

ESTADO DE DEFORMACIÓN
EN PUNTOS DE UN MEDIO CONTINUO

Ing. Jorge D. Kornitz

Febrero 2002

Prólogo

El presente trabajo tiene por objetivo desarrollar el concepto de Estado de Deformación en el entorno de un punto de un medio continuo con un enfoque que describe claramente el problema físico y conduce a resultados formalmente análogos a los obtenidos en el estudio del correspondiente Estado de Tensión en el entorno de un punto.

La novedad del enfoque propuesto consiste en asociar a cada dirección pasante por un punto del medio un vector deformación específica así como en el estudio tensional se asocia a cada normal a un plano un vector tensión

Es así que a una dirección arbitraria pasante por un punto dado estarán asociados dos vectores:

Uno el vector tensión asociado al plano cuya normal es la dirección propuesta y otro
El vector deformación específica asociado a esa misma dirección

Agradezco la colaboración y paciencia de la Srta. Daniela Capatto quien tuvo la ingrata tarea de interpretar y soportar mis innumerables correcciones.

Agradezco también a los Ing. José T. Rusell y Horacio Minetto por la lectura y observaciones efectuadas al original

Buenos Aires, Febrero de 2002

Estado de Deformación en Puntos de un Medio Continuo

Generalidades

Los cuerpos bajo la acción de diversas causas (cargas, variación de temperatura y cedimentos de vínculo), se deforman. Es decir, modifican la distancia entre sus puntos, varían los ángulos entre sus direcciones y su volumen.

Se analizará la deformación en el entorno de un punto de un medio continuo, efectuando las siguientes hipótesis:

- La deformación es continua. Los puntos pertenecientes al entorno del punto considerado siguen perteneciendo al entorno del punto en la posición deformada. Quedan excluidos por lo tanto, los casos de rotura o discontinuidad del medio.
- Las curvas en el entorno del punto mantienen su grado durante la deformación. Es decir, una recta seguirá siendo una recta luego de la deformación, una circunferencia en la posición original se transformará en otra curva de segundo grado (circunferencia, elipse, etc.).
- Los desplazamientos son infinitamente pequeños frente a las otras dimensiones en juego.

Repaso de cinemática del cuerpo rígido

Cinemática es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos prescindiendo de las causas que lo originan.

Un punto A de un cuerpo en movimiento ocupará en el transcurso del mismo diversas posiciones respecto de una terna supuesta fija hasta arribar a su posición final A' (Figura 1).

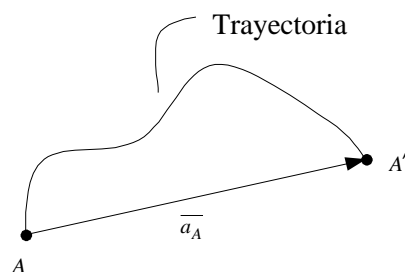


Figura 1

Se denomina **Trayectoria del punto A** a la línea continua formada con las sucesivas posiciones que ocupa al producirse el movimiento.

Se define como **Desplazamiento del punto A** (a_A) al vector con origen en la posición inicial del punto A y extremo en la posición final del mismo. El desplazamiento del punto A es una magnitud vectorial, siendo a_A un vector aplicado.

El estudio a efectuar es atemporal, es decir independiente del tiempo transcurrido, interesando solamente la posición inicial y final del cuerpo.

En ambos casos (Trayectoria o Desplazamiento) no se ha considerado el tiempo transcurrido para que A alcance la posición A'.

Movimientos simples del cuerpo rígido

a) Traslación:

Un cuerpo experimenta una **traslación** cuando todos los puntos del mismo tienen desplazamientos paralelos, de igual intensidad y sentido.

$$\overline{a_A} // \overline{a_B} // \overline{a_C} = \overline{b}$$

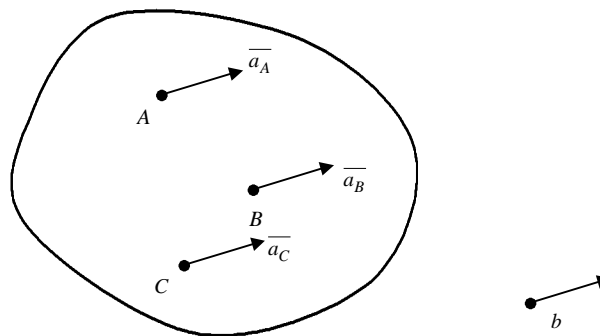


Figura 2

La traslación se caracteriza mediante un vector b cuya dirección será paralela a los desplazamientos de los puntos y su intensidad y sentido igual a los mismos.

El vector traslación b resulta ser un vector libre, puesto que independientemente de su ubicación en el espacio define el mismo movimiento.

b) Rotación de un cuerpo alrededor de un eje:

Un cuerpo experimenta **una rotación alrededor de un eje**, cuando seccionando con planos normales al eje, las trayectorias de los puntos del cuerpo pertenecientes a uno cualquiera de dichos planos resultan ser arcos de circunferencia concéntricas con la intersección del plano con el eje, de forma tal que el ángulo central correspondiente a los mismos es constante (q) y se denomina intensidad de la rotación. Ver figura 3.

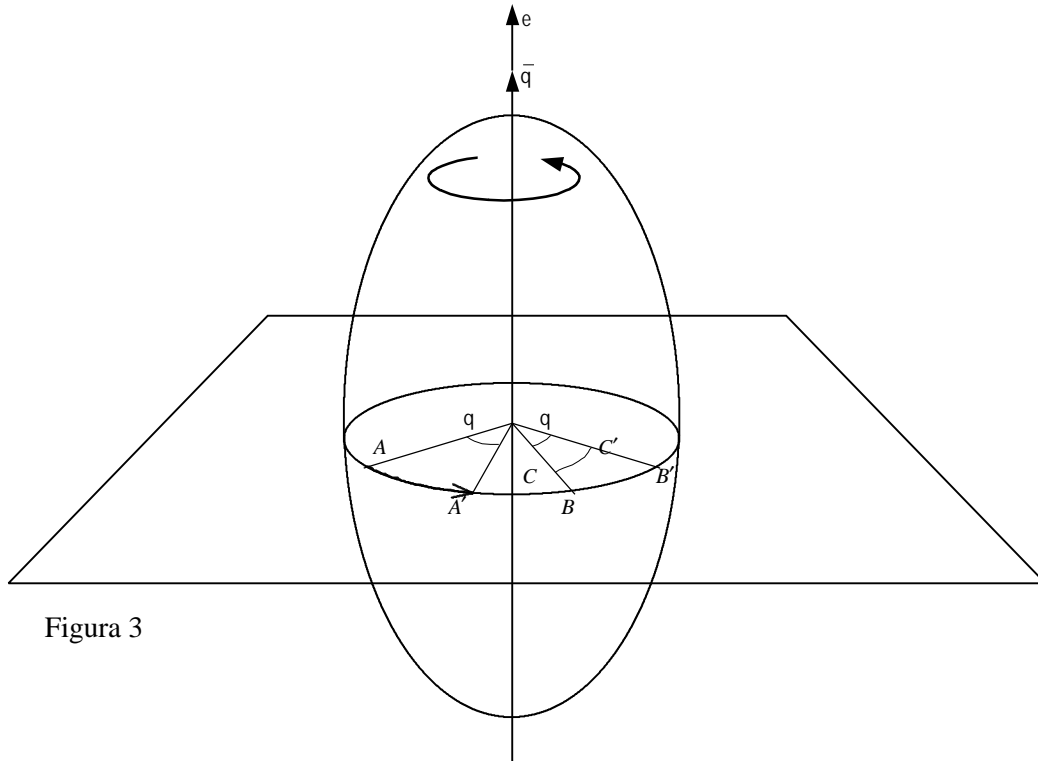


Figura 3

La rotación es una magnitud vectorial, puesto que para que quede perfectamente definido el movimiento se debe determinar su dirección (dirección del eje), intensidad (q), y el sentido de giro en torno al eje.

Adoptada una convención para los giros (por ejemplo: Regla del Tirabuzón derecho), es posible representar la rotación como un vector \bar{q} de dirección coincidente con el eje, módulo igual a la intensidad de rotación (q) y sentido tal que represente el giro de acuerdo a la convención adoptada.

El vector \bar{q} es un vector axialmente libre, es decir que cualquiera que sea su posición a lo largo del eje el movimiento del cuerpo que representa es el mismo.

c) Rotaciones muy pequeñas:

Para una rotación, la trayectoria del punto A es el arco de circunferencia $\overline{AA'} = q \overline{OA}$. El desplazamiento del punto A es $\overline{a_A} = \overline{A' - A}$ (secante del arco de circunferencia). Si \bar{q} es muy

pequeño, secante, arco y tangente se confunden, con lo cual la dirección del desplazamiento del punto A se asimila al vector tangente en el punto es decir, $\vec{a}_A = A'A \cong \overline{A''-A}$, y su módulo, al arco de circunferencia $|\vec{a}_A| \cong q \cdot \overline{OA}$.

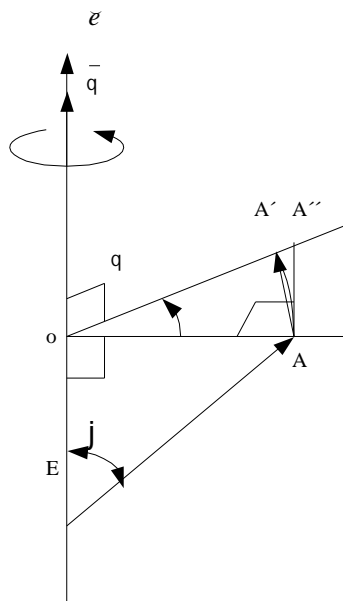


Figura 4

Se verifica que para rotaciones pequeñas, el desplazamiento de cualquier punto A del cuerpo puede expresarse matemáticamente como producto vectorial.

$$\vec{a}_A = \vec{q} \times (A - E)$$

Siendo E un punto arbitrario del eje.

En efecto, el vector resultante del producto vectorial tiene dirección normal al plano determinado por ambos vectores (Plano OAE , Figura 4), y su módulo es igual al producto de los módulos por el seno del ángulo comprendido:

$$|\vec{q} \times (A - E)| = \underbrace{|\vec{q}|}_q \cdot \underbrace{|A - E| \cdot \text{sen } j}_{OA} = q \cdot OA = |\vec{a}_A|$$

El sentido, es el que resulta de girar \vec{q} hacia $\overline{A-E}$.

Dirección, módulo y sentido coinciden con los de \vec{a}_A , es decir, que si q es pequeño, el desplazamiento de un punto del cuerpo se puede expresar como:

$$\vec{a}_A = \vec{q} \times (A - E)$$

Es importante recordar que toda ecuación vectorial equivale a tres ecuaciones escalares.

En efecto si $\bar{\mathbf{q}} = q_x \tilde{\mathbf{i}} + q_y \tilde{\mathbf{j}} + q_z \tilde{\mathbf{k}}$, siendo q_x , q_y y q_z las componentes del vector \mathbf{q} según una terna ortogonal x, y, z , y $\mathbf{A} - \mathbf{E} = (x_A - x_E) \tilde{\mathbf{i}} + (y_A - y_E) \tilde{\mathbf{j}} + (z_A - z_E) \tilde{\mathbf{k}}$ las componentes del vector $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ según la misma terna.

Resulta:

$$\bar{a}_A = \bar{\mathbf{q}} \times \overline{\mathbf{A} - \mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{i}} & \tilde{\mathbf{j}} & \tilde{\mathbf{k}} \\ q_x & q_y & q_z \\ x_A - x_E & y_A - y_E & z_A - z_E \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{Ax} &= q_y(z_A - z_E) - q_z(y_A - y_E) \\ a_{Ay} &= q_z(x_A - x_E) - q_x(z_A - z_E) \\ a_{Az} &= q_x(y_A - y_E) - q_y(x_A - x_E) \end{aligned} \right\} \bar{a}_A = a_{Ax} \tilde{\mathbf{i}} + a_{Ay} \tilde{\mathbf{j}} + a_{Az} \tilde{\mathbf{k}}$$

O bien podemos expresarlo en forma matricial:

$$\begin{aligned} a_{Ax} &= 0(x_A - x_E) - q_z(y_A - y_E) + q_y(z_A - z_E) \\ a_{Ay} &= q_z(x_A - x_E) + 0(y_A - y_E) - q_x(z_A - z_E) \\ a_{Az} &= -q_y(x_A - x_E) + q_x(y_A - y_E) + 0(z_A - z_E) \end{aligned}$$

$$\{\bar{a}_A\} = \begin{vmatrix} 0 & -q_z & q_y \\ q_z & 0 & -q_x \\ -q_y & q_x & 0 \end{vmatrix} \{\overline{\mathbf{A} - \mathbf{E}}\} \quad (\mathbf{I})$$

Movimientos en general de un cuerpo rígido

Es posible demostrar que cualquier movimiento de un cuerpo rígido puede ser descrito mediante una combinación adecuada de movimientos simples.

