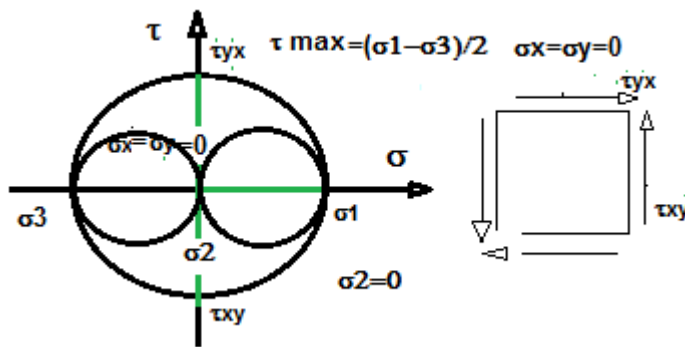
$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$$



EPT con solo tensiones tangenciales(resbalamiento puro):

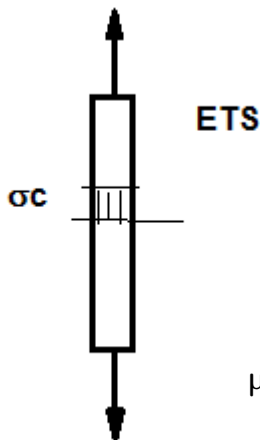
$$\sigma_c = 2 \cdot \tau_{xy} \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu} \quad (3)$$

Para esta Teoría la relación entre las tensiones tangenciales y normales es:



$$\tau = 0.5 \cdot \sigma$$

4- Teoría del Máximo Trabajo de Distorsión o Cambio de Forma (T. Von Mises- Huber-Hencky).



Energía de Deformación por cambio de forma del ETS:

$$\mu_{cfets} = \frac{(1 + \mu)}{6 \cdot E} \cdot 2 \cdot \sigma_c^2 \quad \sigma_c = \sigma_1$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Energía de Deformación por cambio de forma del ETC:

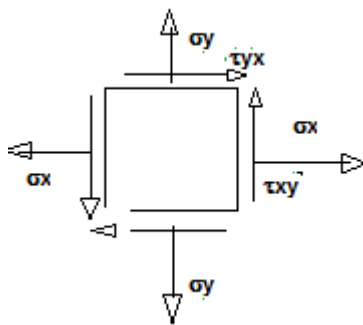
$$\mu_{cfetc} = \frac{(1 + \mu)}{6 \cdot E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Autor: Ing. Eduardo Rofrano

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \leq \frac{\sigma_f}{\nu}$$

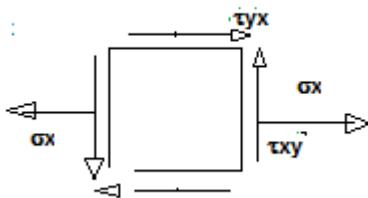
Si expresamos las Tensiones Principales en función de las componentes de nuestro estado de tensión complejo y este corresponde (como en la mayoría de los casos de aplicación práctica) a un estado plano o biaxial de tensiones (EPT) tendremos los siguientes tres casos particulares:

EPT con ambas tensiones normales:



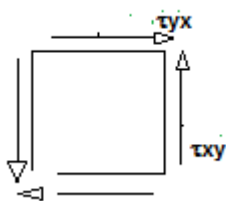
$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \frac{\sigma_f}{\nu}$$

EPT con una sola tensión normal:



$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \frac{\sigma_f}{\nu}$$

EPT con solo tensiones tangenciales(resbalamiento puro):



$$\sigma_c = \sqrt{3} \cdot \tau_{xy} \leq \frac{\sigma_f}{\nu} \quad (4)$$

Para esta Teoría la relación entre las tensiones tangenciales y normales es:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sigma$$

