

Trazado de elásticas en una barra de eje recto

Se analizará en la presente sección la determinación de las elásticas de deformación en una barra de eje recto, sometida a la acción de un estado de cargas genérico.

Se asumen la siguientes hipótesis con los comentarios que hacen a las restricciones que impone

- a. Material elástico lineal
- b. Linealidad estática
El equilibrio se analiza en la configuración no deformada de la barra
- c. Linealidad cinemática
Los desplazamientos se consideran lo suficientemente pequeños para suponer relaciones lineales entre las componentes de los mismos.
- d. Barra de sección transversal constante
Esta hipótesis tiene por objeto simplificar la solución de las ecuaciones diferenciales
- e. Los ejes de la terna de referencia en el plano de la sección coinciden con los ejes principales de inercia de la sección transversal.

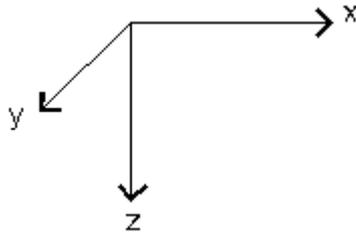
Las relaciones entre sollicitaciones y desplazamientos han sido obtenidas al tratar la teoría general de barras. Se relacionaron las componentes que identificaban los cambios de forma del eje de la barra da_g/dx , con el vector de sollicitaciones.

$$\frac{da_g}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{du_g}{dx} \\ \frac{dv_g}{dx} \\ \frac{dw_g}{dx} \\ \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dx} \\ \frac{d\theta_z}{dx} \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \frac{da_g}{dx} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xg} \\ \gamma_{xyg} \\ \gamma_{zxc} \\ \chi_{xg} \\ \chi_{yg} \\ \chi_{zg} \end{pmatrix}$$

$$\frac{da_g}{dx} = R_{gs} \cdot S \quad \text{siendo} \quad S = \begin{pmatrix} N_x \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad R_{gs} = \begin{pmatrix} \frac{1}{EF} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{G \cdot F} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa}{G \cdot F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G \cdot J_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E \cdot J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E \cdot J_z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{du_g}{dx} \\ \frac{dv_g}{dx} \\ \frac{dw_g}{dx} \\ \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dx} \\ \frac{d\theta_z}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{EF} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{G \cdot F} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa}{G \cdot F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G \cdot J_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E \cdot J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E \cdot J_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_x \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_g}{dx} \\ \frac{dv_g}{dx} \\ \frac{dw_g}{dx} \\ \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dx} \\ \frac{d\theta_z}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{EF} \cdot N_x \\ \frac{\kappa}{(G \cdot F)} \cdot Q_y \\ \frac{\kappa}{(G \cdot F)} \cdot Q_z \\ \frac{1}{(G \cdot J_p)} \cdot M_x \\ \frac{1}{(E \cdot J_y)} \cdot M_y \\ \frac{1}{(E \cdot J_z)} \cdot M_z \end{pmatrix}$$

La terna de referencia que se ha utilizado en el desarrollo es la siguiente.



Se pueden plantear las siguientes relaciones matemáticas entre los giros y corrimientos