Esta demostración, como así también la composición de los movimientos simples escapa al alcance del presente trabajo, para lo cual se remite al lector a la bibliografía indicada.

En definitiva se puede afirmar que cualquier movimiento es equivalente (conduce a la misma posición final de cuerpo) a una única rotación y una única traslación, con lo cual el desplazamiento de un punto cualquiera del mismo cuerpo podrá expresarse como:

$$\bar{a}_A = \bar{b} + \bar{q} \times (A - E)$$

Siendo:

\bar{b} = Vector traslación resultante de reducción.

\bar{q} = Vector de rotación resultante de reducción

A = Punto para el cual se calcula el desplazamiento.

E = Punto arbitrario sobre el eje de rotación (recta de acción de q)

Desplazamiento relativo

Todo movimiento resulta relativo respecto de cierto cuerpo o terna que se asume arbitrariamente como fijo.

Se denomina ***Desplazamiento Relativo*** de un punto A respecto de otro B al desplazamiento que experimenta el punto A si se supone el punto B como fijo.

Para ello es necesario eliminar el desplazamiento del punto que se considera fijo (desplazamiento de arrastre).

Si \bar{a}_A y \bar{a}_B son los desplazamientos de A y B respecto de una misma terna fija, el desplazamiento relativo de A respecto de B (\bar{a}_{AB}) será:

$$\bar{a}_{AB} = \bar{a}_A - \bar{a}_B$$

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_B - \bar{a}_A = -\bar{a}_{AB}$$

En el caso que $\bar{a}_A = \bar{a}_B$

$$\bar{a}_{AB} = \bar{a}_{BA} = 0$$

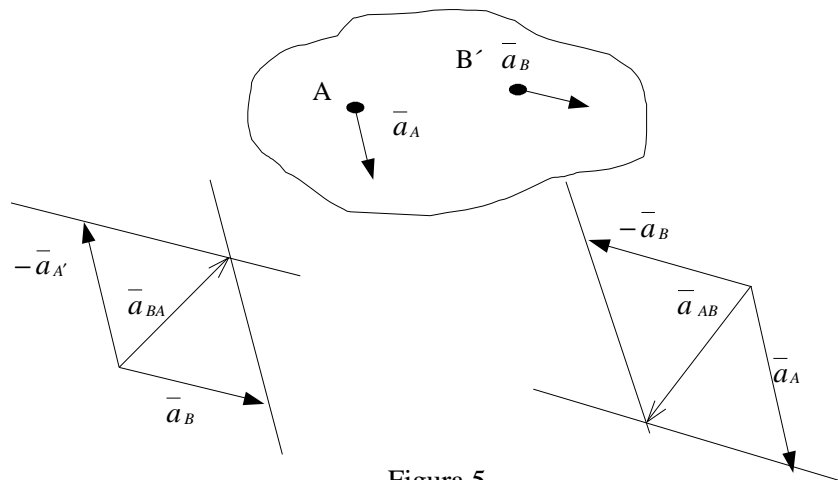


Figura 5

Resulta así, que el desplazamiento relativo de B respecto de A , es de igual módulo y dirección pero sentido opuesto al desplazamiento de A respecto de B (Figura 5).

Desplazamientos relativos debidos a movimientos rígidos del cuerpo

Las deformaciones de un cuerpo están relacionadas con los desplazamientos relativos de los puntos del entorno del punto considerado.

Sin embargo existen desplazamientos relativos debidos a movimientos rígidos del cuerpo, es decir que no conllevan deformación.

Resultan nulos los desplazamientos relativos entre los puntos del cuerpo al efectuarse una traslación, puesto que:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B = \bar{a}_c = \bar{a}$$

Por lo tanto en una traslación $\bar{a}_{AB} = \bar{a}_B - \bar{a}_A = 0$.

Si se aplica una rotación $\bar{q} (q_x, q_y, q_z)$ a un cuerpo alrededor de un eje pasante por un punto E , el desplazamiento del punto B será: $\bar{a}_B = \bar{q} \times (B - E)$

Y el del punto A : $\bar{a}_A = \bar{q} \times (A - E)$

El desplazamiento relativo de B respecto de A

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_B - \bar{a}_A = \bar{q} \times (B - E) - \bar{q} \times (A - E) = \bar{q} \times [(B - E) - (A - E)]$$

$$\bar{a}_{BA} = \bar{q} \times (B - A)$$

De igual forma $\bar{q}_{CA} = \bar{q} \times (C - A)$

Es decir, que el desplazamiento relativo de cualquier punto respecto de otro, al producirse en el cuerpo una rotación rígida resulta igual al que se produciría si se aplicara una rotación paralela a la original pero pasante por el punto supuesto fijo.

Para ejemplificar la antedicho, supongamos un Carrusel o Calesita, (en este caso el vector rotación será normal al plano del dibujo) (Figura 7).

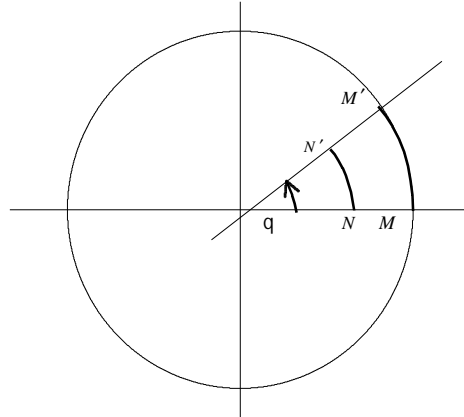
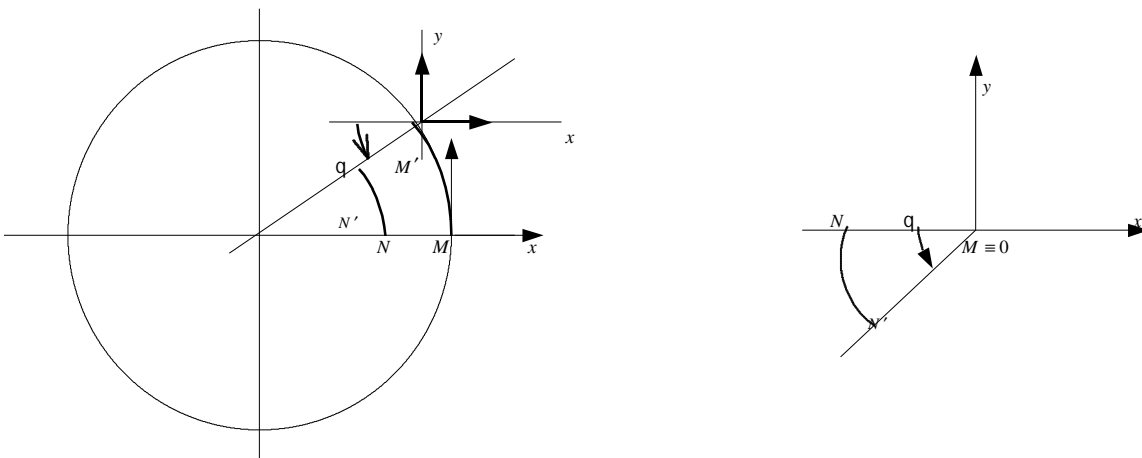


Figura 7

Si fijamos la terna en el punto M.



El punto N habrá rotado respecto de la terna fija en M un valor q .

Vamos a fijar el origen de la terna en el punto que consideramos fijo, y por lo tanto las componentes del vector $\overline{B-A}$ serán x_B, y_B, z_B respecto de dicha terna.

Según la expresión matricial será:

$$\begin{Bmatrix} a_{xBA} \\ a_{yBA} \\ a_{zBA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -q_z & q_y \\ q_z & 0 & -q_x \\ -q_y & q_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} = [D_q] \{B\}$$

Resulta importante destacar que estos desplazamientos relativos no implican ni cambio en las distancias entre puntos, ni cambios de forma (los ángulos se mantienen).

Si analizamos una esfera de radio unitario (Figura 8), para los puntos: $X (1.0.0)$, $Y (0.1.0)$, $Z (0.0.1)$ los desplazamientos relativos serán:

$$\begin{array}{lll} a_{Xx} = 0 & a_{Yx} = -q_z & a_{Zx} = q_y \\ a_{Xy} = q_z & a_{Yy} = 0 & a_{Zy} = -q_x \\ a_{Xz} = -q_y & a_{Yz} = q_x & a_{Zz} = 0 \end{array}$$

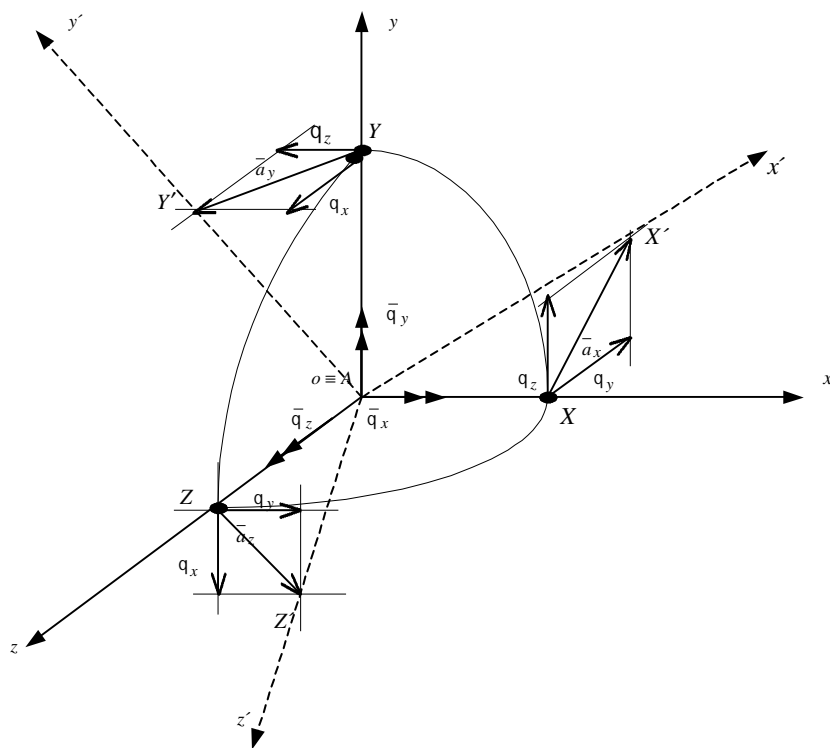


Figura 8

Los desplazamientos \bar{a}_x , \bar{a}_y , \bar{a}_z resultan normales a las direcciones x , y , z respectivamente, y tratándose de rotaciones pequeñas tal como lo hemos dicho, las distancias resultan:

$$AX = AX', \quad AY = AY' \quad \text{y} \quad AZ = AZ'$$

Además la terna continúa siendo ortogonal (baste para verificarlo el ir aplicando una a una q_x , q_y , q_z). Por lo tanto dicho movimiento no conlleva ni cambio de distancias, ni de forma, hecho que es redundante puesto que se trata del movimiento de un cuerpo rígido.