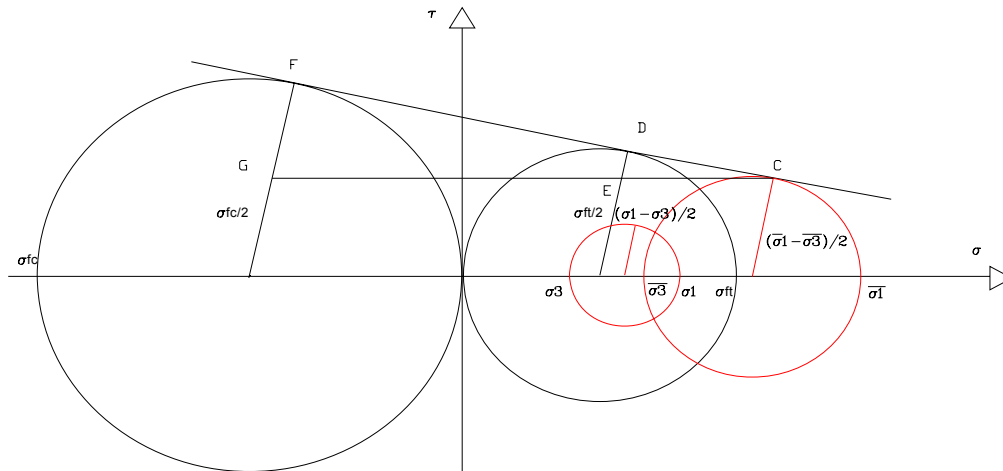
$$\tau = 0.577 \cdot \sigma$$

Autor: Ing. Eduardo Rofrano

5- Teoría de Mohr (Teoría general experimental).

TEORIA EXPERIMENTAL DE MOHR: Desarrollo basado según el planteo de "Resistencia de Materiales" de FEODOSIEV . Ediciones Sapiens, reproducción de Editorial Mir.

En base a los ensayos de tracción y compresión pura de un material cualquiera obtenemos el gráfico de la figura, que usamos para el análisis. Este nos permite, a través de la geometría relacionar los estados de tracción y compresión límites con el estado de tensión de nuestro problema y el estado límite correspondiente al mismo, y llegar a una expresión de uso general para esta teoría que es general ya que permite su aplicación a materiales cuya resistencia a compresión y tracción sean distintas. La circunferencia de Mohr roja, dentro el período elástico, corresponde al estado de tensión de nuestro problema y la circunferencia de Mohr roja tangente a la curva intrínseca o límite corresponde al límite de rotura del material.



Se plantea la siguiente relación por semejanza de triángulos:

$$\frac{DE}{CE} = \frac{FG}{CG}$$

Reemplazando los segmentos según la figura de análisis y desarrollando algebraicamente obtenemos:

$$FG = \frac{\sigma_{fc}}{2} - \frac{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)}{2} \quad DE = \frac{\sigma_{ft}}{2} - \frac{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)}{2}$$

$$CE = \frac{(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)}{2} - \frac{\sigma_{ft}}{2} \quad CG = \frac{\sigma_{fc}}{2} + \frac{\sigma_{ft}}{2} + \left[\frac{(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)}{2} - \frac{\sigma_{ft}}{2} \right]$$

$$\bar{\sigma}_1 = \nu \cdot \sigma_1 \quad \bar{\sigma}_3 = \nu \cdot \sigma_3 \quad K = \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}} \quad \sigma_c = \frac{\sigma_{ft}}{\nu}$$

Autor: Ing. Eduardo Rofrano

$$\frac{\frac{\sigma_{ft}}{2} - \frac{(\overline{\sigma_1} - \overline{\sigma_3})}{2}}{\frac{(\overline{\sigma_1} + \overline{\sigma_3})}{2} - \frac{\sigma_{ft}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sigma_{fc}}{2} - \frac{\overline{\sigma_1} - \overline{\sigma_3}}{2}\right)}{\left[\frac{\sigma_{fc}}{2} + \frac{\sigma_{ft}}{2} + \left[\frac{(\overline{\sigma_1} + \overline{\sigma_3})}{2} - \frac{\sigma_{ft}}{2}\right]\right]} \quad \sigma_{fc} = \frac{\sigma_{ft}}{K} \quad \sigma_c = \frac{\sigma_{ft}}{\nu}$$

$$\frac{\frac{\sigma_{ft}}{2} - \frac{(\nu \cdot \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_3)}{2}}{\frac{(\nu \cdot \sigma_1 + \nu \cdot \sigma_3)}{2} - \frac{\sigma_{ft}}{2}} \text{ simplify} \rightarrow \frac{2 \cdot \nu \cdot \sigma_3}{\nu \cdot \sigma_1 - \sigma_{ft} + \nu \cdot \sigma_3} - 1$$

