

## Estado de tensión

Marzo 2004. Emisión 03

### 1.- Introducción

Hasta el presente los estudiantes, en el primer Curso de Estabilidad , han efectuado el análisis estático de esquemas representativos de estructuras formadas por barras refiriendo toda la información al eje de las mismas.

Así se han determinado las reacciones de vínculo externo y las solicitaciones características.

Las primeras surgen de la puesta en evidencia de las mismas, mediante la eliminación de los vínculos externos y su reemplazo por las reacciones. Las segundas, surgen de la eliminación de los vínculos internos que posibilitan la continuidad de las barras y su reemplazo por las solicitaciones con ajuste a una elección convencional de estos vínculos.

Tanto en un caso como en otro se han determinado fuerzas y pares, a los que se pueden denominar **fuerzas generalizadas**, que son efectos estáticos concentrados aplicados en puntos predeterminados.

La determinación de estas fuerzas se ha realizado asumiendo que los sistemas sometidos a la acción de la o las causas deformantes, una vez que estas alcanzaban el valor de aplicación, llegaban a un estado de equilibrio.

Si el conjunto o **el todo** estaba en equilibrio cada una de **las partes** en que se puede imaginar dividida la estructura debía también estar en equilibrio. La representación vectorial de las fuerzas, el álgebra vectorial y las condiciones necesarias y suficientes para justificar el equilibrio de un sistema de fuerzas constituyen las herramientas que posibilitan la determinación cuantitativa de las reacciones y solicitaciones.

Esto último es posible cuando el sistema es isostático, es decir cuando el número de incógnitas estáticas, reacciones de vínculo exteriores e interiores, coincidía con el número de ecuaciones que surgen de plantear las condiciones de equilibrio. De no ser así se está en presencia de un sistema hiperestático cuando es mayor el número de incógnitas que el de ecuaciones o bien de un sistema hipoestático cuando el número de incógnitas es menor que el número de ecuaciones.

En el primero de estos casos, en general, se está en presencia de un sistema con restricciones a sus desplazamientos superiores a las mínimas necesarias para garantizar su inmovilidad, mientras que en el segundo se está en presencia de un mecanismo, es decir de un sistema que carece de capacidad de reacción frente a determinadas acciones.

Para aplicar este razonamiento, si bien la experiencia sensorial demuestra que los sistemas sometidos a la acción de fuerzas sufren cambios de forma, se asumió que el análisis estático se efectuaba considerando que los sistemas no sufrían deformaciones lo cual permitía considerar que el punto de aplicación de las fuerzas no sufría ningún tipo de desplazamiento.

Esta modelización del comportamiento estático no se corresponde con la realidad dado que las fuerzas no pueden transmitirse a través de una superficie de contacto nula. Una fuerza puede ser la representación de la resultante de una acción mecánica, o de una reacción, que un cuerpo ejerce sobre otro con independencia de la forma en que esta acción se

transmite. Pero es evidente que en proximidades de la zona de transmisión de este esfuerzo es muy importante tener en cuenta las características de la superficie asociada a esta transferencia.

Como hecho experimental basta pensar lo que ocurre cuando se intenta cortar con un cuchillo que no tiene filo, caminar sobre la nieve, dormir sobre una tabla, etc.

Lo que se ha registrado hasta el momento, en conclusión, es la descripción de la resultante del efecto que se transmite a través de un conjunto infinito de puntos que materializan el contacto entre las dos partes que se analizan, pero para definir lo que ocurre en cada una de las partes en contacto es necesario incorporar un nuevo concepto. Es el concepto de tensión que se analizará a continuación.

## 2.- Las partes y el todo

Para efectuar el análisis del comportamiento de una estructura es necesario, como se ha visto, formular hipótesis que posibiliten modelar adecuadamente el fenómeno que se estudia.

Es así que resulta de suma utilidad considerar a los materiales componentes de las estructuras como un continuo en el sentido matemático. Es decir que se pueda llegar a separar del mismo partes tan pequeñas como se las pueda imaginar las cuales registrarán un comportamiento análogo al que experimenta el todo. Este concepto es el concepto de **continuidad** y que da lugar a que se designe al análisis de este tipo de sistemas dentro del título de **mecánica del continuo**.

Dentro de este razonamiento siempre es posible imaginar, la estructura que se analiza como un sistema susceptible de ser dividido en un número suficientemente grande de partes infinitésimas o finitas según interese, debiendo, en cada caso, ajustar el razonamiento a la descripción matemática que corresponda, en base al tamaño de la parte, para obtener resultados consistentes con las hipótesis que se adopten.

## 3.- Concepto de sollicitación en barras

Con el fin de simplificar la apreciación de este tipo de concepto se analizará, sin restar generalidad al modelo de análisis, un sólido cuya geometría posee características particulares, que los estudiantes han definido en el curso anterior, la **barra**. Este sólido tiene una dimensión predominante respecto de las otras dos.

Al circunscribir el análisis a este tipo de sólidos se está adoptando una hipótesis, que como se ha visto siempre constituye una simplificación para poder pasar de la realidad al modelo. En este caso se trata de simplificar la descripción matemática del volumen pues se reduce la representación a la identificación de una línea que es la conocida como el **eje de la barra**.