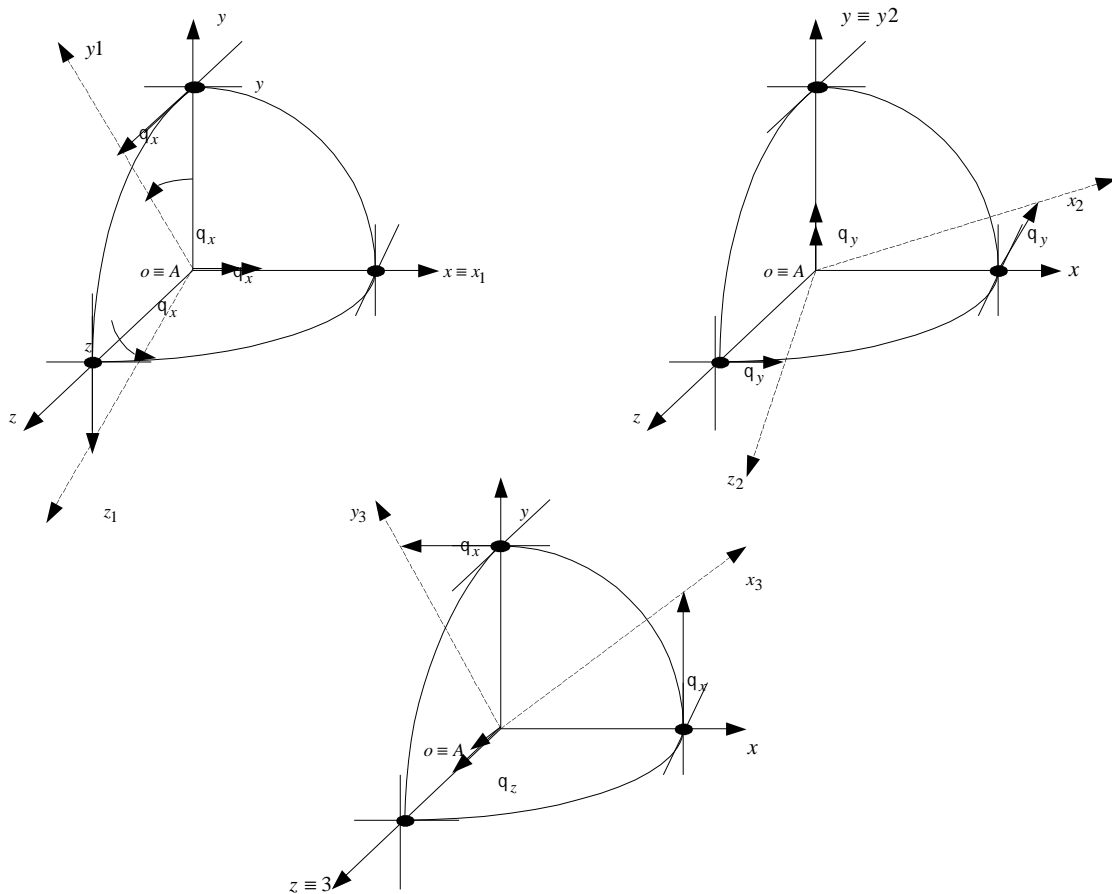


Figura 8a

Resulta importante destacar que la matriz $[Dq]$ de transformación es una matriz antisimétrica.

Esta relación es biunívoca. Es decir que si se obtienen los desplazamientos de los puntos de un cuerpo mediante una transformación.

$$\begin{Bmatrix} a_{x_{BA}} \\ a_{y_{BA}} \\ a_{z_{BA}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} = [A]\{B\}$$

Y si la matriz $[A]$ es antisimétrica, debe interpretarse el movimiento como una rotación rígida de componentes.

$$q_x = a_{32} = -a_{23}$$

$$q_y = a_{13} = -a_{31}$$

$$q_z = a_{21} = -a_{12}$$

Estado de deformación

Desplazamiento relativo específico - deformación específica

Tanto las variaciones de distancia entre puntos como los aumentos o disminuciones de volumen o variaciones angulares, están asociadas a los desplazamientos relativos entre puntos del mismo cuerpo.

Sean $u = u(x, y, z)$; $v = v(x, y, z)$; $w = w(x, y, z)$ las funciones continuas y derivables, con derivadas continuas hasta el orden que se requiera, que representan las componentes del vector de desplazamiento de un punto cualquiera del sólido, de modo que para un punto $A(x_A, y_A, z_A)$ resulta:

$$\left. \begin{array}{l} a_{x_A} = u_A = u(x_A, y_A, z_A) \\ a_{y_A} = v_A = v(x_A, y_A, z_A) \\ a_{z_A} = w_A = w(x_A, y_A, z_A) \end{array} \right\} \bar{a}_A = a_{x_A} \tilde{i} + a_{y_A} \tilde{j} + a_{z_A} \tilde{k}$$

Si se pretende estudiar la deformación en el entorno de un punto A , es necesario determinar los desplazamientos relativos de los puntos de dicho entorno fijando el origen en A .

Sea un punto B del entorno de A en la dirección \tilde{r} , cuyas coordenadas respecto de una terna con origen en A sean $B(d_x, d_y, d_z)$.

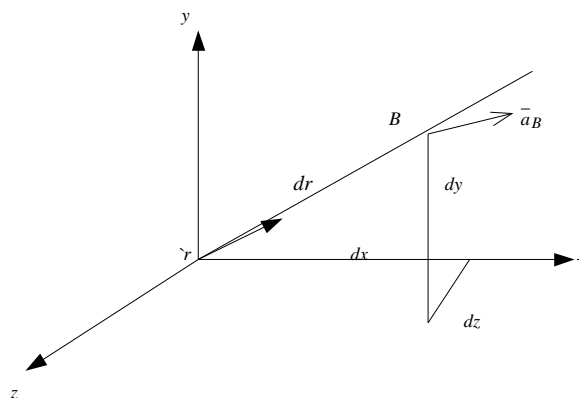


Figura 9

El desplazamiento de B respecto de A será:

$$a_{x_B} = u_B - u_A = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$a_{y_B} = v_B - v_A = dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$a_{z_B} = w_B - w_A = dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

$$\bar{a}_B = a_{x_B} \tilde{i} + a_{y_B} \tilde{j} + a_{z_B} \tilde{k} = du \tilde{i} + dv \tilde{j} + dw \tilde{k}$$

Se denomina **desplazamiento relativo específico** asociado a la dirección \tilde{r} al límite, cuando la distancia tiende a cero, del cociente entre el vector desplazamiento relativo de un punto cualquiera perteneciente a la dirección \tilde{r} y la distancia de dicho punto al origen de coordenadas.

$$\bar{e}_r^a = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\bar{a}_R}{\Delta r}$$

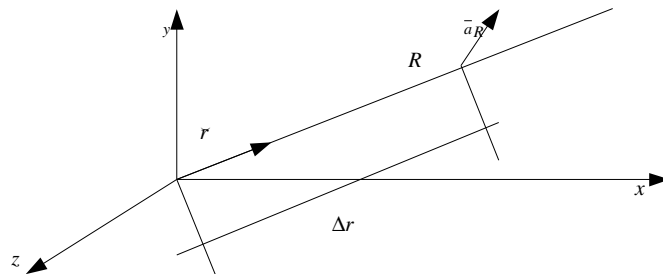


Figura 10

Se ha admitido por hipótesis que en el entorno del punto las rectas continúan siendo rectas luego de la deformación:

Por lo tanto dicho límite existe pues resulta por proporcionalidad de triángulos: $\frac{\bar{a}_B}{d_{r_B}} = \frac{\bar{a}_C}{d_{r_C}}$ cte.

Por lo tanto $\bar{e}_r^a = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\bar{a}_R}{\Delta r} = cte. = \frac{\bar{a}_B}{d_{r_B}} = \frac{\bar{a}_C}{d_{r_C}}$

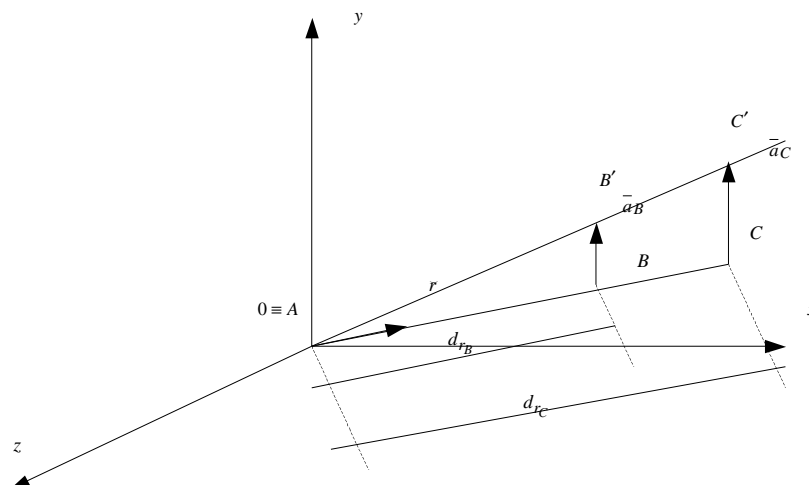


Figura 11

Es decir que a cada dirección pasante por el punto A estudiado (caracterizado por el versor \vec{r}) se hace corresponder un desplazamiento relativo específico. Se trata entonces de una magnitud tensorial, pues para que quede perfectamente definida es necesario el conocimiento de dos vectores, el versor dirección \vec{r} , y el desplazamiento relativo específico \vec{e}_r^a .

Para un punto B ubicado a una distancia dr^{dA} en la dirección \vec{r} , suficientemente pequeña como para admitir que \vec{e}_r^a es constante en toda la distancia, el desplazamiento relativo de B será $\vec{a}_B = \vec{e}_r^a dr$.

Por lo tanto se puede admitir que físicamente, el desplazamiento relativo específico corresponde al desplazamiento relativo de un punto perteneciente a la dirección r y cuya distancia al origen resulta unitaria y arbitrariamente pequeña.

$${}^* \vec{e}_r = \frac{\vec{a}_B}{dr} = \frac{d_u}{d_r} \vec{i} + \frac{d_v}{d_r} \vec{j} + \frac{d_w}{d_r} \vec{k} = {}^* e_{r_x} \vec{i} + {}^* e_{r_y} \vec{j} + {}^* e_{r_z} \vec{k}$$

$${}^* e_{r_x} = \frac{\partial_u}{\partial_x} l + \frac{\partial_u}{\partial_y} m + \frac{\partial_u}{\partial_z} n$$

$${}^* e_{r_y} = \frac{\partial_v}{\partial_x} l + \frac{\partial_v}{\partial_y} m + \frac{\partial_v}{\partial_z} n$$

$${}^* e_{r_z} = \frac{\partial_w}{\partial_x} l + \frac{\partial_w}{\partial_y} m + \frac{\partial_w}{\partial_z} n$$

$$\left\{ {}^* \vec{e}_{r_y} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_u}{\partial_x} & \frac{\partial_u}{\partial_y} & \frac{\partial_u}{\partial_z} \\ \frac{\partial_v}{\partial_x} & \frac{\partial_v}{\partial_y} & \frac{\partial_v}{\partial_z} \\ \frac{\partial_w}{\partial_x} & \frac{\partial_w}{\partial_y} & \frac{\partial_w}{\partial_z} \end{bmatrix} \left\{ \vec{r} \right\} \quad \left(\text{II} \right)$$

Siendo: $\vec{r} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

Se podría imaginar una esfera de radio unitario, con centro en A y hacer corresponder a cada punto de la esfera (a cada dirección) su desplazamiento relativo específico asociado, con lo cual se obtendrían los desplazamientos de cada punto suponiendo fijo el punto A .

Ahora bien, estos desplazamientos relativos específicos, involucran no solo los que están asociados con la deformación que se pretende estudiar sino también los correspondientes a cualquier rotación que haya experimentado el sólido al cual pertenecen.

Para poder identificar los desplazamientos relativos que son debidos a la deformación pura del sólido, se descompone la matriz de transformación en una matriz simétrica y una antisimétrica, descomposición que matemáticamente resulta única.

$$\{^*e_r^a\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \{r\} \quad (\text{II})$$

$$\{e_r\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \right\} \{r\}$$

Llamando:

$$\{^*e_r^d\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \{r\} = [T_D] \{r\}$$

$$\{^*e_r^q\} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \{r\} = [T_q] \{r\}$$

Resulta:

$$\{e_r^a\} = \{e_r^d\} + \{e_r^q\}$$

Es decir que el desplazamiento relativo específico resulta como suma de dos vectores, uno de los cuales (\bar{e}_r^q) resulta ser el desplazamiento relativo del punto debido a una rotación rígida del sólido, no implicando por lo tanto deformación en el entorno del punto.

En efecto, siendo la matriz de transformación $[T_q]$ antisimétrica, comparándola con la matriz $[I]$ (pag. 5), las componentes del vector rotación resultan:

$$q_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_w}{\partial_y} - \frac{\partial_v}{\partial_z} \right) \quad q_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_u}{\partial_z} - \frac{\partial_w}{\partial_x} \right) \quad q_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_v}{\partial_x} - \frac{\partial_u}{\partial_y} \right)$$

Por lo tanto, los desplazamientos relativos específicos $\{\bar{e}_r^d\}$ corresponden a los debidos exclusivamente a la deformación experimentada en el entorno del punto.

Se define entonces el vector **Deformación específica** asociada a una dirección pasante por el punto A como el desplazamiento relativo asociado a esa dirección debido exclusivamente a la deformación experimentada en el entorno del punto A .

$$\{\bar{e}_{dr}\} = [T_D] \{\bar{r}\} = \{e_r\}$$

La matriz $[T_D]$ resulta simétrica y se denomina Tensor de Deformación.

Se analiza el caso en que el sólido no hubiera experimentado ninguna rotación.