$$\theta_y = -\frac{d}{dx} w_g \quad \theta_z = \frac{d^1}{dx^1} u_g$$

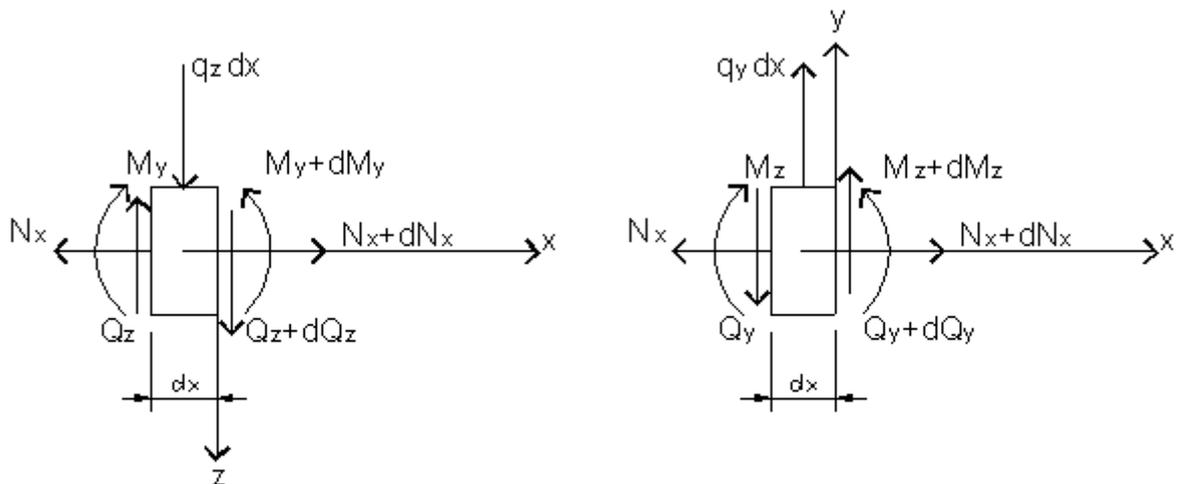
y considerando la hipótesis de pequeños desplazamientos (Linealidad cinemática) se puede expresar la curvatura como

$$\chi_y = -\frac{d^2}{dx^2} w_g \quad \chi_z = \frac{d^2}{dx^2} u_g$$

Planteando la determinación de las elásticas en forma independiente para cada una de las sollicitaciones se obtendrán las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u_g &= \frac{N_x}{E \cdot A} & \frac{d}{dx} v_g &= \frac{Q_y \cdot \kappa_y}{G \cdot A} & \frac{d}{dx} w_g &= \frac{Q_z \cdot \kappa_z}{G \cdot A} \\ \frac{d}{dx} \theta_x &= \frac{M_x}{G \cdot J_p} & \frac{d^2}{dx^2} v_g &= \frac{M_z}{E \cdot J_z} & \frac{d^2}{dx^2} w_g &= \frac{-M_y}{E \cdot J_y} \end{aligned}$$

A su vez las ecuaciones de equilibrio de una barra de eje recto en función de las cargas apli son considerando las sollicitaciones características positivas como se indica las siguientes:



$$0 = q_z \cdot dx + dQ_z \quad q_z = -\frac{d}{dx} Q_z \quad 0 = -Q_z \cdot dx + M_y \quad Q_z = \frac{d}{dx} M_y$$

$$q_z = -\frac{d^2}{dx^2} M_y \quad \text{o bien reemplazando}$$

$$q_z = E \cdot J_y \cdot \frac{d^4}{dx^4} w_g \quad (1)$$

Esta es la ecuación diferencial de la elástica debida a la flexión en el plano xz

$$0 = q_y \cdot dx + dQ_y \quad q_y = -\frac{d}{dx} Q_y \quad 0 = -Q_y \cdot dx - M_z \quad Q_y = -\frac{d}{dx} M_z$$

$$q_y = -\frac{d^2}{dx^2} M_z \quad \text{o bien reemplazando}$$

$$q_y = E \cdot J_z \cdot \frac{d^4}{dx^4} v_g \quad (2)$$

Esta es la ecuación diferencial de la elástica debida a la flexión en el plano xy

El efecto de la sollicitación por corte se obtiene superponiendo los efectos de esta sollicitación según lo indicado más arriba y considerando a qx la fuerza aplicada en la dirección del eje

$$q_x = -\frac{G \cdot A}{\kappa_x} \cdot \frac{d^2}{dx^2} w_g \quad (3)$$

$$q_y = \frac{-G \cdot A}{\kappa_y} \cdot \frac{d^2}{dz^2} v_g \quad (4)$$

En la dirección del eje de la barra se plantean las ecuaciones vinculadas a las cargas distribuidas en la dirección del eje de la misma, fuerzas o pares según corresponda.