Se parte de considerar sistemas en los cuales se puede asumir que se encuentran en **equilibrio**, ya sea porque se aprecia un comportamiento que permite asumir esta condición (no se mueve, se mueve con velocidad uniforme, se asume mediante la adopción de alguna hipótesis: D`Alambert, por ejemplo, etc). Esta suposición posibilita, en sistemas isostáticos la determinación de las reacciones vinculares, mediante el reemplazo de los vínculos por las acciones que ellos ejercen y conformar el esquema de **cuerpo libre en equilibrio**.

Si se pretende efectuar una descripción estática de lo que ocurre en el interior del continuo que se analiza es necesario proceder a identificar qué es lo que se pretende determinar.

Para ello se puede separar el continuo en partes y estudiar que es lo que ocurre en las superficies en las cuales se han separado las partes. Se puede asumir que las superficies que identifican a las partes conforman un vínculo que es el que se ha removido para la identificación de cada una de ellas.

Si bien la conformación de las partes puede ser cualesquiera tanto en forma como en cantidad a los efectos de los objetivos del análisis que se pretende se asumirá, convencionalmente, que las superficies que limitan a las partes serán planas. Para definir estas superficies, en términos geométricos es necesario identificar un plano, lo cual se efectúa mediante la identificación de un punto de este plano y de su dirección, que puede definirse mediante un versor normal al plano.

Si se pretende simplificar al máximo este análisis se puede asumir que se dividirá la barra que se analiza en dos partes con un plano perpendicular al eje de la barra, a la geometría que se define con esta intersección se la denomina **sección transversal de la barra**, o simplemente **sección**.

Asumiendo que si el todo se encuentra en equilibrio, también deberán estar en equilibrio cada una de las partes que lo integran se puede efectuar la determinación del sistema de fuerzas que se transfiere a través de la sección que se ha definido. En el caso más general de un sistema en el espacio este sistema podrá ser reducido a una fuerza y un par. La fuerza y el par dependerán del centro de reducción elegido.

La elección del centro de reducción es totalmente convencional, puesto que su concepción es producto de un razonamiento teórico. A su vez la fuerza y el par pueden definirse convencionalmente mediante componentes a las cuales se las puede imaginar asociadas a través de vínculos idealizados de la misma forma.

Si se imagina el continuo como una barra genérica, sometida a la acción de fuerzas activas y reactivas en equilibrio, Fig 1, y se divide el todo en dos partes, mediante un plano perpendicular al eje de la barra, se puede obtener la resultante de reducción y el par de reducción, mencionado, con respecto a un punto genérico de ese plano ya sea dentro de la sección transversal de la barra o fuera de ella.

En la Fig1 se indica, como ejemplo, un centro de reducción fuera de la sección transversal. Se puede apreciar que se determina el sistema de fuerzas que equilibra a cada una de las partes. Este sistema integrado por el par de fuerzas  $\mathbf{R}_{12}$  y  $\mathbf{R}_{21}$  y el par de pares  $\mathbf{M}_{12}$  y  $\mathbf{M}_{21}$

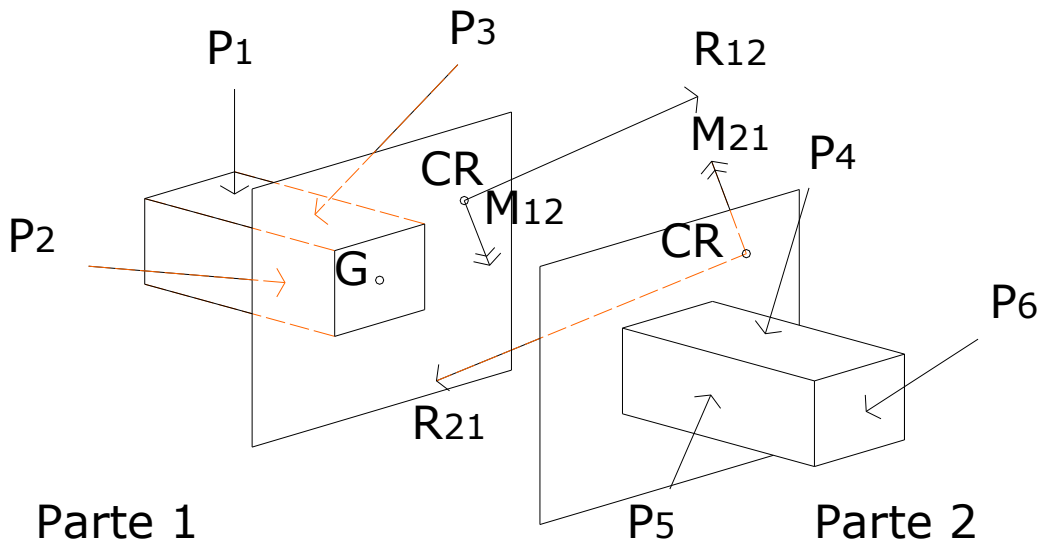


Fig 1

En el caso de las barras es común adoptar como centro de reducción el baricentro de la sección transversal obteniendo en este caso la fuerza y el par de reducción correspondiente a este punto del plano con el cual se define la sección. (Fig 2)