$$\frac{\left(\frac{\sigma_{fc}}{2} - \frac{\nu \cdot \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_3}{2}\right)}{\left[\frac{\sigma_{fc}}{2} + \frac{\sigma_{ft}}{2} + \left[\frac{(\nu \cdot \sigma_1 + \nu \cdot \sigma_3)}{2} - \frac{\sigma_{ft}}{2}\right]\right]} \text{ simplify} \rightarrow \frac{2 \cdot \sigma_{fc} + 2 \cdot \nu \cdot \sigma_3}{\sigma_{fc} + \nu \cdot \sigma_1 + \nu \cdot \sigma_3} - 1$$

$$\frac{2 \cdot \frac{\sigma_{ft}}{K} + 2 \cdot \nu \cdot \sigma_3}{\frac{\sigma_{ft}}{K} + \nu \cdot \sigma_1 + \nu \cdot \sigma_3} = \frac{2 \cdot \nu \cdot \sigma_3}{\nu \cdot \sigma_1 - \sigma_{ft} + \nu \cdot \sigma_3} \quad \text{(Dividiendo ambos miembros por el coef. de seguridad v obtenemos)}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{\sigma_c}{K} + 2 \cdot \sigma_3}{\frac{\sigma_c}{K} + \sigma_1 + \sigma_3} = \frac{2 \cdot \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_c + \sigma_3} \text{ solve, } \sigma_c \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 - K \cdot \sigma_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_c = \sigma_1 - K \cdot \sigma_3$$

Si el material tiene igual resistencia a tracción y compresión se obtiene la expresión coincidente con la teoría de la máxima Tensión Tangencial:

siendo. $K := 1$

$$\sigma_c = \sigma_1 - \sigma_3$$

Autor: Ing. Eduardo Rofrano

Desarrollando la expresión anterior en función de las componentes del tensor de tensiones de nuestro problema obtenemos:

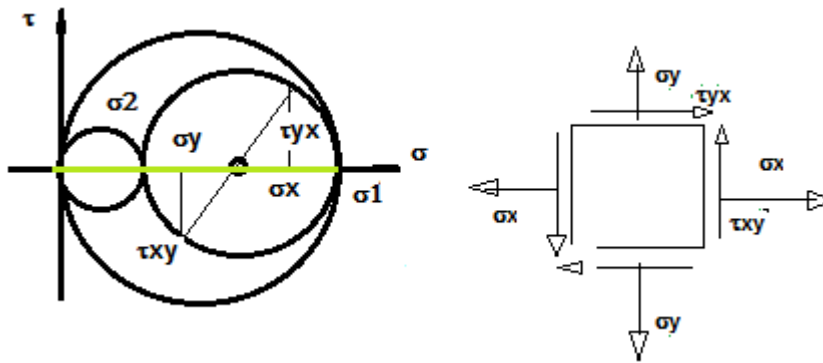
Si expresamos las Tensiones Principales en función de las componentes de nuestro estado de tensión complejo y este corresponde (como en la mayoría de los casos de aplicación práctica) a un estado plano o biaxial de tensiones (EPT) tendremos los siguientes tres casos particulares:

EPT con ambas tensiones normales:

σ_1 Máxima Tensión Principal

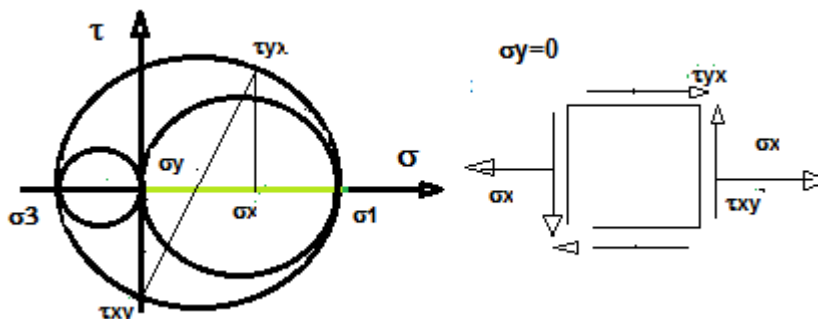
σ_3 Mínima Tensión Principal

$$\sigma_c = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} - K \cdot \left[\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \right]$$