Trazado de la elástica en barras de eje recto – Autor: Ing. Roberto Carretero

$$0 = q_x \cdot dx + dN_x \quad q_x = \frac{d}{dx} N_x \quad q_x = -E \cdot A \cdot \frac{d^2}{dx^2} u_g \quad (5)$$

$$0 = m_x \cdot dx + dM_x \quad m_x = \frac{d}{dx} M_x \quad m_x = -G \cdot J_p \cdot \frac{d^2}{dx^2} \theta_x \quad (6)$$

Las seis ecuaciones diferenciales planteadas posibilitan el trazado de las elásticas de deformación de una barra recta sometida a un estado de cargas genérico. La solución de las ecuaciones diferenciales conducirá a un total de 12 constantes de integración para el estado más general. Estas constantes dependerán de condiciones de borde y ponen en evidencia, en el sentido más general, los desplazamientos que pueden sufrir las secciones extremas de una barra.

Por este motivo se identifican a las mismas como los grados de libertad de desplazamiento de barra en el espacio dado que conocidos esos desplazamientos y el estado de cargas que actúa sobre la barra siempre será posible con ajuste a las hipótesis planteadas determinar la curva en el espacio que representa al eje deformado de la barra en estudio.

Se resolverán seguidamente diversos ejemplos de obtención de elásticas de deformación mecánica a partir de la aplicación de las ecuaciones diferenciales encontradas.

EJERCICIO Nº1

Sea el caso de una barra sometida a una carga uniformemente distribuida en el plano xz, o bien descargada en ese plano

$$\begin{aligned} kN &:= 1000N & mN &:= 100kN & mPa &:= \frac{mN}{m^2} \\ E &:= 1 & J &:= 1 & q_z &:= 1 & L &:= 5 \end{aligned}$$

Elástica debida a la flexión

Se deben definir las condiciones de borde que están reguladas por las restricciones absolutas en este caso imponen los apoyos.

De acuerdo a lo visto se tendrá

Si $q_z=0$ se obtiene

$$\frac{d^3}{dx^3} w = \frac{q_z}{E \cdot J_y} \cdot x + C_1$$

$$\frac{d^3}{dx^3} w = C_1$$

$$\frac{d^2}{dx^2} w = \frac{q_z}{E \cdot J_y} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$\frac{d^2}{dx^2} w = C_1 \cdot x + C_2$$

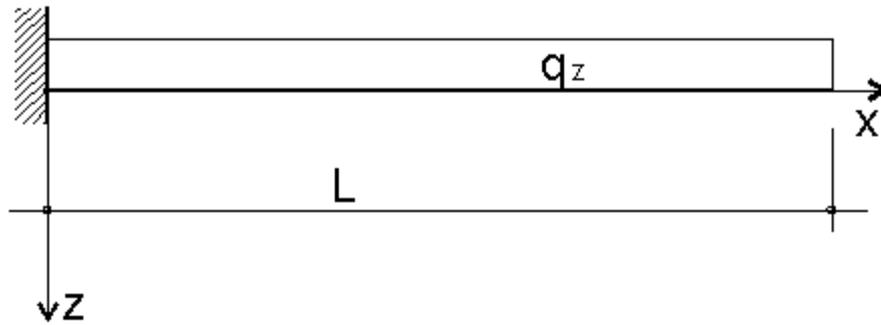
$$\frac{d}{dx} w = \frac{q_z}{E \cdot J_y} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

$$\frac{d}{dx} w = C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

$$w = \frac{q_z}{E \cdot J_y} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

$$w = C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

Como se puede apreciar la forma de la elástica depende de la carga aplicada. La determinación de la elástica dependerá de las condiciones de borde. Seguidamente se analizan distintas situaciones.