.-

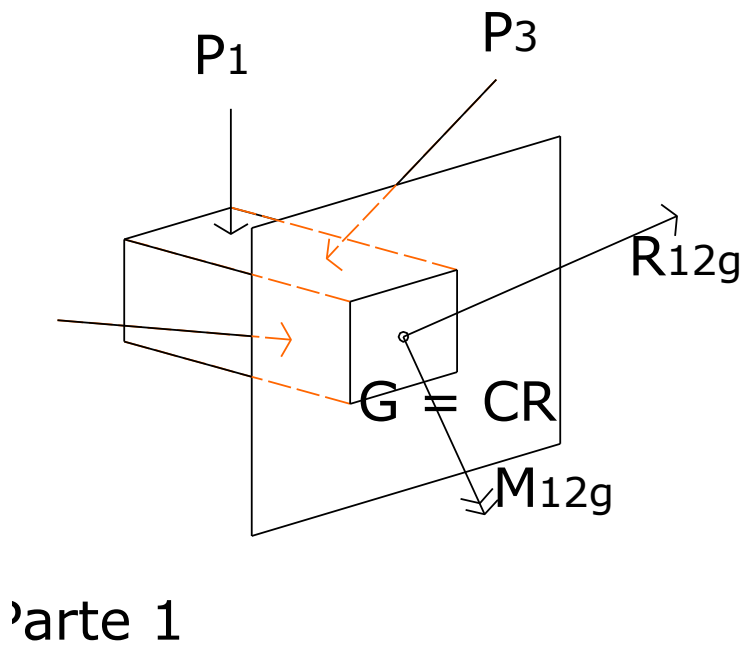


Fig 2

Si se eligen convencionalmente, como componentes de la resultante de reducción y el par de reducción, los versores asociados a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales vinculados a la barra y al plano de corte, se obtienen para la sección un conjunto de fuerzas fácilmente identificables.

Es corriente elegir como eje  $x$ , al eje de la dirección del eje de la barra, y como ejes  $y$  y  $z$  a los ejes coincidentes con los ejes principales de inercia de la sección transversal de la barra, Fig 2

Se define como sollicitación característica al conjunto de fuerzas, activa y reactiva, que actúa en las dos secciones, originalmente en contacto, pertenecientes a cada una de las partes en que ha quedado dividido el todo (Fig3).

De esta forma se define al:

Esfuerzo Normal:	$N$
Esfuerzo de corte:	$Q_y, Q_z$
Momento flector:	$M_y, M_z$
Momento torsor:	$M_x$

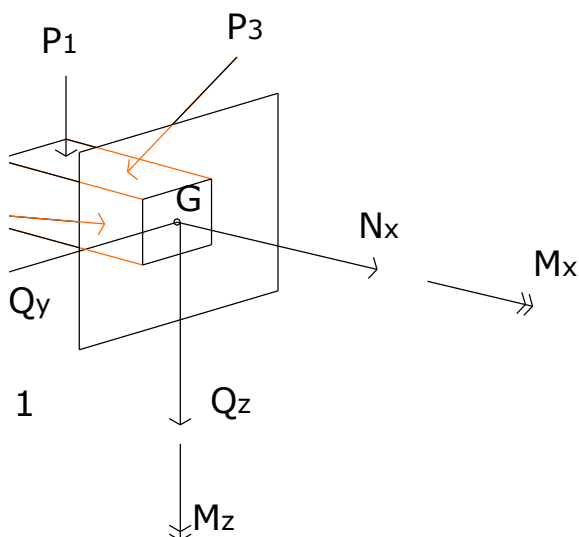


Fig 3

Es evidente que esta definición no posibilita una adecuada comprensión de la forma en que se transmiten las acciones estáticas a través de la sección que se analiza sino que simplemente pone en evidencia una ecuación de equilibrio global para la parte que se está analizando.

Se recomienda observar como, en este caso particular, se sintetiza la descripción referenciando lo que ocurre en el sólido a cada uno de los puntos del eje de la barra. Es como si se estuviese, convencionalmente, reduciendo el problema de tres dimensiones a una única dimensión.

#### 4.- Concepto de tensión

Si se pretendiese describir con mayor precisión la forma en que se transmite la acción estática a través de la sección, se podría imaginar la existencia de un número infinito de vínculos, ubicados sobre superficies infinitesimas, de modo de cubrirla totalmente.

A través de estos vínculos, podría transferirse una fuerza, cuyo punto de aplicación coincidiera con el elemento de superficie que materializa el vínculo.

El carácter puntual, asignado al vínculo, impide que a través del mismo pueda transmitirse un par pues puede asumirse que la fuerza se transmite uniformemente sobre la superficie de carácter infinitesimal.

Al efectuar el corte se pondría en evidencia un conjunto de fuerzas, correspondientes a los vínculos imaginados, cuya intensidad es infinitesimal, pues la misma está asociada a la superficie sobre la cual actúa.

Para independizarse de esta superficie y poder describir la acción estática, es posible referir esta fuerza a la superficie sobre la cual actúa, con un criterio de límite matemático.

A esta relación se la define como **vector tensión** que por lo señalado, actuará en un punto determinado, y asociado al plano de corte. Este vector  $\{\rho_\alpha\}$  será tal que:

$$\{\rho_\alpha\} = \lim_{\Delta S_\alpha \rightarrow 0} \{\Delta P\} / \Delta S_\alpha \quad [1]$$

Se observa que el vector tensión tiene la dirección y el sentido de la fuerza elemental que actúa sobre la superficie, también elemental, siendo su módulo el de una fuerza distribuida uniformemente sobre esa superficie.