En este caso, los desplazamientos relativos específicos (\bar{e}_r^a), coinciden con las deformaciones (\bar{e}_{Dr}^D) puesto que los desplazamientos relativos específicos debidos a la rotación (\bar{e}_r^q) resultan nulos, y la matriz de transformación expresada en \mathbf{II} resulta simétrica puesto que al ser la rotación nula:

$$q_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_w}{\partial_y} - \frac{\partial_v}{\partial_z} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial_w}{\partial_y} = \frac{\partial_v}{\partial_z}$$

$$q_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$q_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Se denomina **Estado de Deformación** en un punto de un medio continuo, al conjunto de los infinitos vectores deformación específica asociados a las infinitas direcciones pasantes por el punto considerado:

$$\{e_r\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \{r\} \quad \{e_r^D\} = \{e_r\}$$

Para las direcciones x, y, z, coincidentes con los ejes coordenados, los valores correspondientes y las componentes de los vectores deformación específicos serán:

Dirección x:

$$\{\tilde{i}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Dirección y:

$$\{\tilde{j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Dirección z:

$$\{\tilde{k}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Con lo cual la expresión $\{\mathbf{II}\}$ se puede expresar con:

$$\{e_r\} = \begin{Bmatrix} e_{r_x} \\ e_{r_y} \\ e_{r_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} \{\bar{r}\} \quad \left[\mathbf{IV} \right]_{x'}$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad e_{zx} = e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Por lo tanto para conocer los infinitos vectores deformación específicos asociados a las infinitas direcciones pasantes por un punto (Estado de Deformación) es suficiente conocer las deformaciones específicas asociadas a tres direcciones y determinar el tensor $[T_D]$ que caracteriza al estado de deformación (Permite conocer el vector \bar{e}_r asociado a cualquier dirección r').

Siendo x, y, z , una terna arbitraria, para cualquier par de ejes ortogonales r y r' deberá cumplirse (por ser el Tensor de Deformaciones Simétrico) que $e_{rr'} = e_{r'r}$.

Es decir que la componente del vector deformación asociado a la dirección r según la dirección r' normal a la misma, será igual a la componente de la deformación asociada a r' según la dirección r (Figura 12) pues bastará considerar el eje r'' normal a ambos y referir el estado de deformación a la nueva terna (r, r', r'') , con lo cual el tensor deberá ser simétrico y $e_{rr'} = e_{r'r}$ y $e_{rr''} = e_{r''r}$.

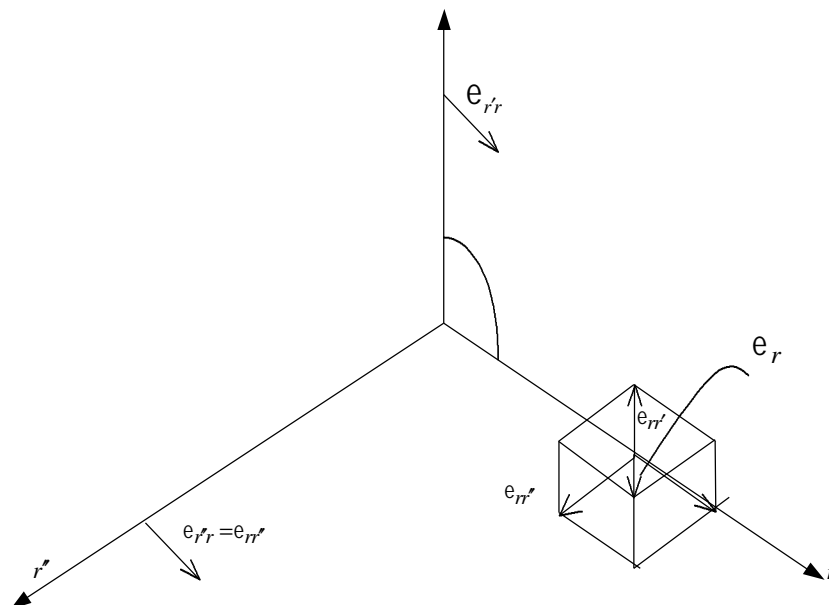


Figura 12

La conclusión anterior puede generalizarse mediante el siguiente **TEOREMA DE RECIPROCIDAD**:

Dadas dos direcciones arbitrarias s y t , la proyección de la deformación específica asociada a la primera sobre la segunda, es igual a la proyección de la deformación específica asociada a la segunda dirección sobre la primera $e_{st} = e_{ts}$.

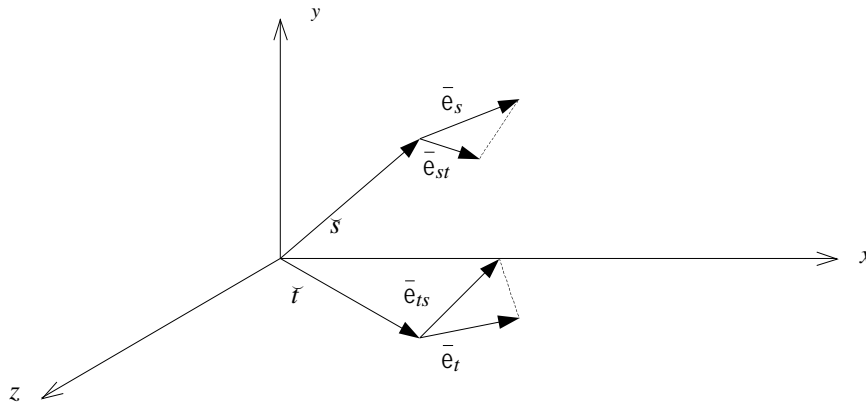


Figura 13

Demostración:

Sean dos direcciones arbitrarias

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} l_s \\ m_s \\ n_s \end{Bmatrix} \quad \{t\} = \begin{Bmatrix} l_t \\ m_t \\ n_t \end{Bmatrix}$$

Y el estado de deformación

$$[T_D] = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}$$

Resultará:

$$\begin{cases} e_{xs} = e_{xx}l_s + e_{yx}m_s + e_{zx}n_s \\ e_{ys} = e_{xy}l_s + e_{yy}m_s + e_{zy}n_s \\ e_{zs} = e_{xz}l_s + e_{yz}m_s + e_{zz}n_s \end{cases} \quad \begin{cases} e_{xt} = e_{xx}l_t + e_{yx}m_t + e_{zx}n_t \\ e_{yt} = e_{xy}l_t + e_{yy}m_t + e_{zy}n_t \\ e_{zt} = e_{xz}l_t + e_{yz}m_t + e_{zz}n_t \end{cases}$$

La proyección de la deformación específica de s sobre t será:

$$e_{st} = \bar{e}_s \cdot \check{t} = e_{xs_t} l + e_{ys_t} m + e_{zs_t} n$$

$$e_{st} = e_{xx_s t} l l + e_{yy_s t} m m + e_{zz_s t} n n + e_{xy_s t} (l m_s + l_s m_t) + e_{yz_s t} (m n_s + m_s n_t) + e_{zx_s t} (n l_s + l_t n_s)$$

Y la proyección de la deformación específica de t sobre s será:

$$e_{ts} = \bar{e}_t \cdot \check{s} = e_{xt_s} l + e_{yt_s} m + e_{zt_s} n$$

$$e_{ts} = e_{xx_s t} l l + e_{yy_s t} m m + e_{zz_s t} n n + e_{xy_s t} (l m_s + l_s m_t) + e_{yz_s t} (m n_s + m_s n_t) + e_{zx_s t} (n l_s + l_t n_s)$$

Resultando:

$e_{st} = e_{ts}$

l.q.q.d.

Deformación del paralelepípedo elemental

Tomando un paralelepípedo de aristas dx , dy , dz :

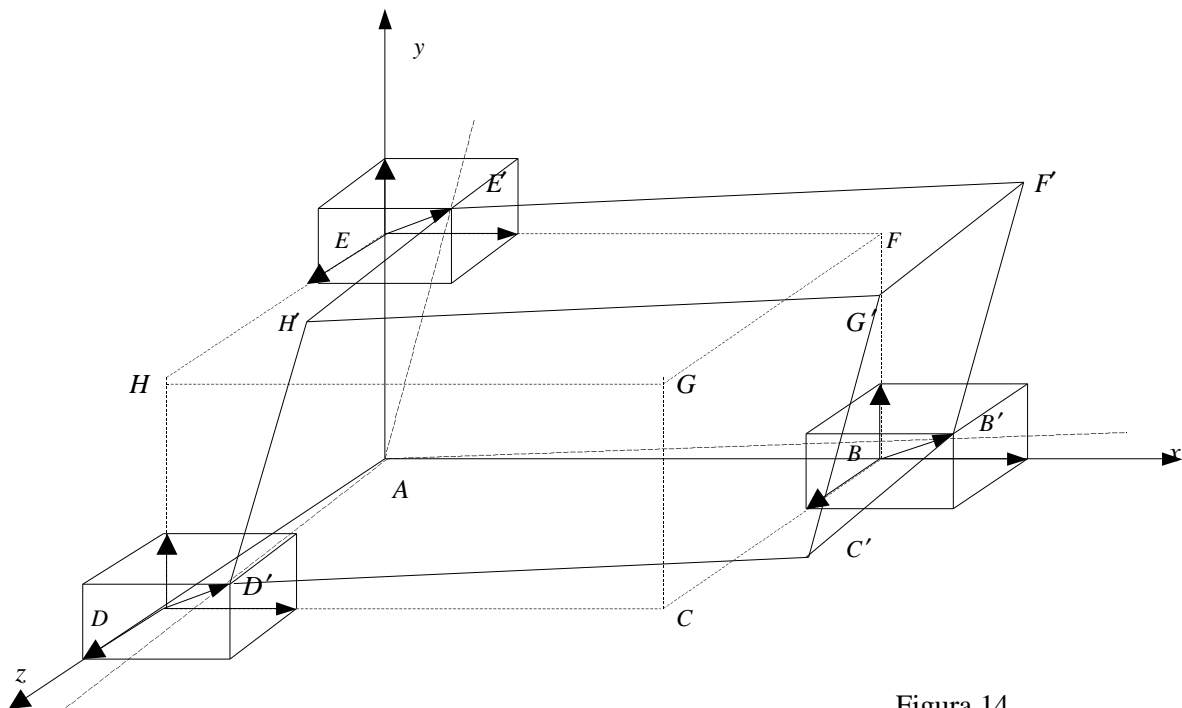


Figura 14

Y conocidos los vectores deformación específica \bar{e}_x , \bar{e}_y , \bar{e}_z es posible determinar la posición de los puntos B' , E' y D' .

Dado que las aristas son infinitésimas, y la deformación es continua, el tensor deformación será similar en todos los vértices del paralelepípedo. Es decir que una dirección paralela a X pasante por E (EF), tendrá una deformación similar a AB , con lo que se concluye que $E'F'$ será paralela a \overline{AB} y por lo tanto es posible la determinación de la posición final de todos los vértices del paralelepípedo (Figura 14).

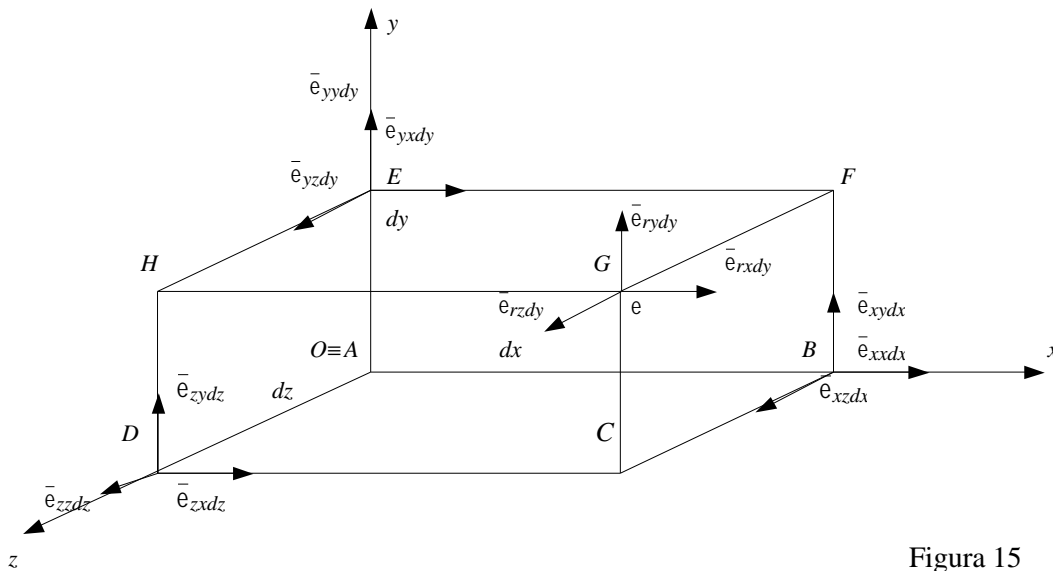


Figura 15

Para hallar el desplazamiento $\overline{G}-G=e_{rdr}$ bastará con considerar la suma de deformaciones en la poligonal \overline{AB} , \overline{BF} y \overline{FG} resultando:

$$e_{rx} d_r = e_{xx} d_x + e_{yx} d_y + e_{zx} d_z$$

$$e_{ry} d_r = e_{xy} d_x + e_{yy} d_y + e_{zy} d_z$$

$$e_{rz} d_r = e_{xz} d_x + e_{yz} d_y + e_{zz} d_z$$

Dividiendo por dr:

$$\begin{cases} e_{rx} = e_{xx} l + e_{yx} m + e_{zx} n \\ e_{ry} = e_{xy} l + e_{yy} m + e_{zy} n \\ e_{rz} = e_{xz} l + e_{yz} m + e_{zz} n \end{cases} \quad \{\bar{e}\} = [T_D] \{\bar{r}\}$$

Siendo l , m , n , los cosenos directores de la dirección \vec{r} .