EPT con una sola tensión normal:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} - K \cdot \left(\frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \right) \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$$



Autor: Ing. Eduardo Rofrano

EPT con solo tensiones tangenciales(resbalamiento puro):

Si consideramos un material frágil de muy baja resistencia a tracción en relación a la de compresión, por ejemplo un hormigón, esta teoría nos conduce a resultados similares a la de Rankine, dependiendo la rotura se las máximas tensiones principales

$$\sigma_{ft} := 20 \quad \sigma_{fc} := 300$$

$$K := \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}}$$

$$K = 0.067$$

$$\sigma_c = \tau_{xy} + K \cdot \tau_{xy} \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$$

$$1 + K = 1.067$$

$$\sigma_c = \tau_{xy} \cdot (1 + K) \leq \frac{\sigma_{fl}}{\nu}$$

Para este material y esta Teoría la relación entre las tensiones tangenciales y normales es:

$$\sigma_c = \tau_{xy} \cdot (1 + K)$$

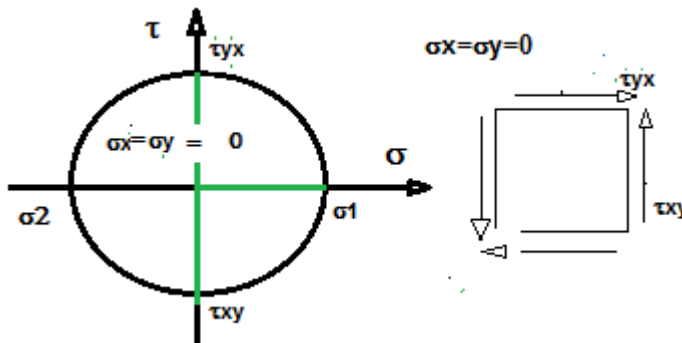
$$\sigma_c = 1.067 \cdot \tau_{xy}$$

$$\tau = 0.937 \cdot \sigma$$

$$\frac{1}{1.067} = 0.937$$

Prácticamente igual a:

$$\tau = \sigma \quad (1)$$



Si consideramos nula la resistencia a tracción del hormigón, coincide con la T. de La Máxima Tensión Principal.

Si es fundición con valores de resistencia de:

$$\sigma_{ft} := 800 \quad \sigma_{fc} := 1400$$

$$K := \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}}$$

$$K = 0.571$$

$$1 + K = 1.571$$

$$\sigma_c = \tau_{xy} \cdot (1 + K)$$

$$\sigma_c = 1.571 \tau_{xy}$$

$$\frac{1}{1.571} = 0.637$$

Para este material y esta Teoría la relación entre las tensiones tangenciales y normales es:

$$\tau = 0.637 \cdot \sigma$$

Conclusiones:

Las teorías de **Rankine y Saint Venat** son aplicables a **materiales frágiles**. Sus resultados han sido acordes con la experiencia con suficiente aproximación.

Las teorías de **Guest-Coulomb y Von Mises** son aplicables a materiales Dúctiles. Sus resultados han sido acordes con la experiencia con suficiente aproximación.

En relación a estas últimas, la mas adecuada es la de **Von Mises** ya que la relación entre las tensiones tangenciales y normales se han comprobado experimentalmente que se ajustan mas a la realidad que las de las tensiones tangenciales máximas. ($\tau=0.577.\sigma$). En la práctica ingenieril se aproxima esta relación para el análisis de estructuras metálicas a $\tau= 0.6.\sigma$.

La **Teoría de Mohr** es una teoría general válida para materiales con diferente resistencia a tracción y compresión, aplicable a materiales frágiles y dúctiles. Por ejemplo en el caso del H^o coincide con la de Máxima Tensión Principal, y en el acero suministra resultados iguales a la de la Máxima Tensión Tangencial. Se adapta mejor a materiales frágiles.

$$\overline{y^2} \leq \frac{\sigma f l}{\nu}$$

$$\overline{y^2} \leq \frac{\sigma f l}{\nu}$$