La expresión [1] pone en evidencia, además, que la tensión es dependiente de la orientación de la superficie que se está considerando para definir la tensión. Esta orientación puede definirse mediante el versor de la normal al plano considerado.

$$\{\mathbf{n}_\alpha\} = \{n_{\alpha x}, n_{\alpha y}, n_{\alpha z}\}^t \quad [2]$$

las componentes del vector  $\{\mathbf{n}_\alpha\}$  son los cosenos directores del mismo.

En base a lo expuesto podría sintetizarse que el vector tensión va a ser descrito por una función continua dependiente de las coordenadas del punto en análisis y de la dirección del plano pasante por el mismo utilizado para su definición.

$$\{\rho_\alpha\} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, n_{\alpha x}, n_{\alpha y}, n_{\alpha z}) \quad [3]$$

Puede observarse que si en lugar de haber dividido al continuo, en este caso particular una barra, en sólo dos partes, se hubiera dividido al mismo en un número mucho mayor de partes se podría siempre haber definido la tensión sobre un punto de la interfase entre dos partes cualesquiera. En el límite se podría haber llegado a dividir el todo en un número infinito de partes, en cuyo caso cada una de las superficies sería infinitesimal y por ende la fuerza que actuaría sobre ella sería la que referida a esa sección define la tensión.

### 5.- Representación vectorial del vector tensión

El vector tensión correspondiente a un punto de un determinado plano, puede definirse en base a sus componentes con respecto a un determinado sistema de coordenadas generales como ser:

$$\{\rho_\alpha\} = \{\rho_{\alpha x}, \rho_{\alpha y}, \rho_{\alpha z}\} \quad [4]$$

o bien mediante dos componentes asociadas al plano que define al vector tensión.

$$\{\rho_\alpha\} = \{\sigma_\alpha, \tau_\alpha\} \quad [5]$$

Una de las componentes  $\{\sigma_\alpha\}$  se elige de dirección perpendicular al plano que define el vector tensión y la otra contenida en el plano de la sección  $\{\tau_\alpha\}$ . Fig. 4.-

A la primera de las componentes se la denomina **tensión normal** y si su sentido es el

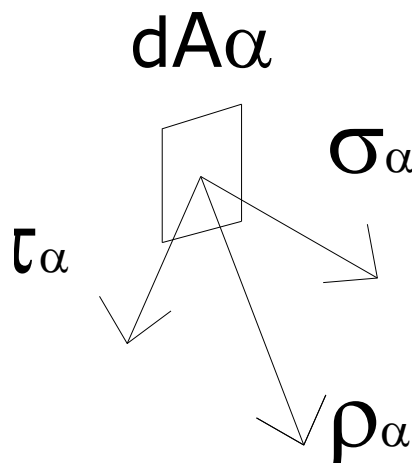


Fig. 4

saliente del plano se la denomina **tensión normal de tracción**, mientras que si tiene el sentido opuesto se la denomina **tensión normal de compresión**.

A la primera de estas tensiones se le asigna el signo positivo mientras que a la segunda se le asigna el signo negativo.

A la segunda de las componentes  $\{\tau_\alpha\}$ , se la denomina **tensión tangencial**, y a su vez puede ser descompuesta en dos componentes de la dirección de dos ejes ortogonales definidos en el plano  $\alpha$ .

$$\{\tau_\alpha\} = \{\tau_{\alpha y}, \tau_{\alpha z}\} \quad [6]$$

Estas componentes no reciben ningún nombre en especial y su signo surge de considerar el signo de la cara sobre la cual actúa y el sentido en relación al eje sobre el cual se la proyecta.

Un plano es positivo cuando la normal saliente del plano coincide con el eje de referencia mientras que la proyección es positiva cuando coincide con la dirección positiva del versor correspondiente. Si los signos correspondientes a cada una de estas dos condiciones son iguales la tensión tangencial es positiva caso contrario será negativa. Se ejemplifica esta convención considerando las tensiones aplicadas sobre una parte infinitésima . Ver Fig 5.-

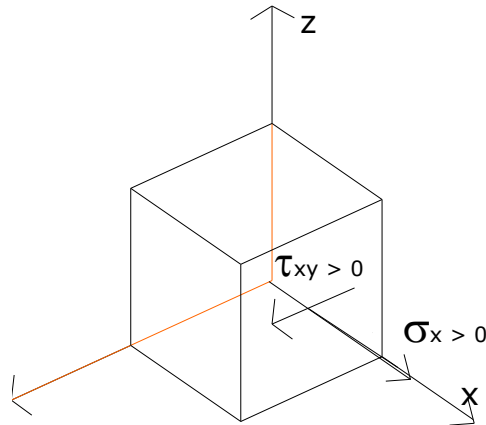


Fig 5

En base a lo que antecede se pueden plantear las siguientes relaciones entre el vector tensión y sus componentes

$$\sigma_{\alpha} = \{\rho_{\alpha}\}^t \cdot \{\mathbf{n}_{\alpha}\} \quad [7]$$

$$\{\tau_{\alpha}\} = \{\rho_{\alpha}\} - \sigma_{\alpha} \cdot \{\mathbf{n}_{\alpha}\} \quad [8]$$

## 6.- Ecuaciones de equivalencia

En base a las definiciones vistas es fácil concluir que para una barra, en la cual se ha identificado una sección, que se identificará con el subíndice  $\alpha$ , la resultante de reducción y el par de reducción,  $\{\mathbf{R}_{\alpha}\}$  y  $\{\mathbf{M}_{\alpha}\}$ , serán las resultantes de las fuerzas correspondientes a las tensiones que actúan sobre los diversos elementos superficiales que definen la mencionada sección.

