Capítulo 1

Estado de Deformación

1.1 Deformaciones longitudinales y transversales

Analicemos las deformaciones sufridas por un cubo elemental

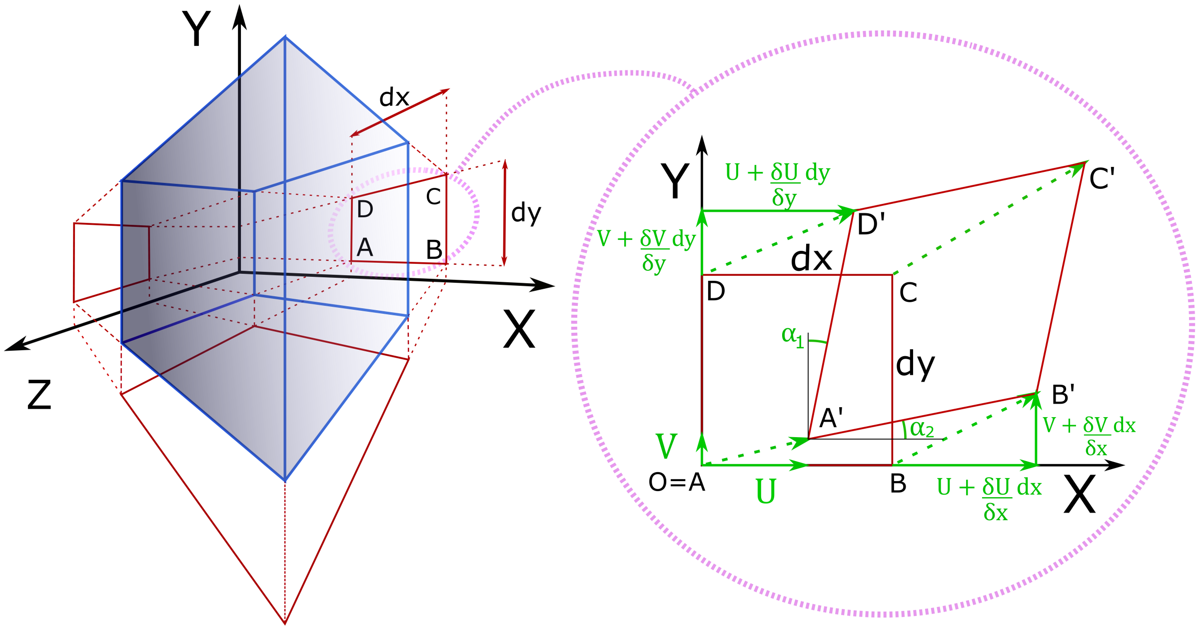

Fig. 1.1: Deformaciones en un cubo elemental

Veamos primero la cara XY del cubo imponiendo un eje de coordenadas con origen en el vértice A. El cubo se traslada y deforma como se muestra en la figura, siendo D = (U, V) el campo de desplazamientos en los ejes (X, Y).

Una forma de calcular deformaciones es calculando, para el cubo diferencial, el cambio de longitud dividido la longitud inicial. Para el eje X la variación de longitud es equivalente a la diferencia entre el corrimiento del vértice B' y el del vértice A', luego:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\left[\left(U + \dfrac{\partial U}{\partial x} dx\right) - U\right]}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Análogamente, llegamos al mismo resultado en los ejes Y, Z:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

En el caso de las deformaciones transversales, están están asociadas a la variación del ángulo conformado por las aristas AB y AD.

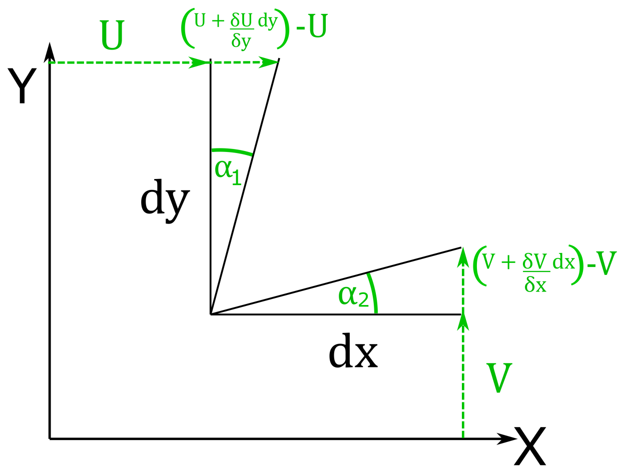

Fig. 1.2: Deformación angular

Asumiendo que los ángulos α son muy pequeños, y por lo tanto las deformaciones son pequeñas, calculamos la tangente de α_2:

$$tan(\alpha_2) \approx \alpha_2 \approx \frac{\left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx\right) - V}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

Similarmente:

$$\alpha_1 = \frac{\partial U}{\partial y}$$

La variación del ángulo conformado por ambas aristas resulta de la suma de los ángulos que describen ambas al deformarse. Extendiendo este análisis a los tres ejes, las distorsiones angulares (γ) resultan:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \qquad \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}$$

A su vez, los ángulos α_1 y α_2 pueden descomponerse en una rotación y una distorsión pura y simétrica respecto a la bisectriz.

