CAMBIO DE BASE:

El objetivo de este artículo es dado dos estados tensionales de un punto de un sólido en equilibrio, pero representados en dos ternas ~~de~~ cartesianas distintas a través de dos tensores de tensión, según el siguiente detalle:

P — punto bajo análisis

(O, X, Y, Z) — 1° terna cartesiana.

(O, U, V, W) — 2° terna cartesiana.

$P \equiv O \equiv O$ — El origen de ambas ternas ~~se~~ es el mismo y coincide con P.

$[T_T]_{XYZ}$ — Tensor de Tensiones asociado a P y a la terna (O, X, Y, Z)

$[T_T]_{UVW}$ — Tensor de Tensiones asociado a P y a la terna (O, U, V, W).

Se pretende hallar el ~~tensor resultante~~ estado tensional resultante de ambos ~~asociado a~~ estados tensionales. Esto implicará hallar el tensor resultante entre ~~de~~ ambos tensores (cada uno referido a una terna determinada), ~~pero referido~~

Para llevar a cabo esto, los 2 estados tensionales ~~tendrán~~ deberán estar referidos a una misma terna, la cual podrá ser cualquiera de las ternas dato u alguna otra.

El 1º objetivo será referir ambos estados tensionales a una misma terna. Por cuestiones de simplicidad en el análisis, se elegirá una de las dos ternas, a las cuales se halla referido uno de los 2 estados tensionales, como terna final a la cual estará referido el estado tensional resultante.

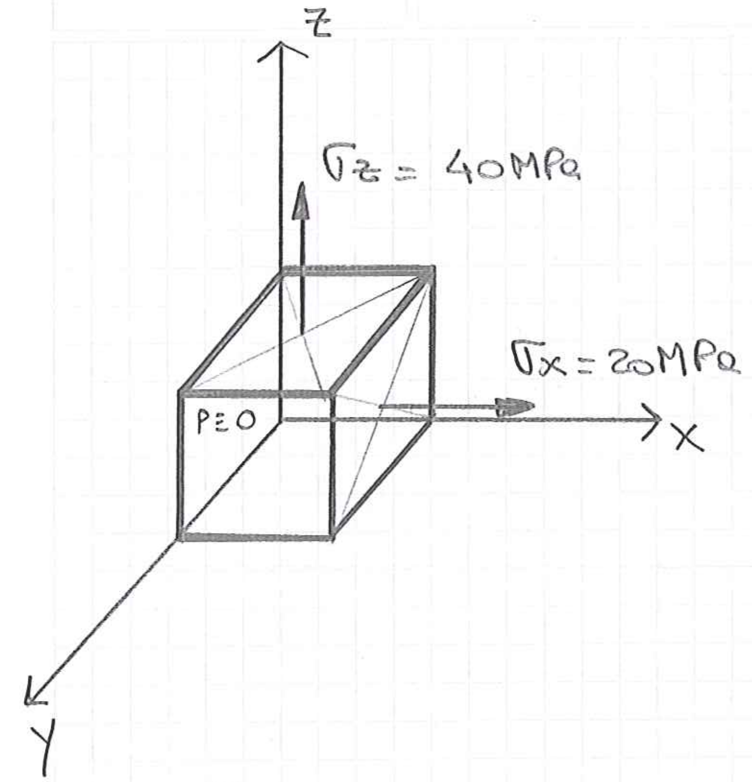
Se seguirá como análisis un camino "intuitivo físicamente" mediante un ejemplo "sencillo" en el sentido que requerirá la realización de pocas operaciones matemáticas pero permitirá un comprendimiento conceptual importante.

Posteriormente, se generalizará el análisis.

EJEMPLO DE ANÁLISIS:

Sean los siguientes dos estados tensionales, referidos el 1º de ellos a la terna (O, x, y, z), y el 2º a la terna (O, u, v, w).

Las siguientes 2 figuras aclaran y esquematizan ambos estados tensionales.