Las resultantes y las tensiones son pues dos sistemas de fuerzas equivalentes entre los que se pueden plantear las ecuaciones de equivalencia siguientes:

$$\{\mathbf{R}_{\alpha}\} = \int_s \{\rho_{\alpha}\} \cdot d\mathbf{S} \quad [9]$$

$$\{\mathbf{M}_{\alpha_g}\} = \int_s \{\rho_{\alpha}\} \wedge \{\mathbf{r}_{sg}\} d\mathbf{S} \quad [10]$$



Donde el vector  $\{ \mathbf{r}_{sg} \}$  es el que posiciona al elemento  $dS$  con respecto al centro de reducción (baricentro en el caso general) de las fuerzas en la sección transversal de la barra.

Las ecuaciones de equivalencia pueden también expresarse vinculando las sollicitaciones con las componentes del vector tensión. Se puede observar que se incorporan la convención de signos que surge de la terna adoptada.

Asimismo debe tenerse presente que para definir el signo de la sollicitación también se debe tomar en consideración la cara del corte que se está considerando.

$$\{ \mathbf{N}_\alpha \} = \int_s \sigma_\alpha \cdot d\mathbf{S} \quad [11.a]$$

$$\{ \mathbf{Q}_{\alpha_y} \} = \int_s \tau_{\alpha y} \cdot d\mathbf{S} \quad [11.b]$$

$$\{ \mathbf{Q}_{\alpha_z} \} = \int_s \tau_{\alpha z} \cdot d\mathbf{S} \quad [11.c]$$

$$\{ \mathbf{M}_{\alpha_x} \} = \int_s \{ \boldsymbol{\tau}_\alpha \} \wedge \{ \mathbf{r}_{sg} \} d\mathbf{S} \quad [11.d]$$

$$\{ \mathbf{M}_{\alpha_y} \} = \int_s \sigma_\alpha \mathbf{z} d\mathbf{S} \quad [11.e]$$

$$\{ \mathbf{M}_{\alpha_z} \} = \int_s \sigma_\alpha (-\mathbf{y}) d\mathbf{S} \quad [11.f]$$

### 7.- Ecuaciones de equilibrio en un medio continuo

Es posible obtener relaciones entre las tensiones asociadas a los diversos planos que pasan por un punto de un medio continuo mediante el análisis del equilibrio de una parte infinitesimal.

Consideremos un punto de un continuo, tal como el A indicado en la Fig 6, por el que pasan los tres planos perpendiculares a la terna ortogonal de referencia  $x, y, z$ .

Se considera una parte infinitesimal definida por los planos mencionados y otros paralelos a éstos ubicados a distancias también infinitésimas  $dx, dy, dz$ .

Esta parte estará sometida en los planos que pasan por el punto A a las tensiones  $\{\rho_x\}$ ,  $\{\rho_y\}$ ,  $\{\rho_z\}$ , que como se ha visto pueden ser representadas por sus componentes normales y tangenciales a los planos. En los planos paralelos a los que pasan por el punto A actuarán tensiones que se podrán determinar si se conocen las funciones representativas de los vectores tensiones.

Asumiendo que las funciones tensión son continuas siempre será posible expresar éstas últimas en función de las tensiones correspondientes a los planos que pasan por A mediante un desarrollo en serie de potencias de la función tensión.

La proximidad de los planos posibilita limitar el desarrollo de la serie de potencias al segundo término con una precisión razonable. Esta hipótesis conduce a la denominada Teoría Lineal de Tensiones obteniendo como vectores tensión para los planos paralelos a los que pasan por el punto A:

$$\{\rho_x + \partial\rho_x/\partial x \, dx\}, \{\rho_y + \partial\rho_y/\partial y \, dy\}, \{\rho_z + \partial\rho_z/\partial z \, dz\}, \quad [1.12]$$

Estos vectores tensión generan fuerzas que actúan en las caras de la parte infinitesimal que deben estar en equilibrio dado que el todo también lo está.