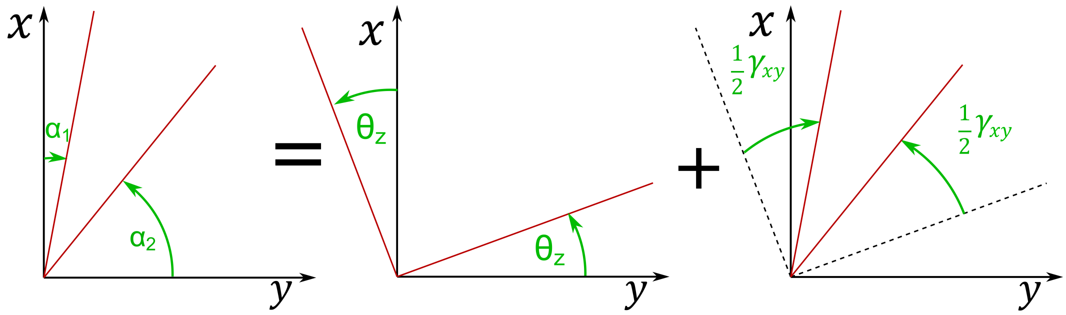

Fig. 1.3: Descomposición en distorsión y rotación pura

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} - \theta_z \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = (\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} - \theta_z) \tag{1.1}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} + \theta_z \longrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = (\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} + \theta_z) \tag{1.2}$$

Análogamente se obtiene la expresión de las otras derivadas cruzadas, obteniendo así las nueve derivadas parciales del campo de desplazamientos en términos de deformaciones.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon_{xx} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \varepsilon_{yy} \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = \varepsilon_{zz}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} - \theta_z\right) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} + \theta_z\right) \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} - \theta_y\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} - \theta_y\right) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} - \theta_x\right) \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} + \theta_x\right)$$

1.2 Gradiente de deformaciones y Tensor de deformaciones

Habiendo hallado la expresión de las nueve derivadas, describo el desplazamiento $\overrightarrow{u} = (u, v, w)$ en un punto $r = (l, m, n)$ como la traslación más el incremento:

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{\partial u} = \overrightarrow{T} + \nabla\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{r}$$

El incremento viene dado por el gradiente del campo de desplazamientos. Utilizando las nueve derivadas parciales halladas lo expresamos de la siguiente forma:

$$\nabla\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

- El primer término describe las traslaciones puras del sólido.
- El segundo término describe la deformación que experimenta.
- El tercer término describe las rotaciones puras.

Si queremos analizar únicamente las deformaciones experimentadas por el sólido, tenemos que considerar únicamente el segundo término. Entonces queda entonces definido el tensor de deformaciones, para pequeñas deformaciones, como la parte simétrica del gradiente de desplazamientos:

$$\left[T_D\right] = \nabla^s\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Dicho tensor es siempre simétrico, y por lo tanto las deformaciones transversales cruzadas son iguales $\left(\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}\right)$. La suma de las deformaciones cruzadas, son iguales a la distorsión angular $\left(\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\gamma_{ij}\right)$.

Este tensor describe el estado de deformación del sólido y opera en forma análoga al tensor de tensiones descrito en la unidad anterior.

1.3 Cambio de volumen y cambio de forma

Dado de un estado deformación, definimos la deformación volumétrica como el cambio de volumen dividido el volumen inicial:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_i} = \frac{V_f - V_i}{V_i}$$

El volumen inicial es igual al producto de los diferenciales ($V_i = dx \cdot dy \cdot dz$). El volumen final es igual al producto de las tres distancias diferenciales luego de la deformación, es decir:

$$V_f = dx\,(1+\varepsilon_x) \cdot dy\,\left(1+\varepsilon_y\right) \cdot dz\,(1+\varepsilon_z)$$

$$V_f = dx \cdot dy \cdot dz\,\left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y+\varepsilon_x \cdot \varepsilon_z+\varepsilon_z \cdot \varepsilon_y+\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z\right)$$

Si las deformaciones son pequeñas se pueden despreciar los productos entre deformaciones. En ese caso la deformación volumetrica resulta

$$\varepsilon_V = \frac{dx \cdot dy \cdot dz\,\left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right) - dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz}$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Por lo tanto la deformación volumétrica es igual a la traza del tensor de deformaciones, que también es el primer invariante del tensor.

Conociendo que es una deformación volumétrica, cualquier estado de tensiones se puede descomponer en un estado que tenga solo variación de volumen y uno que tenga solo cambio de forma.

$$\left[T_D\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_V}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_V}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_V}{3} \end{bmatrix}}_{\text{cambio de volumen}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \frac{\varepsilon_V}{3} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon_V}{3} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \frac{\varepsilon_V}{3} \end{bmatrix}}_{\text{cambio de forma}}$$

Las deformaciones asociadas unicamente al cambio de volumen generan que el cubo siga siendo un cubo, no tiene distorsiones y solo aumenta o disminuye su volumen. En cambio, en el caso de cambio de forma el volumen se mantiene constante, y lo que ocurre es que se distorsiona.