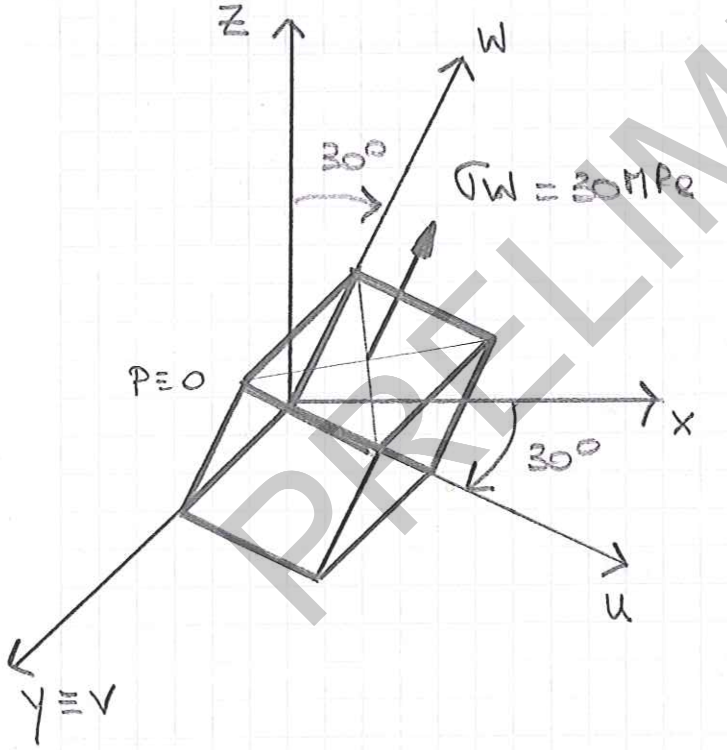
ESTADO TENSIONAL 1 ≡ ET1

Terna de Referencia:

(O, X, Y, Z)

$\sigma_x = 20\ MPa$

$\sigma_z = 40\ MPa$



ESTADO TENSIONAL 2 ≡ ET2

Terna de Referencia:

(O, U, V, W).

$\sigma_w = 30\ MPa$

Vamos a referir ambos estados tensionales a la terna (O,x,y,z).

Para ello debemos referir el tensor de tensiones $[T_T]_{uvw}$ en la terna elegida (O,x,y,z); es decir, expresamos $[T_T]_{uvw}$ en la terna elegida.

¿Cómo hacemos esto?

- Para cada plano coordenado de la terna (O,x,y,z), terna en la cual se quiere expresar $[T]$, se determinan los vectores tensión expresados en función de la terna (O,u,v,w);

- Cada vector tensión ~~tendrá~~ de cada plano coordenado de la terna (O,x,y,z), tendrá componentes según los ejes u, v y w;

- Cada componente de cada vector tensión asociado a los planos coordenados de la terna (O,x,y,z), se lo descompone en los ejes coordenados x,y,z.

- Se parte de la siguiente expresión general:

$$\{\rho^{\pi}\} = [T_T] \cdot \{n_i^{\pi}\}$$

donde:

$\{\rho^{\pi}\}$: vector tensión asociado a cada plano coordenado de la terna (O,x,y,z).

Tendrá las siguientes componentes en forma pormenorizada:

$$\{\rho^{\pi}\} \equiv \begin{Bmatrix} \rho^{\pi}_{u} \\ \rho^{\pi}_{v} \\ \rho^{\pi}_{w} \end{Bmatrix} \equiv$$ vector tensión asociado al plano π y actuando en el punto P con componentes según (O,u,v,w)

En forma particularizada quedará:

$$\{\rho^{x}\} \equiv \begin{Bmatrix} \rho^{x}_{u} \\ \rho^{x}_{v} \\ \rho^{x}_{w} \end{Bmatrix} \; ; \; \{\rho^{y}\} \equiv \begin{Bmatrix} \rho^{y}_{u} \\ \rho^{y}_{v} \\ \rho^{y}_{w} \end{Bmatrix} \; ; \; \{\rho^{z}\} \equiv \begin{Bmatrix} \rho^{z}_{u} \\ \rho^{z}_{v} \\ \rho^{z}_{w} \end{Bmatrix}$$

Vector tensión actuante en el punto P asociado al plano coordenado x expresado en la terna (O,u,v,w).

ídem para Y

ídem para el plano Z.

$$[T_{\sigma}]_{uvw} = \begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

Tensor de Tensiones asociado a la terna (O,u,v,w)

$$\{n^{\pi}_{i}\} \equiv \begin{Bmatrix} n^{\pi}_{u} \\ n^{\pi}_{v} \\ n^{\pi}_{w} \end{Bmatrix}$$

vector de los cosenos directores ~~asociado~~ del plano π con respecto a la terna (O,u,v,w) Expresado en forma general.

