Capítulo 1

Relaciones entre tensiones y deformaciones

1.1 *Introducción a las ecuaciones constitutivas*

Hasta el momento en lo que va del desarrollo del comportamiento del solido vimos en un capitulo tensiones, y en otro deformaciones. En las ecuaciones del continuo tenemos por un lado la estática, que relaciona tensiones con fuerzas. Estas ecuaciones nos dan por ejemplo las relaciones de equivalencia, o las ecuaciones de equilibrio. Por otro lado está la cinemática que relaciona deformaciones y desplazamientos, y nos da ecuaciones de compatibilidad de deformaciones. Las relaciones constitutivas son las relaciones que conectan estos dos campos. En nuestro caso relacionamos tensiones con deformaciones. De esta forma cerramos la cadena de calculo, y podemos con fuerzas calcular desplazamientos.

El termino "relaciones constitutivas" es en realidad es mucho más general de lo vemos en este curso. Se llama relación constitutiva a cualquier ecuación que vincula variables energéticamente conjugadas, como velocidad de flujo con presión, o gradiente término con flujo de calor.

Entonces, para el caso de tensiones-deformaciones podemos decir que, matemáticamente, una ecuación constitutiva es un conjunto de fórmulas que determina el estado tensional del material después de cualquier cambio en su configuración. Esas relaciones dependerán de parámetros materiales, particulares del modelo utilizado. Cada modelos constitutivos reproducen algunas (no todas) de las características de los materiales. En este curso veremos unicamente la relación más simple, que es para materiales isótropos, elásticos, y lineales.

1.2 *Relaciones entre tensiones y Deformaciones*

Entonces, una ecuación constitutiva me tiene relacionar el tensor de tensiones con el tensor de deformaciones. Matemáticamente la relación entre estos tensores se da con un tensor de orden superior (T_C) que relaciona las 9 componentes de cada tensor

$$\left[T_T\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad ; \quad \left[T_D\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad ; \quad \left[T_T\right] = \left[\left[T_C\right]\right] : \left[T_D\right]$$

Aprovechando la simetría de los tensores, podemos reescribirlo como un arreglo más sencillo de forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{xxxx} & \dots & C_{xxxz} \\ \vdots & \ddots & \\ C_{xzxx} & & C_{xzxz} \end{bmatrix}}_{\text{matriz constitutiva}} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

Esta matriz constitutiva tiene como máximo 36 variables independientes. Si se dan las hipótesis energéticas de Green, debe ser simétrica y por lo tanto tiene como máximo 21 variables independientes. Para el caso de materiales ortótropos, como la madera o las matrices reforzadas con fibras, las variables independientes bajan a 9. Para este caso las deformaciones normales se desacoplan de las tensiones tangenciales, y las tangenciales de las normales. Finalmente, para materiales isótropos se puede demostrar que la matriz constitutiva tiene como máximo 2 variables independientes. Este es el caso del material elástico de Hooke, que sigue la relación:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Siendo E el módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young; G el módulo de elasticidad transversal, módulo de cizalla, o módulo de corte; μ el coeficiente de Poisson.

1.3 Desacople en comportamiento normal, tangencial, volumétrico, y desviador

Como las componentes normales están desacopladas de las tangenciales podemos separar el sistema en la parte normal, que matricialmente es

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

o como sistema de ecuaciones

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \sigma_x - \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_y - \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_z$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \sigma_y - \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_x - \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \sigma_z - \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_y - \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_x$$

Por separado se pueden calcular las relaciones tangenciales

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \cdot \tau_{xy} \quad ; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G} \cdot \tau_{xz} \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \cdot \tau_{yz}$$

Usando la relación entre direcciones normales se puede despejar que

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{3(1-2\mu)}{E} \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = K \cdot p$$

Siendo p la presión hidroestática, que es igual al primer invariante dividido 3. Finalmente, podemos despejar el módulo de compresibilidad efectivo K

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

El parámetro K nos dice que tan compresible es nuestro material. Dicho valor debe ser mayor que 0, lo cual indica que el módulo E también debe ser mayor que 0. Si $K = 0$ significaría que el material es incompresible. Para que se de este caso el módulo de Poisson tiene que ser igual a 0.5, lo cual establece un límite en este parámetro. Por razones similares se puede demostrar que G también debe ser mayor que 0. De lo cual se despeja el segundo límite para el coeficiente de Poisson, resultando en $-1 < \mu < 0.5$, aunque en general la gran mayoría de los materiales siguen la relación $0 < \mu < 0.5$.