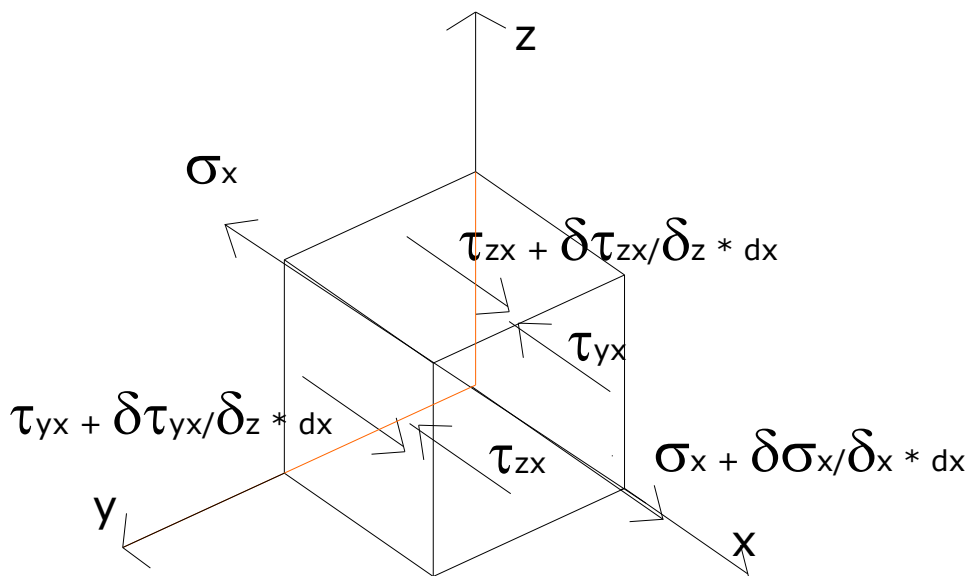


Fig 6

Estas ecuaciones de equilibrio se pueden plantear mediante las componentes de los vectores tensión tal como se indican en la Fig 6.

Además de las fuerzas que actúan en las superficies de la parte actuarán las fuerzas que se generan como consecuencia de la masa encerrada en el volumen de la misma. Estas fuerzas pueden tener distinto origen y dependerán del campo en que se encuentra sometida la parte. Así se tendrá la acción gravitatoria, peso, eventuales acciones dinámicas, acciones debidas a la existencia de campos electromagnéticos, etc.

Se considera asimismo que los cambios de forma que puede sufrir el todo y cada una de las partes son de una magnitud tal que no ejercen modificaciones relevantes en la posición de las fuerzas actuantes. Por este motivo se considera el equilibrio en la configuración no deformada del sistema

Se plantean primero las ecuaciones de proyección según los tres ejes coordenados que deben ser iguales a la componente dinámica.

Según el eje x

$$-\sigma_x dy dz + (\sigma_x + \partial\sigma_x/\partial x dx) dy dz - \tau_{yx} dx dz + (\tau_{yx} + \partial\tau_{yx}/\partial y dy) dx dz - \tau_{zx} dx dy + (\tau_{zx} + \partial\tau_{zx}/\partial z dz) dx dy + \gamma g_x dx dy dz = \gamma dx dy dz \partial^2 u/\partial t^2$$

Según el eje y

$$-\sigma_y dx dz + (\sigma_y + \partial\sigma_y/\partial y dy) dx dz - \tau_{xy} dy dz + (\tau_{xy} + \partial\tau_{xy}/\partial x dx) dy dz - \tau_{zy} dx dy + (\tau_{zy} + \partial\tau_{zy}/\partial z dz) dx dy + \gamma g_y dx dy dz = \gamma dx dy dz \partial^2 v/\partial t^2$$

Según el eje z

$$-\sigma_z dx dy + (\sigma_z + \partial\sigma_z/\partial z dz) dx dy - \tau_{xz} dy dz + (\tau_{xz} + \partial\tau_{xz}/\partial x dx) dy dz - \tau_{yz} dx dz + (\tau_{yz} + \partial\tau_{yz}/\partial y dy) dx dz + \gamma g_z dx dy dz = \gamma dx dy dz \partial^2 w/\partial t^2$$

En estas expresiones  $\gamma$  es la densidad,  $\mathbf{g}$  es la aceleración de la gravedad,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son las componentes del corrimiento del punto A.

Simplificando y dividiendo por el volumen del elemento, no nulo por hipótesis, se obtiene las siguientes ecuaciones en derivadas parciales que vinculan las componentes de los vectores tensión.,

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{yx}/\partial y + \partial\tau_{zx}/\partial z + \gamma g_x = \gamma \partial^2 u/\partial t^2 \quad [1.13.a]$$

$$\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{zy}/\partial z + \gamma g_y = \gamma \partial^2 v/\partial t^2 \quad [1.13.b]$$

$$\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z + \gamma g_z = \gamma \partial^2 w/\partial t^2 \quad [1.13.c]$$

Si se considera que las acciones sobre el continuo modifican su intensidad hasta alcanzar su valor definitivo con una velocidad reducida de manera de no generar variaciones significativas en la velocidad de los desplazamientos se pueden considerar nulos los segundos miembros de las ecuaciones [1.13]

Las acciones que cumplen con esta condición se denominan **cuasi-estáticas**. Salvo que se mencione lo contrario en adelante se considerará que todas las acciones son de este tipo.

Estas ecuaciones se las identifica como las ecuaciones de equilibrio en un medio continuo.

### 8.- Teorema de Cauchy

Para garantizar el equilibrio de la parte analizada en el numeral anterior, Fig 6, es necesario que se verifiquen las ecuaciones de momentos con respecto a tres ejes en el espacio.

Si se consideran los ejes paralelos a los coordenados que pasan por un punto ubicado en el centro de la parte infinitesimal se obtendrá:

Momentos respecto al eje **x**:

$$(\tau_{yz} dx dz + (\tau_{yz} + \partial\tau_{yz}/\partial y dy) dx dy) dy/2 - (\tau_{zy} dx dy + (\tau_{zy} + \partial\tau_{zy}/\partial z dz) dx dy) dz/2=0$$

Simplificando y despreciando infinitésimos de orden superior se obtiene:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad [1.14.a]$$

Tomando momentos respecto al eje **y** y procediendo de la misma manera se obtiene

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad [1.14.b]$$

Tomando momentos respecto al **z** se obtiene de la misma forma

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad [1.14.c]$$

Estas expresiones indican que las componentes de las tensiones tangenciales ubicadas en dos planos y de dirección normal a la arista del diedro que forman ambos planos son iguales y de sentido convergente o divergente con respecto a esta última.