Deformación específica longitudinal y transversal – Distorsión

El vector \overline{e}_r asociado a la dirección \vec{r} , tendrá en general dirección arbitraria, siendo por lo tanto posible descomponerlo en un vector de dirección coincidente con \vec{r} y otro de dirección normal al mismo.

Se denomina **Deformación específica longitudinal** (\overline{e}_{rr}) asociada a la dirección \vec{r} a la componente del vector deformación específica de dirección coincidente con la dirección original \vec{r} y **Deformación específica transversal** (\overline{e}_r^t) asociada a la misma dirección, a la componente del vector deformación específica de dirección normal a la dirección r .

Para las direcciones coincidentes con los ejes coordenados, por ejemplo la dirección x , resulta claro que e_{xx} es la deformación específica longitudinal y e_{xy} , e_{xz} , las componentes del vector deformación específica transversal, resultando:

$$|\overline{e}_x^t| = \sqrt{e_{xy}^2 + e_{xz}^2}$$

Tratándose como se ha dicho de deformaciones muy pequeñas, la variación de distancia en la dirección r por unidad de longitud, estará representada por $|\overline{e}_{rr}|$ y el ángulo α que forma la dirección original \vec{r} con la dirección \vec{r}' luego de la deformación por $|\overline{e}_x^t|$.

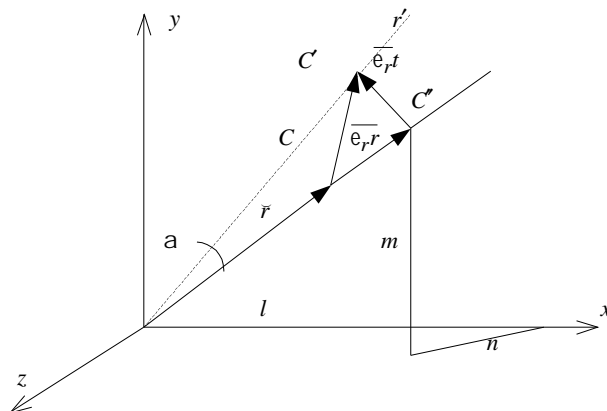


Figura 16

En efecto (Figura 16).

$$\frac{\Delta}{l_0} = \frac{C'C}{CO} = e_{rr}$$

$$a \approx \text{tga} = \frac{e_r^t}{1+e_{rr}} \approx e_r^t$$

$$\boxed{e_{rr} = \frac{\Delta}{l_0}}$$

$$\bar{e}_r^t = \text{tga} = a$$

pues $e_{rr} \lll 1$

Se denomina **Distorsión** g_{st} asociada a dos direcciones inicialmente ortogonales, a la variación del ángulo recto que formaban inicialmente S y t .

Analizando las componentes de las deformaciones específicas asociadas a las direcciones S y t , originalmente ortogonales (Figura 17), es claro que las componentes de deformación paralelas a la dirección U (normal al plano st), no producen variación del ángulo entre S y t , resultando (con aplicación del teorema de reciprocidad).

$$g_{st} = a_1 + a_2 = \frac{e_{ts}}{|t|} + \frac{e_{st}}{|s|} = 2e_{st} \quad e_{ts} = e_{st}$$

$$e_{st} = \frac{g_{st}}{2}$$

$$g_{st} = 2e_{st}$$

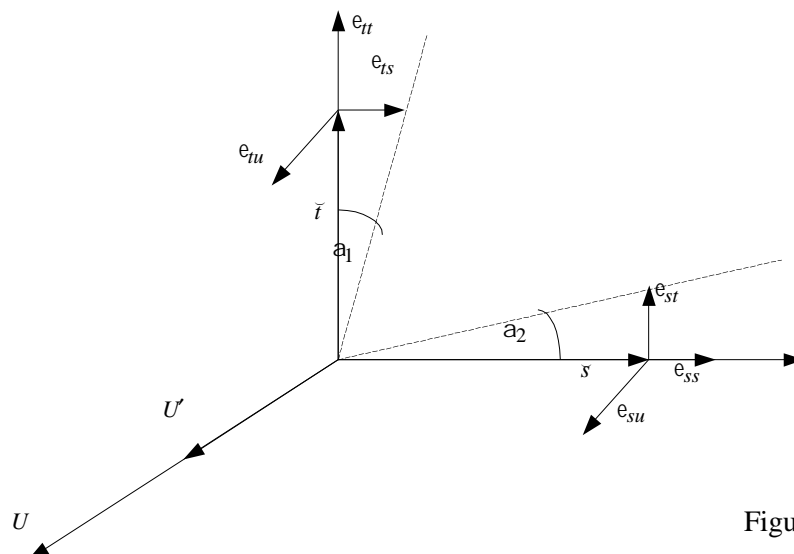


Figura 17

Para una dirección \vec{r} cualquiera, pasante por el punto A , existirán infinitas direcciones normales a la misma, pudiéndose determinar la distorsión entre r y una cualquiera de ellas, resultando máxima para la dirección \vec{r}' , normal a r y perteneciente al plano definido por la dirección \vec{r} y el vector deformación específica \vec{e}_r y nula para la dirección \vec{r}'' normal a dicho plano.

$$g_{r'r'} = 2e_{r'r'}$$

$$g_{r'r''} = 2e_{r'r''} = 0$$

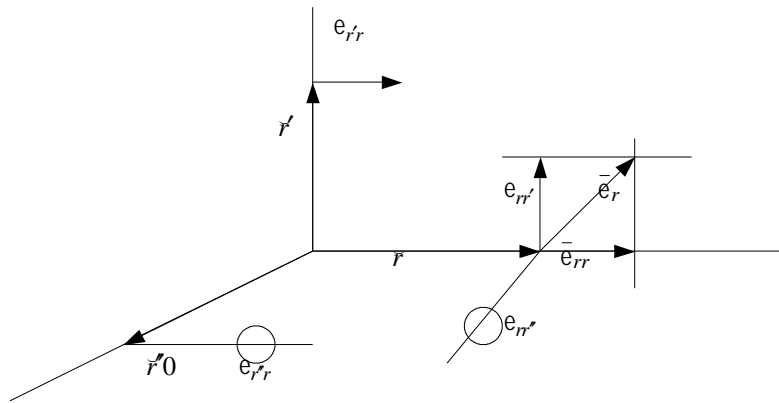


Figura 18

Direcciones principales - Deformaciones principales

Se denomina ***Dirección principal*** a las direcciones cuya deformación específica transversal resulta nula; y a los vectores deformación específica asociados a ellas, ***Deformaciones principales***, cuya dirección coincidirá con r .

Teorema de existencia de las Direcciones principales.

Si l_i , m_i , n_i son los cosenos directores de una dirección i principal cuya deformación específica es e_{ii} , deberá verificarse:

$$e_{ix} = e_{ii} l_i = e_{xx} l_i + e_{yx} m_i + e_{zx} n_i$$

$$e_{iy} = e_{ii} m_i = e_{xy} l_i + e_{yy} m_i + e_{zy} n_i$$

$$e_{iz} = e_{ii} n_i = e_{xz} l_i + e_{yz} m_i + e_{zz} n_i$$

De donde:

$$\left. \begin{aligned} (e_{xx} - e_{ii})l_i + e_{yx}m_i + e_{zx}n_i &= 0 \\ e_{xy}l_i + (e_{yy} - e_{ii})m_i + e_{zy}n_i &= 0 \\ e_{xz}l_i + e_{yz}m_i + (e_{zz} - e_{ii})n_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left[\mathbf{V} \right]$$

Para que el sistema de ecuaciones homogéneas admita soluciones distintas de la trivial ($l_i = m_i = n_i = 0$), la que por otra parte no es solución del problema pues no satisface la ecuación $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$ ecuación de condición para que l_i, m_i, n_i sean cosenos directores de una dirección, deberá ser nulo el determinante de los coeficientes.

$$\begin{bmatrix} (e_{xx} - e_{ii}) & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & (e_{yy} - e_{ii}) & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & (e_{zz} - e_{ii}) \end{bmatrix} = 0$$

Determinante de donde obtenemos:

$$e_{ii}^3 - I_1 e_{ii}^2 - I_2 e_{ii} - I_3 = 0 \quad \left[\mathbf{VI} \right]$$

Donde:

$$I_1 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

$$I_2 = e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx} - e_{xy}^2 - e_{yz}^2 - e_{zx}^2$$

$$I_3 = \text{Det}[T_D]$$

La ecuación $\left[\mathbf{VI} \right]$ es una ecuación cúbica de coeficientes reales, y por lo tanto admite al menos una raíz real.

Es decir, que al menos existe una dirección para la cual la deformación específica transversal resulta nula.

En otro orden de cosas, los coeficientes de la ecuación $\left[\mathbf{VI} \right]$ son una característica del estado de deformación y no de las direcciones x, y, z , elegidas para caracterizarlo. Por lo tanto han de ser iguales cualquiera sea la terna elegida. Dichos coeficientes se denomina **Invariantes del Estado de Deformación**.

I_1 : Invariante lineal.

I_2 : Invariante cuadrático.

I_3 : Invariante cúbico

Efectuando, un cambio de terna de modo tal que la dirección z coincida con la dirección principal cuya existencia se ha demostrado, resultan los nuevos ejes $x', y', z' \equiv 3$.

El estado de deformación estará caracterizado por el siguiente tensor de deformación:

$$\begin{bmatrix} e_{x'x'} & e_{y'x'} & 0 \\ e_{x'y'} & e_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}$$

Puesto que $e_{3x'} = e_{x'3} = e_{3y'} = e_{y'3} = 0$ por ser la dirección $z' \equiv 3$ una dirección principal.

De existir las otras dos direcciones principales, pertenecerán al plano $x' - y'$, puesto que deberán ser normales a $z' \equiv 3$ en virtud del Teorema de reciprocidad.

Planteando las ecuaciones $\left[\mathbf{V} \right]$ para la nueva terna, para que existan soluciones distintas de la trivial, deberá anularse el determinante.

$$\begin{bmatrix} (e_{x'x'} - e_{ii}) & e_{y'x'} & 0 \\ e_{x'y'} & (e_{y'y'} - e_{ii}) & 0 \\ 0 & 0 & (e_3 - e_{ii}) \end{bmatrix} = 0$$

Desarrollado por la tercer columna:

$$(e_3 - e_{ii}) [e_{ii}^2 - e_{ii}(e_{x'x'} + e_{y'y'}) + (e_{x'x'}e_{y'y'} - e_{x'y'}^2)] = 0$$

Resultando como soluciones de la ecuación:

$$a) (e_3 - e_{ii}) = 0 \quad \Rightarrow e_{ii} = e_3 \text{ (ya conocida)}$$

$$b) e_{ii}^2 - e_{ii}(e_{xx'} + e_{yy'}) + (e_{xx'}e_{yy'} - e_{xy'}^2) = 0$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado serán:

$$e_{ii} = \frac{e_{xx'} + e_{yy'} \pm \sqrt{(e_{xx'} + e_{yy'})^2 - 4e_{xx'}e_{yy'} + 4e_{xy'}^2}}{2}$$

$$e_{ii} = \frac{e_{xx'} + e_{yy'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e_{xx'} - e_{yy'}}{2}\right)^2 + e_{xy'}^2} \quad \text{[VII]}$$

Las raíces dadas por [VII], resultan reales, pues el radicando es siempre positivo (suma de cuadrados).

Es decir, que al menos existen tres direcciones para las cuales la dirección del vector deformación específica coincide con la dirección \vec{r} asociada a la misma, o lo que es igual, la deformación específica transversal resulta nula.