Expresando lo anterior en forma particularizada quedaría.

$$\{n^x\} \equiv \begin{Bmatrix} n^x_u \\ n^x_v \\ n^x_w \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0.866 \\ 0.0 \\ 0.50 \end{Bmatrix}$$

vector de los cosenos directores que forma la dirección x con los ejes u, v y w.

$$\{n^y\} \equiv \begin{Bmatrix} n^y_u \\ n^y_v \\ n^y_w \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

ídem pero para el plano cuya normal es 'y'.

$$\{n^z\} \equiv \begin{Bmatrix} n^z_u \\ n^z_v \\ n^z_w \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} -0.50 \; \cancel{-0.866} \\ 0.0 \\ 0.866 \end{Bmatrix}$$

ídem ~~para~~ pero el plano cuya normal es 'z'.

Estos cosenos provienen de los siguientes ángulos:

$\alpha^x_u = 30^\circ$ ángulo que forma la dirección x con el eje u

$\beta^x_v = 90^\circ$ " x " v

$\gamma^x_w = 60^\circ$. " x " w.

$\alpha^y_u = 90^\circ$ " y " u

$\beta^y_v = 0^\circ$ " y " v

$\gamma^y_w = 90^\circ$ " y " w.

$\alpha^z_u = 120^\circ$ " z " u

$\beta^z_v = 90^\circ$ " z " v

$\gamma^z_w = 30^\circ$ " z " w.

Realización de las operaciones:

$\{\rho^x\}$: plano coordenado de normal "eje 'x'"

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}}_{[T_T]_{uvw}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.866 \\ 0.0 \\ 0.50 \end{Bmatrix}}_{\{n^x\}} \equiv \underbrace{\begin{Bmatrix} \rho^x_u = 0.0 \\ \rho^x_v = 0.0 \\ \rho^x_w = 15 \end{Bmatrix}}_{\{\rho^x\}}$$

$\{\rho^y\}$: plano coordenado cuyo normal es el "eje y"

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}}_{[T_T]_{uvw}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{\{n^y\}} \equiv \underbrace{\begin{Bmatrix} \rho^y_u = 0.0 \\ \rho^y_v = 0.0 \\ \rho^y_w = 0.0 \end{Bmatrix}}_{\{\rho^y\}}$$

$\{\rho^z\}$: tensión asociada al plano coordenado cuyo normal es el eje 'z'

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}}_{[T_T]_{uvw}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} -0.50 \\ 0.0 \\ 0.866 \end{Bmatrix}}_{\{n^z\}} \equiv \underbrace{\begin{Bmatrix} \rho^z_u = 0.0 \\ \rho^z_v = 0.0 \\ \rho^z_w = 25.98 \end{Bmatrix}}_{\{\rho^z\}}$$

Lo anterior permite generalizarse de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_u^x \\ p_v^x \\ p_w^x \end{Bmatrix}}_{\{p^x\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix}}_{[T_T]_{uvw}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} n_u^x \\ n_v^x \\ n_w^x \end{Bmatrix}}_{\{n^x\}}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_u^y \\ p_v^y \\ p_w^y \end{Bmatrix}}_{\{p^y\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix}}_{[T_T]_{uvw}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} n_u^y \\ n_v^y \\ n_w^y \end{Bmatrix}}_{\{n^y\}}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_u^z \\ p_v^z \\ p_w^z \end{Bmatrix}}_{\{p^z\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix}}_{[T_T]_{uvw}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} n_u^z \\ n_v^z \\ n_w^z \end{Bmatrix}}_{\{n^z\}}$$

2° PARTE:

- Cada vector tensión asociado a cada uno de los planos coordenados, a través de sus 3 componentes según los ejes u, v y w, podrá ser descompuesto en las direcciones x, y y z, que constituyen los ejes de la nueva terna (0xyz)

- Veamos qué pasa con cada uno de ellos.