A las expresiones [1.11] se las identifica como resultantes del Teorema de **Cauchy**

### 9.- Determinación de tensiones en un plano cualesquiera conociendo las tensiones en tres planos ortogonales.

La descripción de las fuerzas que se transmiten en el interior de un continuo puede ser realizada para cada uno de los puntos que lo componen mediante un número finito de parámetros.

Ese número finito de parámetros debe ser el que posibilite definir el vector tensión asociado a cualquier plano que pase por el punto analizado.

Para justificar esta propuesta se consideran conocidos los vectores tensión correspondientes a tres planos ortogonales que pasan por el punto A. Estos vectores se definen mediante las tensiones normales y tangenciales de manera similar a la efectuada en el numeral 7. (Ver Figura 7).-

Se considera un plano genérico pasante por el punto A cuya dirección se define mediante su normal, tal como se ha visto,  $\{n_\alpha\}$ . A efectos del análisis que se propone realizar se supone que el plano pasa a una distancia infinitesimal del punto A de manera de configurar un tetraedro elemental. En la Figura 7, a efectos de no confundir el dibujo se han ubicado el vector resultante actuando en el plano genérico que pasa por el punto en estudio  $\rho_\alpha$ , este vector tendrá tres componentes en el sistema coordenado. A su vez se ha indicado en el plano cuya normal es el eje x las componentes del vector tensión actuando en este plano.

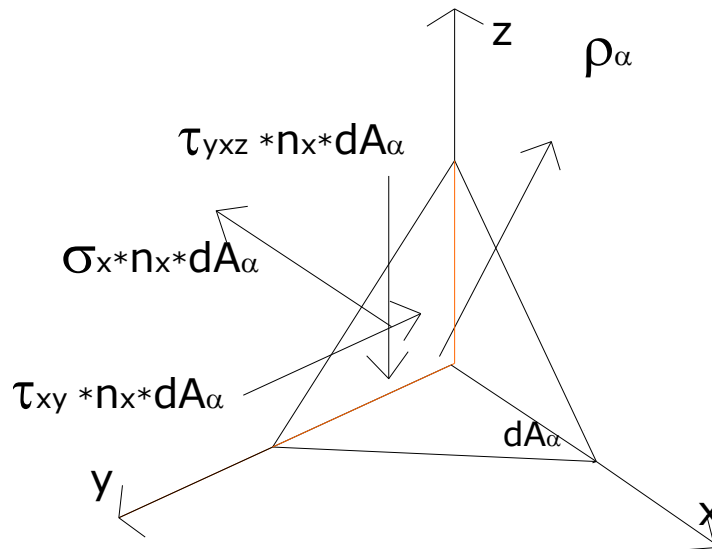


Fig 7

Se considera la superficie del plano "α" de valor unitario  $dA_\alpha = 1$

En forma sintética se podría plantear el equilibrio del tetraedro de la siguiente manera

$$\rho_\alpha \cdot dA_\alpha + \rho_x \cdot dA_\alpha \cdot n_x + \rho_y \cdot dA_\alpha \cdot n_y + \rho_z \cdot dA_\alpha \cdot n_z = \underline{0}$$

El vector que actúa en el plano  $\alpha$  tiene sus tres componentes positivas, mientras que los restantes planos tienen un coseno director igual a la unidad y negativo mientras que los restantes son nulos

Si se plantea, tomando en consideración estos signos, el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el tetraedro se deben analizar las ecuaciones de equilibrio según tres ejes.

Según el eje  $x$  se tendrá:

$$\rho_{\alpha x} \cdot 1 = \sigma_x \cdot n_{\alpha x} \cdot 1 + \tau_{yx} \cdot n_{\alpha y} \cdot 1 + \tau_{zx} \cdot n_{\alpha z} \cdot 1 \quad [1.15.a]$$

los cosenos directores de la normal del plano posibilitan definir las superficies sobre las cuales se aplican las tensiones.

Según los otros dos ejes se obtiene

$$\rho_{\alpha y} \cdot \mathbf{1} = \tau_{xy} \cdot \mathbf{n}_{\alpha x} \cdot \mathbf{1} + \sigma_y \cdot \mathbf{n}_{\alpha y} \cdot \mathbf{1} + \tau_{zy} \cdot \mathbf{n}_{\alpha z} \cdot \mathbf{1} \quad [1.15.b]$$

$$\rho_{\alpha z} \cdot \mathbf{1} = \tau_{xz} \cdot \mathbf{n}_{\alpha x} \cdot \mathbf{1} + \tau_{yz} \cdot \mathbf{n}_{\alpha y} \cdot \mathbf{1} + \sigma_z \cdot \mathbf{n}_{\alpha z} \cdot \mathbf{1} \quad [1.15.c]$$

Estas expresiones pueden sintetizarse matricialmente mediante la introducción de una matriz  $[ \mathbf{T} ]$  cuyos elementos son las componentes de los vectores tensión en los planos coordenados.

$$\{ \rho_{\alpha} \} = [ \mathbf{T} ] \cdot \{ \mathbf{n}_{\alpha} \} \quad [1.16]$$

La expresión [1.16] permite satisfacer la determinación del vector tensión para cualquier plano pasante por un punto siempre que se conozca la matriz  $[ \mathbf{T} ]$  para ese punto. Esta matriz se denomina **tensor de tensiones** y posibilita, por lo expuesto, conocer el **estado de tensión** en el entorno del punto A que se analiza.