Para hallar los cosenos directores de las direcciones principales, se deberán plantear las ecuaciones [V] reemplazando e_{ii} , por el valor de la deformación específica principal correspondiente.

Por ejemplo, para hallar los cosenos directores correspondientes a la dirección asociada con e_1 será:

$$\left. \begin{aligned} (e_{xx} - e_1)l_i + e_{yx}m_i + e_{zx}n_i &= 0 \\ e_{xy}l_i + (e_{yy} - e_1)m_i + e_{zy}n_i &= 0 \\ e_{xz}l_i + e_{yz}m_i + (e_{zz} - e_1)n_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{[VIII]}$$

Este sistema de ecuaciones homogéneo, es indeterminado (admite infinitas soluciones), puesto que el determinante de los coeficientes resulta nulo por ser e_1 raíz de la ecuación cúbica característica del Estado de Deformación.

Matemáticamente, la nulidad del determinante de coeficientes implica que una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras dos por lo tanto es posible eliminar una cualquiera de ellas, conformando un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

Las infinitas soluciones del sistema dado se obtienen asignando un valor arbitrario a una incógnita y obteniendo las otras dos que quedan determinadas para un valor de la primera incógnita.

Por ejemplo, eliminada la tercera ecuación del sistema: **(VIII)**

$$\left. \begin{aligned} (e_{xx} - e_1)l_1 + e_{yx}m_1 + e_{zx}n_1 &= 0 \\ e_{xy}l_1 + (e_{yy} - e_1)m_1 + e_{zy}n_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(IX)}$$

Si se asigna a $n_1 = c$ (valor arbitrario), se obtiene los valores $l_1 = a$ y $m_1 = b$ resolviendo el sistema de las ecuaciones con dos incógnitas.

Dichos valores no satisfacen en general la ecuación de condición $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$, de manera que no representan los cosenos directores de una dirección de existencia real.

Ahora bien, si a , b y c son valores que satisfacen **(IX)**, también serán solución $a' = k \cdot a$; $b' = k \cdot b$; $c' = k \cdot c$ y al adoptar k distintos valores, se obtienen las infinitas soluciones del sistema.

De todas ellas, la que interesa es la que satisface además la ecuación de condición:

$$l_1 = k \cdot a \qquad m_1 = k \cdot b \qquad n_1 = k \cdot c$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = k^2 \cdot a^2 + k^2 \cdot b^2 + k^2 \cdot c^2 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Por lo tanto:

$$l_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$m_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$n_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Los valores a , b y c obtenidos originalmente asignando un valor arbitrario a una incógnita en el sistema (\mathbf{IX}) se denominan *coeficientes directores*.

Se han determinado así, las direcciones principales y las deformaciones principales asociadas a ellas. En virtud del teorema de reciprocidad, dichas direcciones resultan normales entre sí, con lo cual se podría elegir para caracterizar el estado de deformación una terna que coincida con las direcciones principales. Dicha terna se denomina *Terna Principal*.

En ese caso, el tensor deformación será:

$$T_D = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}$$

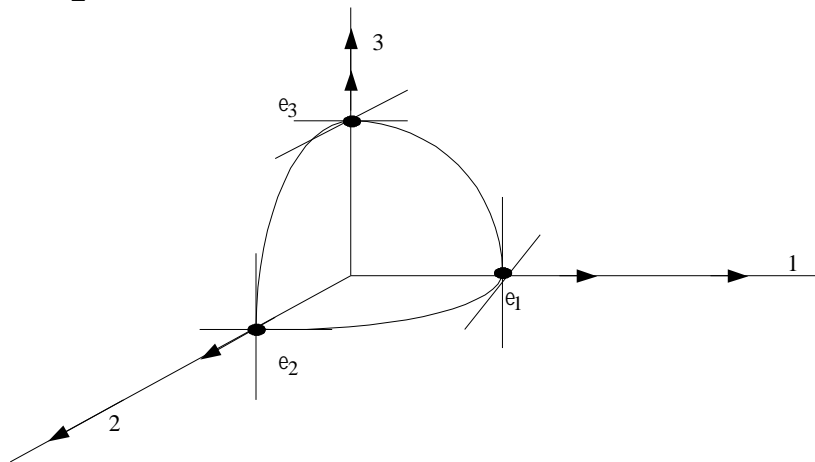


Figura 19

Puesto que $e_{12} = e_{21} = e_{23} = e_{32} = e_{31} = e_{13} = 0$

Y los invariantes:

$$I_1 = e_1 + e_2 + e_3$$

$$I_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1$$

$$I_3 = \det [T_D] = e_1 e_2 e_3$$

La misma conclusión se obtiene mediante un razonamiento estrictamente matemático.

En efecto, el tensor deformación $[T_D]$ resulta un tensor simétrico y susceptible de ser diagonalizado.

Es decir que el tensor puede expresarse en base \vec{n}_1 , \vec{n}_2 y \vec{n}_3 como:

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}$$

Siendo e_1 , e_2 y e_3 los autovalores y \vec{n}_1 , \vec{n}_2 y \vec{n}_3 los autoversores (autovectores de módulo unitario) asociados a los mismos.

Clasificación del estado de deformación

Se ha definido como ***Estado de Deformación***, en un punto al conjunto de las infinitas deformaciones específicas asociadas a las infinitas direcciones pasantes por dicho punto.

Si se caracteriza el estado de deformación mediante la terna principal, para una dirección cualquiera r cuyos cosenos directores sean n_{1r} ; n_{2r} y n_{3r} respecto de esta terna resultan las siguientes componentes del vector deformación según la misma terna.

$$\{e_r\} = [T_D] \{\vec{n}\}$$

$$\{e_r\} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{1r} \\ n_{2r} \\ n_{3r} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e_{r1} = e_1 n_{1r} \\ e_{r2} = e_2 n_{2r} \\ e_{r3} = e_3 n_{3r} \end{cases}$$

$$I_1 = e_1 + e_2 + e_3$$

$$I_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1$$

$$I_3 = [T_D] = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3$$

Sí las infinitas deformaciones específicas tienen direcciones arbitrarias en el espacio, el estado de deformación es *espacial o triple* y resultará $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ y $e_3 \neq 0 \Rightarrow I_3 \neq 0$.

Sí las infinitas deformaciones específicas asociadas a las infinitas direcciones pasantes por el punto, resultan paralelas a un plano, el estado de deformación es *plano o doble*.

En este caso, una de las deformaciones específicas principales será nula.

En efecto si $e_3 = 0$, cualquiera sean los valores de n_{1r} ; n_{2r} y n_{3r} el vector deformación solo tendrá componentes no nulas e_{r1} y e_{r2} .

Si una de las deformaciones principales se anula resulta $I_3 \equiv 0$ e $I_2 \neq 0$.

Finalmente, si todas las deformaciones específicas resultan paralelas a una dirección dada, el estado de deformación en el punto es *simple o lineal*.

En forma similar al anterior, deben resultar dos deformaciones principales nulas. Por ejemplo sí e_2 y e_3 son nulos, cualquiera sean los valores de n_{1r} ; n_{2r} y n_{3r} el vector deformación tendrá sólo componente e_{r1} .

Para este caso, en que dos de las deformaciones específicas principales se anulan resulta $I_3 = 0$, $I_2 = 0$ e $I_1 \neq 0$.

Estado plano de deformación

Se ha definido como estado de deformación plano, a aquel en el cual los infinitos vectores deformación específica resultan paralelos a un plano.

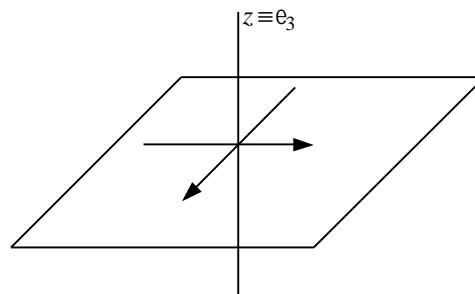
En ese caso una de las deformaciones principales es nula, resultando los vectores deformación paralelos al plano perpendicular a dicha dirección principal.

Se estudiarán en principio las deformaciones asociadas a las rectas que pertenecen al plano paralelo a las deformaciones específicas, es decir el haz de direcciones perpendiculares a la dirección principal con deformación nula.

Para ello se hace coincidir el eje principal con deformación nula con el eje coordenado Z..

El tensor deformación será en este caso:

$$\begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & 0 \\ e_{xy} & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [T_D]$$



E el haz de rectas estudiadas, tendrá $n=0$, puesto que resultan ser normales al eje Z, es decir:

$$\{\bar{r}\} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ con lo cual:}$$

$$\{\bar{e}_r\} = [T_D]\{\bar{r}\} = \begin{cases} e_{rx} = e_{xx}l + e_{yx}m \\ e_{ry} = e_{xy}l + e_{yy}m \\ e_{rz} = 0 \end{cases} \quad \left[\mathbf{X} \right]$$

En efecto, sea el rectángulo elemental de aristas dx , dy de la Figura 20.

Siendo los lados infinitésimos y la deformación continua, una recta paralela al eje x pasante por B (BC) tendrá una deformación igual a la que corresponde al lado AD resultando por lo tanto $B'C' \parallel AD'$ y $D'C' \parallel AB'$.

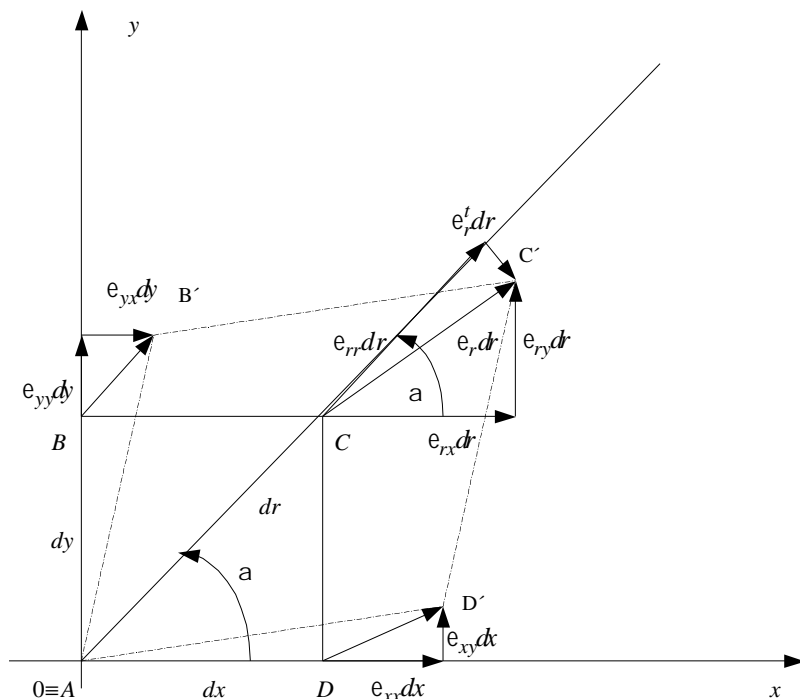


Figura 20

Para hallar el desplazamiento del punto C , bastará con sumar los desplazamientos correspondientes a los lados AD y DC .

$$e_{rx} dr = e_{xx} dx + e_{yx} dy$$

$$e_{ry} dr = e_{xy} dx + e_{yy} dy$$

Llamando a al ángulo que forma dr con el semieje positivo x medido en sentido antihorario y dividiendo por dr .

$$\left. \begin{aligned} e_{rx} &= e_{xx} \cos a + e_{yx} \operatorname{sen} a \\ e_{ry} &= e_{xy} \cos a + e_{yy} \operatorname{sen} a \end{aligned} \right\} \quad \text{[XI]}$$

Que comparadas con la X resulta inmediato $l = \cos a$, $m = \operatorname{sen} a$.

Deformación específica normal y transversal

Para el estado plano de deformaciones, se efectuará un cambio en la convención de signos de las deformaciones transversales. Se consideran como positivas a las deformaciones específicas transversales que provoquen un giro horario respecto del punto A y negativas en caso contrario. Por lo tanto resultará $e_{yx} = -e_{xy}$.

En todas las deducciones y figuras de análisis, se asigna valores positivos a las magnitudes consideradas, pues de esta manera basta considerar cada magnitud con su signo para el uso de las expresiones obtenidas.

Para las ecuaciones **(XI)** resulta indistinto el empleo de e_{yx} o e_{xy} , pues para su deducción se ha considerado la convención anterior. Dada la nueva convención adoptada para el estado plano, se utiliza en las expresiones **(XI)** e_{yx} , que es el que resulta positivo de acuerdo a ella (Figura 20).