- El vector tensión asociado al plano cuya normal es el eje 'x' $\{\rho^x\}$ nos dará cuando lo descompongamos las siguientes componentes:

$$\left\{\begin{array}{l} \rightarrow \text{componente según eje } x: \\ \rightarrow \quad " \quad " \quad " \quad y: \\ \rightarrow \quad " \quad " \quad " \quad z: \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{array}\right| \begin{array}{l} 1° \text{ columna de} \\ \text{un } [T_r] \text{ referida} \\ \text{a la terna } (xyz). \end{array}$$

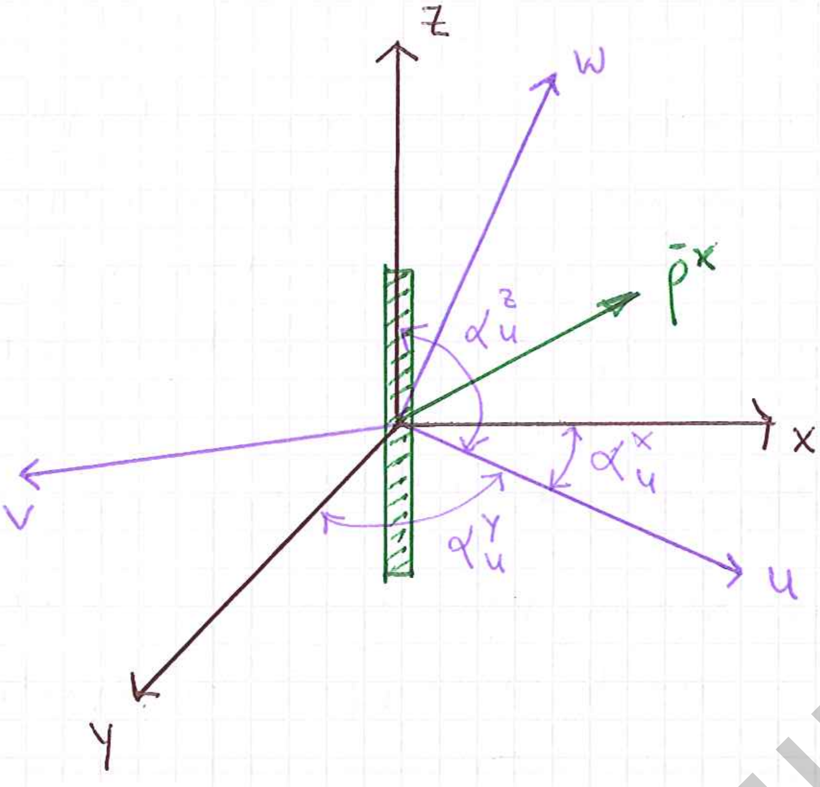
- El vector tensión asociado al plano cuya normal es el eje 'y', $\{\rho^y\}$, nos dará cuando lo descompongamos las siguientes componentes:

$$\left\{\begin{array}{l} \rightarrow \text{componente según eje } x: \\ \rightarrow \quad " \quad " \quad " \quad y: \\ \rightarrow \quad " \quad " \quad " \quad z: \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{array}\right| \begin{array}{l} 2° \text{ columna de un} \\ [T_r] \text{ referida a} \\ \text{la terna } (xyz). \end{array}$$

- Idem para el $\{\rho^z\}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \rightarrow \text{componente según eje } x: \\ \rightarrow \quad " \quad \quad " \quad \text{eje } y: \\ \rightarrow \quad " \quad \quad " \quad \text{eje } z: \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{array}\right| \begin{array}{l} 3° \text{ columna de un} \\ [T_r] \text{ referida a la} \\ \text{terna } (xyz). \end{array}$$

Generalicemos lo anterior:



- Plano cuyo normal es el eje 'x'.
- sólo se representan los ángulos que forma el eje 'u' con los (x y z).

1º columna:

$$\sigma_x = p_u^x \cdot n_u^x + p_v^x \cdot n_v^x + p_w^x \cdot n_w^x$$

$$\tau_{xy} = p_u^x \cdot n_u^y + p_v^x \cdot n_v^y + p_w^x \cdot n_w^y$$

$$\tau_{xz} = p_u^x \cdot n_u^z + p_v^x \cdot n_v^z + p_w^x \cdot n_w^z$$

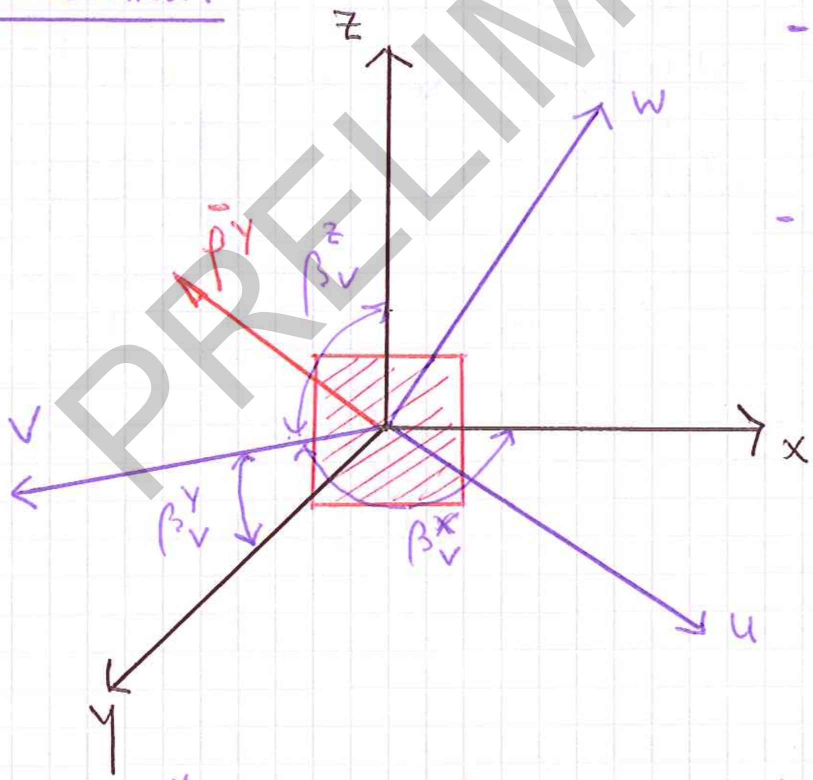
en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}}_{\substack{1^{\circ}\text{ columna} \\ \text{de} \\ [T_T]_{xyz}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_u^x & n_v^x & n_w^x \\ n_u^y & n_v^y & n_w^y \\ n_u^z & n_v^z & n_w^z \end{bmatrix}}_{[T_{TC}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} p_u^x \\ p_v^x \\ p_w^x \end{Bmatrix}}_{\{p^x\}}$$

pero por lo visto anteriormente:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}}_{\substack{1^{\circ}C \\ [T_\sigma]_{xyz,2}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_u^x & n_v^x & n_w^x \\ n_u^y & n_v^y & n_w^y \\ n_u^z & n_v^z & n_w^z \end{bmatrix}}_{[T_{TC}]} \cdot \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix}}_{[T_\sigma]_{uvw}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} n_u^x \\ n_v^x \\ n_w^x \end{Bmatrix}}_{\{n^x\}}}_{\{\rho^x\}}.$$

2º COLUMNA:



- Plano cuyo normal es el eje 'y'

- Sólo se representan los ángulos que tiene el eje 'v' con los (x y z).

$$\begin{cases} \tau_{yx} = \rho_u^y \cdot n_u^x + \rho_v^y \cdot n_v^x + \rho_w^y \cdot n_w^x \\ \sigma_y = \rho_u^y \cdot n_u^y + \rho_v^y \cdot n_v^y + \rho_w^y \cdot n_w^y \\ \tau_{yz} = \rho_u^y \cdot n_u^z + \rho_v^y \cdot n_v^z + \rho_w^y \cdot n_w^z \end{cases}$$