El tensor de tensiones por lo visto es un tensor simétrico

$$[ \mathbf{T} ] = [ \{ \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \}; \{ \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz} \}; \{ \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z \} ] \quad [1.17]$$

Cabe señalar por lo expuesto que se conoce el estado de tensión en el entorno de un punto cuando se conocen las tensiones en todos los planos que pasan por ese punto. Para conocer este infinito número de tensiones sólo se necesita conocer el tensor de tensiones que en el caso más general implica conocer seis parámetros.

Debe prestarse especial atención a la diferencia que existe entre el concepto de tensión (asociado a un plano que pasa por un punto del continuo) y el de estado de tensión (asociado a un punto del continuo)

## 10.- Tensiones y planos principales.

La expresión [1.16] permite analizar la existencia de planos que den lugar a estados de tensiones particulares. Entre estos es de suma importancia analizar aquellos planos para los cuales la tensión tangencial es nula.

Se definen como **planos principales**, y a sus tensiones como **tensiones principales**, aquellos para los cuales se anula la tensión tangencial.

Si la tensión tangencial es nula el vector tensión tendrá la dirección de la normal al plano principal. Por lo tanto se puede definir al vector tensión como:

$$\{ \rho_{\alpha p} \} = \sigma_p \cdot \{ \mathbf{n}_{\alpha p} \} \quad [1.18]$$

pero de la [1.16] la tensión principal será igual a:

$$\{ \rho_{\alpha p} \} = [ \mathbf{T} ] \cdot \{ \mathbf{n}_{\alpha p} \} \quad [1.19]$$

Igualando [1.18] y [1.19]

$$\sigma_p \cdot \{ \mathbf{n}_{\alpha p} \} = [ \mathbf{T} ] \cdot \{ \mathbf{n}_{\alpha p} \} \quad [1.20]$$

Ordenando y denominando a la matriz unidad  $[ \mathbf{1} ]$  por formato se obtiene

$$\{ \sigma_p \cdot [ \mathbf{1} ] - [ \mathbf{T} ] \} \cdot \{ \mathbf{n}_{\alpha p} \} = \{ 0 \} \quad [1.21]$$

Dado que el vector  $\{ \mathbf{n}_{\alpha p} \}$  es, por hipótesis, no nulo se está en presencia de un típico problema de autovalores y autovectores del tensor de tensiones.

Los autovalores serán los valores de las tensiones principales y los autovectores identifican los planos principales.

Siendo el tensor de tensiones de tercer orden existirán tres planos principales, ortogonales entre sí, y tres tensiones principales asociadas a los mismos.

Si los planos respecto de los cuales se define el tensor de tensiones son los planos principales se obtiene el tensor principal de tensiones correspondiente al estado de tensión del punto en estudio.

El tensor principal es un tensor diagonal cuyos elementos son las tensiones principales.

$$[ \mathbf{T}_p ] = [ \{ \sigma_1, 0, 0 \}; \{ 0, \sigma_2, 0 \}; \{ 0, 0, \sigma_3 \} ] \quad [1.22]$$

Si las tres tensiones principales son distintas de cero se está en presencia del caso general de un **estado triple de tensiones**.

Si una de las tensiones principales es nula se está en presencia de un **estado doble de tensiones**. Es fácil ver, en este caso particular, que las tensiones en cualquier plano se mantendrán siempre paralelas a un plano determinado.

Si dos de las tensiones principales son nulas se está en presencia de un **estado simple de tensiones**. En este caso las tensiones en cualquier plano se mantendrán siempre paralelas a una dirección determinada.

Se demuestra que las tensiones principales máximas se encuentran en los planos principales y las tensiones tangenciales máximas en planos desfasados  $45^\circ$  respecto de los planos principales.

#### 14.- Representación del estado de tensión.

Existe una representación clásica del estado de tensión desarrollada por Mohr y posibilita conociendo las tensiones principales identificar las tensiones normales y tangenciales para cualquier plano.

La representación se efectúa mediante dos ejes ortogonales llevando en ordenadas la tensión tangencial y en abcisas la tensión normal. Cada punto del espacio así definido representa un plano al cual le corresponden las tensiones que lo identifican.

En el eje de abcisas se identifican los planos principales, para los cuales es nula la tensión tangencial, y se demuestra que puede identificarse cada uno de los planos pasantes por el punto a partir de la terna principal, es decir la asociada a los planos principales.

Esta representación es útil para visualizar particularidades del estado de tensión y en el pasado fue utilizado como herramienta de cálculo gráfico, aspecto que hoy no tiene aplicación por la facilidad que brinda la computación para efectuar los cálculos.

La visualización de particularidades del estado de tensión que brinda esta representación permite la ejecución de controles conceptuales de los cálculos y con este criterio es que se incorpora el tema al curso.

Se remite, para el desarrollo del tema, al libro Estabilidad Segundo Curso del Ing. Enrique D. Fliess (Editorial Kapelusz) Páginas 41 a 54 y Páginas 81 a 101.