Se expresa entonces las componentes de la deformación específica asociada a una dirección r de la siguiente forma

$$\left. \begin{aligned} e_{rx} &= e_{xx} \cos a + e_{yx} \operatorname{sen} a \\ e_{ry} &= e_{yx} \cos a + e_{yy} \operatorname{sen} a \end{aligned} \right\} \quad \text{(XII)} \quad \bar{e}_r = e_{rx} \bar{i} + e_{ry} \bar{j}$$

Las deformaciones específicas longitudinal y transversal, teniendo en cuenta que la proyección de la resultante es igual a la suma de las proyecciones de las componentes, resultarán

$$\bar{e}_{rr} = e_{xx} \cos a + e_{ry} \operatorname{sen} a$$

$$\bar{e}_r^t = e_{xx} \operatorname{sen} a - e_{ry} \cos a$$

Operando

$$\bar{e}_{rr} = (e_{xx} \cos a + e_{yx} \operatorname{sen} a) \cos a + (e_{yx} \cos a + e_{yy} \operatorname{sen} a) \operatorname{sen} a$$

$$\bar{e}_{rr} = e_{xx} \cos^2 a + e_{yy} \operatorname{sen}^2 a + 2e_{yx} \operatorname{sen} a \cos a$$

Como $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$ y $\cos 2a = \operatorname{sen}^2 a - \cos^2 a$

$$\bar{e}_{rr} = e_{xx} \cos^2 a + e_{yy} \sin^2 a + e_{yx} \sin 2a \quad \left(\text{XIII.1} \right)$$

O bien, teniendo en cuenta que $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$$e_{rr} = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} + \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \cos 2a + e_{yx} \sin 2a \quad \left(\text{XIII.2} \right)$$

Para la deformación específica transversal

$$e_r^t = (e_{xx} \cos a + e_{yx} \sin a) \sin a - (e_{yx} \cos a + e_{yy} \sin a) \cos a$$

$$e_r^t = (e_{xx} - e_{yy}) \cos a \sin a + e_{yx} (\cos^2 a - \sin^2 a)$$

$$e_r^t = \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \sin 2a - e_{yx} \cos 2a \quad \left(\text{XIV} \right)$$

Deformaciones principales - Direcciones principales

Para obtener el valor de las deformaciones principales, recordemos que si e_i es el valor de una de ellas; por ser $e_i^t = 0$ resultará de acuerdo a **(XII)**

$$e_{ix} = e_i \cos a_i = e_{xx} \cos a_i + e_{yx} \sin a_i$$

$$e_{iy} = e_i \sin a_i = e_{yx} \cos a_i + e_{yy} \sin a_i$$

$$\left. \begin{aligned} (e_{xx} - e_i) \cos a_i + e_{yx} \sin a_i &= 0 \\ e_{yx} \cos a_i + (e_{yy} - e_i) \sin a_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left(\text{XV} \right)$$

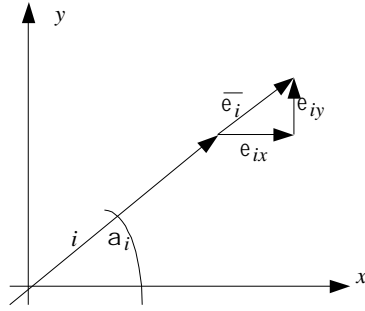


Figura 21

Para que el sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas **(XV)** admita soluciones distintas de la trivial ($\sin a_i = \cos a_i = 0$) la que no representa solución para el problema físico planteado, puesto que no cumple la ecuación de condición $\sin^2 a_i + \cos^2 a_i = 1$, deberá ser nulo el determinante de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} (e_{xx} - e_i) & e_{yx} \\ e_{yx} & (e_{yy} - e_i) \end{vmatrix} = 0$$

$$e_i^2 - e_i(e_{xx} + e_{yy}) + e_{xx}e_{yy} - e_{yx}^2 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$e_i = \frac{(e_{xx} + e_{yy}) \pm \sqrt{(e_{xx} + e_{yy})^2 - 4(e_{xx}e_{yy} - e_{yx}^2)}}{2} =$$

$$e_i = \frac{e_{xx} + e_{yy} \pm \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 - 4e_{yx}^2}}{2}$$

$$e_i = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

$$e_1 = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

$$e_2 = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

Para ubicar las direcciones principales, bastará con plantear la nulidad de la deformación específica transversal (ecuación **(XIV)**).

$$e'_i = 0 = \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \operatorname{sen} 2a_i - e_{yx} \cos 2a_i$$

$$\boxed{\therefore \operatorname{tg} 2a_i = \frac{2e_{yx}}{e_{xx} - e_{yy}}} \quad \text{[XVI]}$$

Si la ecuación [XVI] se satisface para $a_i = j_I$, también lo hará para $2j_I + \rho = 2j_{II}$

$$\text{Por lo tanto } j_{II} = j_I + \frac{\rho}{2}$$

Es decir, que existen en el plano ($x - y$) dos direcciones ortogonales entre sí para las cuales e'_r resulta nula.

Resulta claro que ambas direcciones resultan también normales al eje z (tercera dirección principal).

Valores máximo y mínimo de las deformaciones específicas longitudinales

Se demuestra a continuación que las deformaciones específicas principales corresponden a valores extremos (máximo y mínimo) de las deformaciones específicas longitudinales.

Para hallar los máximos o mínimos de e_{rr} , se deriva la expresión [XIII.2] respecto de a y se iguala a cero dicha derivada.

$$e_{rr} = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} + \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \cos 2a + e_{yx} \operatorname{sen} 2a \quad \text{[XIII.2]}$$

$$\frac{\partial e_{rr}}{\partial a} = -\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} 2a + 2e_{yx} \cos 2a$$

$$\frac{\partial e_{rr}}{\partial a} = -(e_{xx} - e_{yy}) \operatorname{sen} 2a + 2e_{yx} \cos 2a$$

Dicha derivada se anulará para:

$$-(e_{xx} - e_{yy})\sin 2a_j + 2e_{yx} \cos 2a_j = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} 2a_j = \frac{2e_{yx}}{e_{xx} - e_{yy}}} \quad (\text{XVII})$$

Comparando la expresión (XVII) con la (XVI) resulta inmediato que $a_j = a_i$, es decir, que las direcciones principales coinciden con las que corresponden a los valores extremos de e_{rr} .

Valores máximo y mínimo de las deformaciones específicas transversales.

Para hallar las direcciones asociadas a los valores máximo o mínimo de las deformaciones específicas transversales se procede en forma análoga al apartado anterior, derivando la expresión de e_r^t respecto de a e igualando a cero.

$$e_r^t = \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \sin 2a - e_{yx} \cos 2a$$

$$\frac{\partial e_r^t}{\partial a} = (e_{xx} - e_{yy}) \cos 2a + 2e_{yx} \sin 2a$$

Dicha derivada se anulará para $a = b_j$

$$(e_{xx} - e_{yy}) \cos 2b_j + 2e_{yx} \sin 2b_j = 0$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2b_j = \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2e_{yx}}}$$

Si la ecuación (XVIII) se satisface para $b_j = y_I$, también lo hará para

$$2y_{II} = 2y_I + \pi \Rightarrow y_{II} = y_I + \frac{\pi}{2}$$

Es decir, que las direcciones buscadas (máximo y mínimo e_r^t) son ortogonales entre sí.

Comparando la ecuación (XVIII) con la (XVII) resulta:

$$\operatorname{tg} 2b_j = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2a_j} \Rightarrow 2b_j = 2a_j + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{b_j = a_j + \frac{\pi}{4}}$$

Es decir que las direcciones $\{\mathbf{I}\}$ y $\{\mathbf{II}\}$ en donde se producen el máximo y mínimo e_r^t , están orientadas a 45° respecto de las direcciones principales.

Para hallar los valores de e_I^t y e_{II}^t se caracteriza el estado de deformación mediante las direcciones 1 y 2 es decir se adopta como terna de referencia la terna principal.

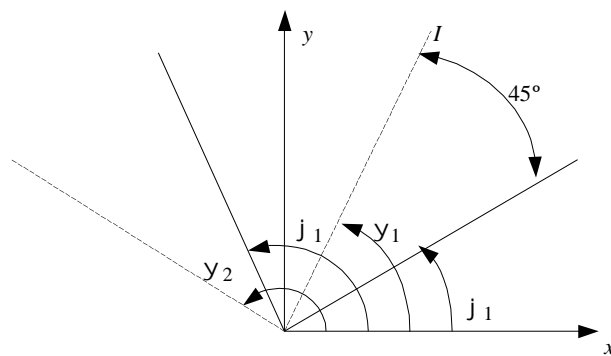


Figura 22

Considerando la ecuación (XIV) y teniendo en cuenta que $e_{12} = e_{21} = 0$ por ser 1 y 2 direcciones principales.

$$e_r^t = \frac{e_1 - e_2}{2} \operatorname{sen} 2a$$

Para la dirección I, $a = \frac{\pi}{4}$; $2a = \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{sen} 2a_I = 1$

Para la dirección II, $a = \frac{3}{4}\pi$; $2a = \frac{3}{2}\pi$; $\operatorname{sen} 2a_{II} = -1$

Por lo tanto: $\boxed{e_I^t = \frac{e_1 - e_2}{2}}$ $\boxed{e_{II}^t = -\frac{e_1 - e_2}{2}}$ (XIX)

Para referirlo a la terna x o y, teniendo en cuenta que

$$e_1 = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

$$e_2 = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

Y por lo tanto

$$e_I^t = \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

(XX)

$$e_{II}^t = -\sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

Circunferencia de Mohr para las direcciones del plano xy.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (XIII.2) y (XIV.)

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} - \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} &= \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \cos 2a + e_{yx} \sin 2a \\ e_r^t &= \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \sin 2a - e_{yx} \cos 2a \end{aligned} \right\} \quad \text{(XXI)}$$

Si se adopta como eje de las abscisas e_{rr} , y de ordenadas e_r^t las (XXI) corresponden a las ecuaciones paramétricas de una circunferencia, de modo tal que los puntos representativos de direcciones que formen un ángulo a entre sí, abarcarán un ángulo central $2a$ en la circunferencia.

Es decir, que a cada dirección perteneciente al plano xy le corresponderá un punto de una circunferencia representando en abscisas e_{rr} y en ordenadas e_r^t .

Para hallar las ordenadas y el radio de la circunferencia, se eleva al cuadrado ambas expresiones de la (XXI) y se suman miembro a miembro.

$$\left(e_{rr} - \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} \right)^2 + e_{I'}^2 = \left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \right)^2 + e_{yx}^2 \quad [\text{XXII}]$$

Recordando que la ecuación de la circunferencia es en un plano x, y :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Siendo a y b la abscisa y la ordenada del centro de la circunferencia, resulta que las coordenadas del centro de la circunferencia y su radio serán:

$$[\text{XXIII}] \quad C = \left(\frac{e_{xx} + e_{yy}}{2}; 0 \right) \quad R = \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \right)^2 + e_{yx}^2} \quad [\text{XXIV}]$$

Construcción de la circunferencia de Mohr

Sean dos direcciones x e y , cuyas deformaciones específicas caracterizan al estado plano de deformación (Figura 23). Normales a la dirección principal de deformación nula.

Considerando un eje de abscisas e_{rr} , y en ordenadas e_r^t adoptando igual escala para ambos se pueden obtener los puntos representativos de las deformaciones asociadas a las direcciones x e y , que se denominan X e Y respectivamente (Figura 24).

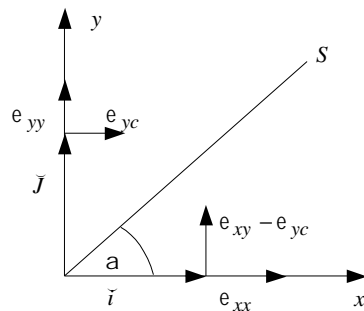


Figura 23

Siendo X e Y los puntos imagen de direcciones ortogonales, abarcarán en la circunferencia un ángulo central igual a $2\frac{\rho}{2} = \rho$, es decir serán diametralmente opuestos.