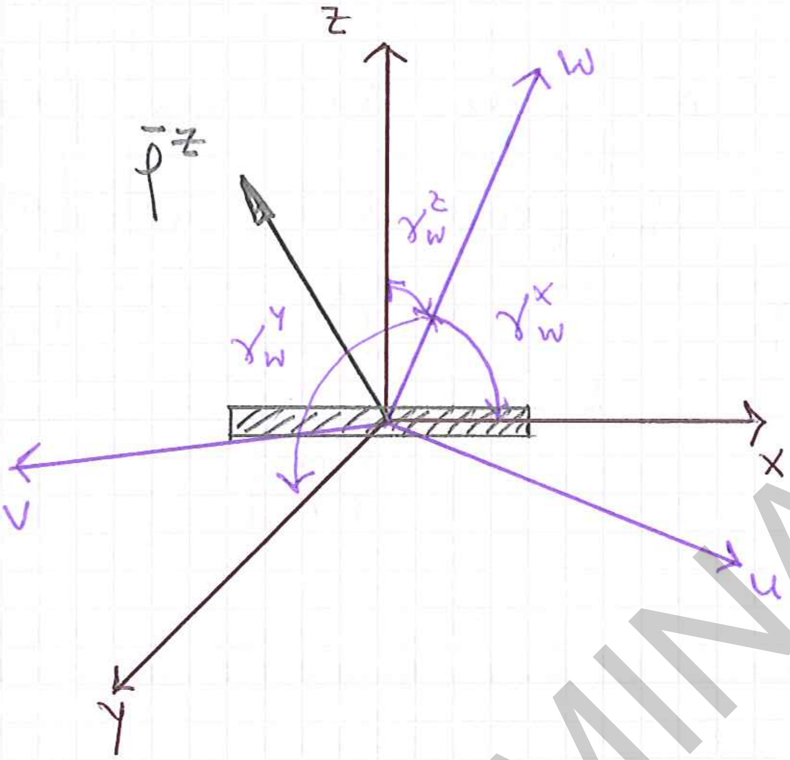
lo que escrito en forma matricial nos queda:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\substack{2^{\circ}\text{ columna de} \\ [T_T]_{xyz,2}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_u^x & n_v^x & n_w^x \\ n_u^y & n_v^y & n_w^y \\ n_u^z & n_v^z & n_w^z \end{bmatrix}}_{[T_{TC}]} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \rho_u^y \\ \rho_v^y \\ \rho_w^y \end{Bmatrix}}_{\{\rho^Y\}}$$

y por lo visto anteriormente:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\substack{2^{\circ}\text{C de} \\ [T_T]_{xyz,2}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_u^x & n_v^x & n_w^x \\ n_u^y & n_v^y & n_w^y \\ n_u^z & n_v^z & n_w^z \end{bmatrix}}_{[T_{TC}]} \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix}}_{[T_T]_{uvw}} \underbrace{\begin{Bmatrix} n_u^Y \\ n_v^Y \\ n_w^Y \end{Bmatrix}}_{\{n^Y\}}}_{\{\rho^Y\}}.$$

3º COLUMNA:



- Plano cuyo normal es el eje 'z'
- Sólo se representan los ángulos que forma el eje 'w' con los (x, y, z)

$$\begin{cases} \sigma_{zx} = \rho_u^z \cdot n_u^x + \rho_v^z \cdot n_v^x + \rho_w^z \cdot n_w^x \\ \sigma_{zy} = \rho_u^z \cdot n_u^y + \rho_v^z \cdot n_v^y + \rho_w^z \cdot n_w^y \\ \sigma_z = \rho_u^z \cdot n_u^z + \rho_v^z \cdot n_v^z + \rho_w^z \cdot n_w^z \end{cases}$$

que escrito en forma matricial queda:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}}_{\text{3º columna de } [T_T]_{xyz,z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_u^x & n_v^x & n_w^x \\ n_u^y & n_v^y & n_w^y \\ n_u^z & n_v^z & n_w^z \end{bmatrix}}_{[T_{TC}]} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \rho_u^z \\ \rho_v^z \\ \rho_w^z \end{Bmatrix}}_{\{\rho^z\}}$$

y por lo visto anteriormente :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}}_{\substack{3^{\circ}C \\ de \\ [T_r]_{xyz,2}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_u^x & n_v^x & n_w^x \\ n_u^y & n_u^y & n_w^y \\ n_u^z & n_v^z & n_w^z \end{bmatrix}}_{[T_{TC}]} \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix}}_{[T_r]_{uvw}} \underbrace{\begin{Bmatrix} n_u^z \\ n_v^z \\ n_w^z \end{Bmatrix}}_{\{n^z\}}}_{\{\rho^z\}}$$

NOTA:

Por ejemplo:

ρ_w^y : es la componente w del vector tensión actuante en el punto P asociado al plano cuya normal es el eje 'y'

Dicho de otro modo: Dado el punto P y un plano pasante por él cuya normal es el eje 'y', se considera la componente según ~~la~~ 'w' según la terna (O, u, v, w)

3º PARTE:

En la 2º parte, se calcularon las columnas de la matriz del Tensor de Tensiones expresadas en la terna 'destino' o 'final' denominada (O, X, Y, Z), a partir del tensor de tensiones expresado en la terna 'origen' o 'inicial' denominada (O, U, V, W).