Uniendo X con Y , en su intersección con el eje de abscisas obtendremos C , centro de la circunferencia, que satisface lo expresado en **(XXIII.)**

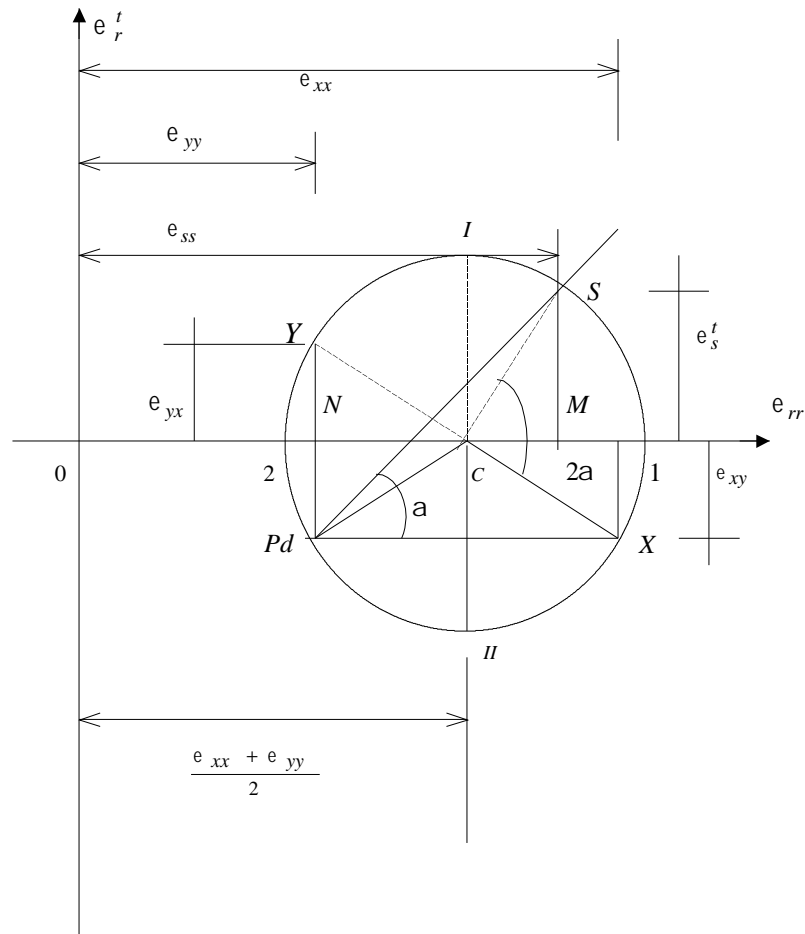


Figura 24

El radio CY o bien CX , puesto que X e Y pertenecen a ella.

$$\text{En efecto: } CY = \sqrt{(NC)^2 + (NY)^2} = \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2} = R$$

Satisfaciendo lo expresado en **(XXIV.)**

Para hallar las componentes del vector deformación específica asociado a un dirección s que forma un ángulo a con el semieje positivo x , bastará con encontrar en el punto S sobre la circunferencia, midiendo a partir de CX un ángulo $2a$ (Figura 24). La abscisa del punto ordenada del punto S resultan: $S = (e_{ss}; e_s^t)$

Resulta claro que los puntos 1 y 2 (Figura 24) corresponden a los puntos imágenes de las direcciones principales, puesto que en ellos se anula la deformación específica transversal. Resultando:

$$e_1 = oc + R = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

$$e_2 = oc - R = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

Así mismo, los puntos \mathbf{I} y \mathbf{II} corresponden a los valores máximo y mínimo de las deformaciones específicas transversales siendo:

$$e_I^t = R = \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2} \quad e_{II}^t = -\sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{yx}^2}$$

Polo de direcciones.

Si por el punto X de la Figura 24 se traza un paralela a la dirección asociada a $\overline{e_x}$, es decir el eje x , y por Y una paralela al eje y , dichas rectas se interceptarán en un punto sobre la circunferencia, que se denomina ***Polo de direcciones*** (Pd).

La afirmación que Pd se encuentra sobre la circunferencia resulta de que el triángulo $Y \overset{\Delta}{Pd} X$ es rectángulo en Pd pues x e y son ortogonales y además XY es un diámetro de la circunferencia, es decir, que el ángulo $YPdx$ se encuentra inscripto en el misma.

Sí a partir de Pd trazamos una paralela a la dirección s , su segunda intersección con la misma (puesto que la primera intersección es Pd) determina el punto S cuya abscisa será e_{ss} y su ordenada e_s^t .

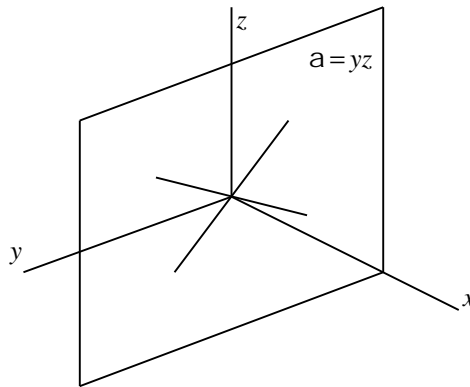
En efecto, el ángulo $YPdS$ se encuentra inscripto en la circunferencia, y será igual a α , siendo el ángulo central correspondiente el SCX igual a 2α .

Haz de direcciones pertenecientes al plano YZ (normales al eje x).

Para el estado plano de deformación el tensor de deformaciones estará dado para la terna $x, y, z \equiv 3$ por.

$$\begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & 0 \\ e_{xy} & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T_D$$

Las direcciones consideradas en este haz tendrán como cosenos directores $l = 0, m, n$ pues todos son normales al eje x .



Por lo tanto $\bar{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m \\ n \end{Bmatrix}$

$$\{\bar{e}\} = [T_D]\{\bar{r}\} \Rightarrow \begin{cases} e_{rx} = e_{yx}m \\ e_{ry} = e_{yy}m \\ e_{rz} = 0 \end{cases}$$

No resulta extraño que $e_{rz} = 0$ puesto que se trata de un estado plano de deformaciones. Las cuales resultan todas paralelas al plano x, y , y por lo tanto nula su componente según z .

$$e_{rr} = \bar{e}_r \cdot r = e_{rx}l + e_{ry}m + e_{rz}n = e_{yy}m^2$$

$$\boxed{e_{rr} = e_{yy}m^2} \quad \left(\mathbf{XXV} \right)$$

La ecuación (\mathbf{XXV}) nos indica que para las direcciones pertenecientes a dicho plano. La máxima deformación específica longitudinal corresponde a la dirección y , puesto que $m < 1$ y $m^2 < 1$.

Siendo e_{rr} y e_r^t las componentes del vector \bar{e}_r , deberá verificarse:

$$|\bar{e}_r|^2 = e_{rr}^2 + e_r^{t2} = e_{yx}^2 m^2 + e_{yy}^2 m^2$$

Además de **XXV** $m^2 = \frac{e_{rr}}{e_{yy}}$

$$e_{rr}^2 + e_r^{t2} = e_{yx}^2 \frac{e_{rr}}{e_{yy}} + e_{yy}^2 \frac{e_{rr}}{e_{yy}}$$

$$e_{rr}^2 + e_r^{t2} = \left(\frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{e_{yy}} \right) e_{rr}$$

$$e_{rr}^2 - \left(\frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{e_{yy}} \right) e_{rr} + e_r^{t2} = 0$$

Sumando a ambos miembros: $\left(\frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{2e_{yy}} \right)^2$

$$e_{rr}^2 - \left(\frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{e_{yy}} \right) e_{rr} + \left(\frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{2e_{yy}} \right)^2 + e_r^{t2} = \left(\frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{2e_{yy}} \right)^2$$

$$\boxed{\left[e_{rr} - \left(\frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{2e_{yy}} \right) \right]^2 + e_r^{t2} = \left(\frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{2e_{yy}} \right)^2} \quad \text{[XXVIII]}$$

La **(XXVIII)** resulta ser la ecuación de una circunferencia con centro $\left[\frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{2e_{yy}}; 0 \right]$ y

radio $R = \frac{e_{yx}^2 + e_{yy}^2}{2e_{yy}}$, que es constante al tener definido el estado de deformación.

Es decir, que los puntos imágenes de las infinitas rectas del plano YZ se encuentran sobre una circunferencia con centro sobre el eje de abscisas.

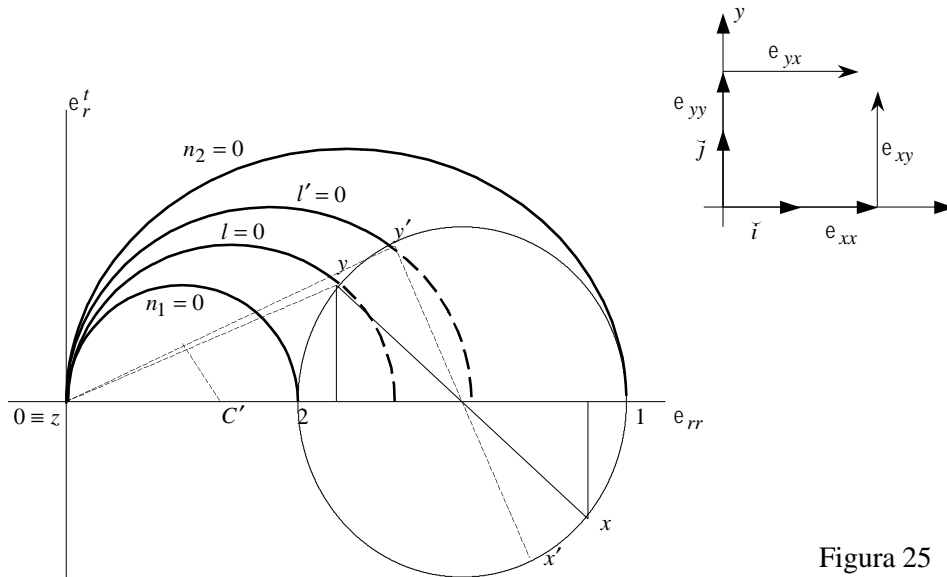


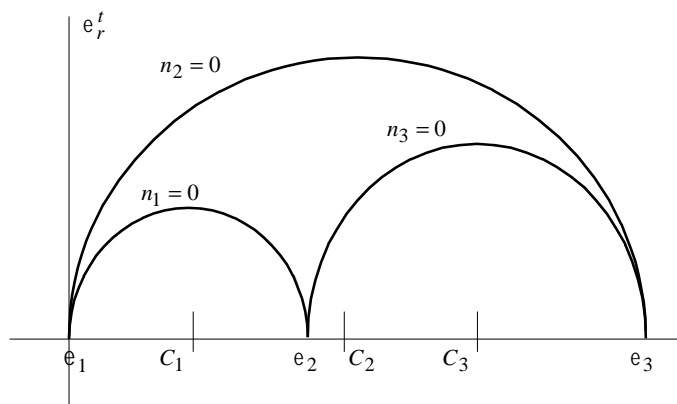
Figura 25

Dicha circunferencia deberá pasar por los puntos representativos de y y el origen de coordenadas, que resulta ser el punto imagen del eje $z \equiv 3(e_{32} = 0 \ e_3^t = 0)$.

La parte punteada, de la circunferencia (más allá del punto y) no representa direcciones reales, puesto que para las direcciones del plano yz resulta $e_{rr} \langle e_{yy}$ de acuerdo a [XXV].

Si hiciésemos girar en torno de z los ejes x e y , hasta la posición $x'y'$, con un razonamiento análogo obtendríamos la circunferencia $l' = 0$ hasta obtener las circunferencias $n_1 = 0$ (cuando $y \equiv 2$) y $n_2 = 0$ (cuando $y \equiv 1$) (Figura 25).

Por lo tanto el estado de deformación, es decir las infinitas deformaciones específicas asociadas a las infinitas direcciones pasantes por el punto estarán representadas por puntos interiores del triángulo curvilíneo cuyos lados son las circunferencias extremas.



Bibliografía

Estabilidad II. Ing. Enrique D. Fliess (Editorial Kapeluz).

- **Resistencia de Materiales.** V. I. Feodosiev (Editorial Mir).
- **Ciencia de la Construcción (tomo III).** V. Belluzzi (Editorial Aguilar).
- **Resistencia de Materiales.** S. Timoshenko (Editorial Espasa Calpe).
- **Estado de Tensión en Puntos de Medios Continuos.** Ing. H. Faletty – Ing. F. G. Pfeiffer (UTN).
- **Cinemática del Cuerpo Rígido.** Ing. A. Barletta (C.E.I.).
- **Estado de Tensión.** Ing. J. S. G. Sciamarella (C.E.I.).
- **Estado de Deformación.** Ing. J. S. G. Sciamarella (C.E.I.).
- **Relación entre Tensiones y Deformaciones.** Ing. J. S. G. Sciamarella (C.E.I.).
- **Estado de Deformación.** Ing. Alsina (C.E.I.).
- **Estado de Tensión – Estado de Deformación.** Ing. H. Fernandez Long (C.E.I.).
- **Estado de Deformación.** Ing. Jorge D. Kornitz (UTN – 1986) (Trabajo publicado en VI Jornadas de Ingeniería Estructural – AIE)