Armando y compaginando estas matrices nos quedaría:

$$[T_T]_{XYZ} = [TTC]\,[T_T]_{UVW}\,[TTC]^T$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_u^x & n_v^x & n_w^x \\ n_u^y & n_v^y & n_w^x \\ n_u^z & n_v^z & n_w^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{vu} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{wv} \\ \tau_{uw} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_u^x & n_v^x & n_w^x \\ n_u^y & n_v^y & n_w^y \\ n_u^z & n_v^z & n_w^z \end{bmatrix}$$

CASO PARTICULAR 1 DE APLICACIÓN:

Supongamos que conocemos el vector tensión actuante en un punto 'P' y asociado a un plano π y referido a una terna (O, x, y, z).

Se quiere expresar dicho vector tensión en una segunda terna denominada (O, u, v, w).

Resumamos esto:

P : Punto en análisis.

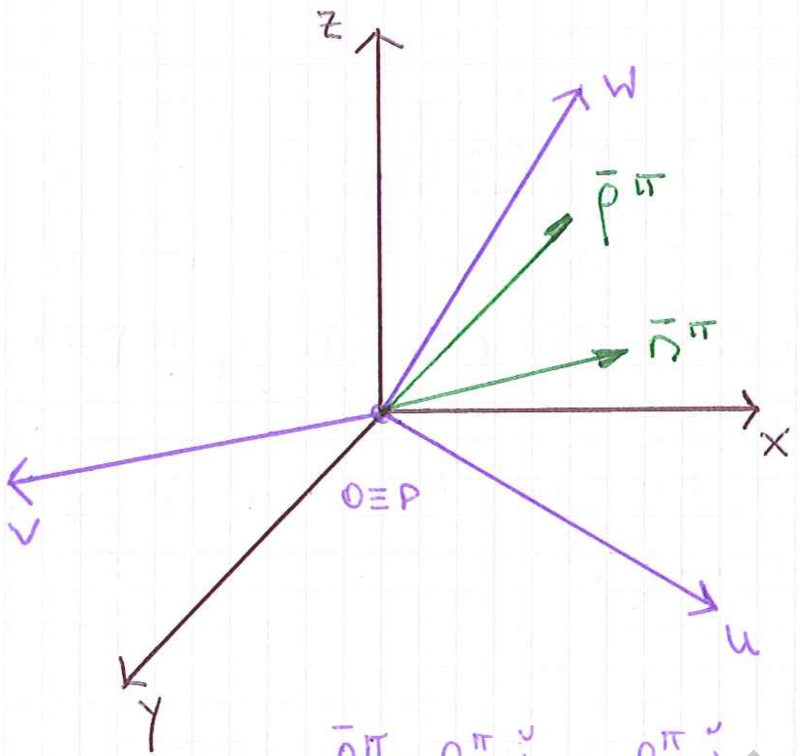
(O, x, y, z) : Terna origen o inicial donde $O \equiv P$.

π : Plano pasante por P para el cual se calcula el vector tensión.

$\bar{\rho}^{\pi} = (\rho^{\pi}_x, \rho^{\pi}_y, \rho^{\pi}_z)$: Vector tensión actuante en el punto P y asociado al plano π, expresado en la terna (O, x, y, z)

(O, u, v, w) : Terna destino o final donde $O \equiv P$.

Veamos la siguiente figura de análisis:



$$\bar{p}^{\pi} = p_x^{\pi} \cdot \check{i} + p_y^{\pi} \cdot \check{j} + p_z^{\pi} \cdot \check{k}$$

$$\begin{cases} p_u^{\pi} = p_x^{\pi} \cdot n_x^u + p_y^{\pi} \cdot n_y^u + p_z^{\pi} \cdot n_z^u \\ p_v^{\pi} = p_x^{\pi} \cdot n_x^v + p_y^{\pi} \cdot n_y^v + p_z^{\pi} \cdot n_z^v \\ p_w^{\pi} = p_x^{\pi} \cdot n_x^w + p_y^{\pi} \cdot n_y^w + p_z^{\pi} \cdot n_z^w \end{cases}$$

que se puede expresar en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} p_u^{\pi} \\ p_v^{\pi} \\ p_w^{\pi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^u & n_y^u & n_z^u \\ n_x^v & n_y^v & n_z^v \\ n_x^w & n_y^w & n_z^w \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_x^{\pi} \\ p_y^{\pi} \\ p_z^{\pi} \end{Bmatrix}$$

$$\{p^{\pi}\}_{uvw} = [T_{TC}] \cdot \{p^{\pi}\}_{xyz}.$$