Se considera una barra empotrada en un extremo y sometida a una carga uniforme. Con el fin de simplificar los números se considerará actuando una carga ficticia equivalente a $q_z/E J_y$

$$\frac{d^3}{dx^3} w = q_{zf} \cdot x + C_1$$

$$Q_z = -E \cdot J_y \cdot \frac{d^3}{dx^3} w$$

$$\frac{d^2}{dx^2} w = q_{zf} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$M_y = -E \cdot J_y \cdot \frac{d^2}{dx^2} w$$

$$\frac{d}{dx} w = q_{zf} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

$$w = q_{zf} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

En el apoyo izquierdo para $x=0$ se tendrá

$$w = 0 \quad \frac{d}{dx} w(0) = 0$$

En el extremo libre derecho $x=L$ se tendrá

$$M_y = 0 = \frac{d^2}{dx^2} w \quad Q_z = 0 = \frac{d^3}{dx^3} w$$

Planteando estas cuatro condiciones se puede obtener un sistema de ecuaciones que permite calcular las constantes y por ende la elástica

$$L = 5 \quad q_{zf} := 1$$

Given

Trazado de la elástica en barras de eje recto – Autor: Ing. Roberto Carretero

$$0 = q_{zf} \cdot L + C_1$$

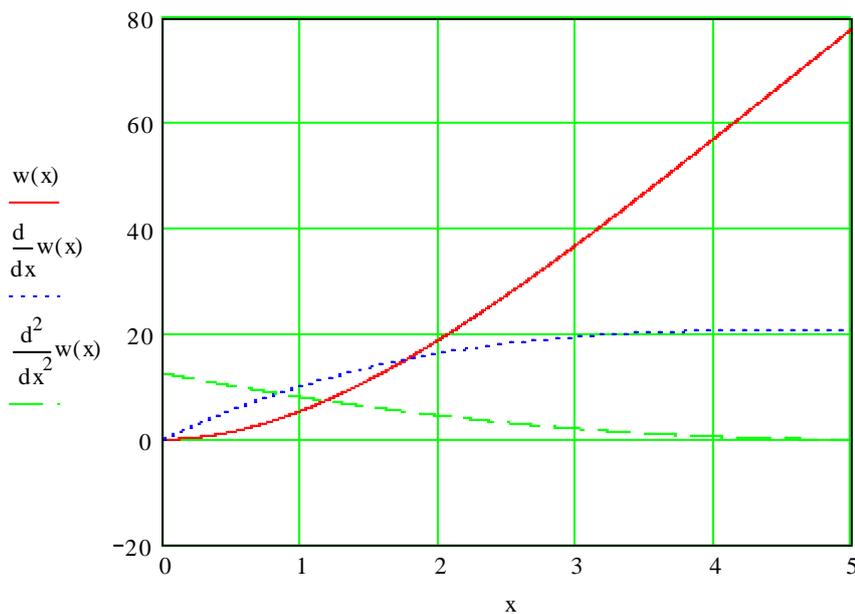
$$0 = q_{zf} \cdot \frac{L^2}{2} + C_1 \cdot L + C_2$$

$$0 = q_{zf} \cdot \frac{0^3}{6} + C_1 \cdot \frac{0^2}{2} + C_2 \cdot 0 + C_3$$

$$0 = q_{zf} \cdot \frac{0^4}{24} + C_1 \cdot \frac{0^3}{6} + C_2 \cdot \frac{0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4$$

$$\text{Find}(C_1, C_2, C_3, C_4) \rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w(x) := \left[q_{zf} \cdot \frac{x^4}{24} + (-5 \cdot q_{zf}) \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{25}{2} \cdot q_{zf} \cdot \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x + 0 \right]$$



La consideración de la deformación por corte requiere la resolución por separado de la ϵ diferencial que toma en consideración este tipo de efecto.

$$q_z = -\frac{G \cdot A}{\kappa_z} \cdot \frac{d^2}{dx^2} w_g$$

Trazado de la elástica en barras de eje recto – Autor: Ing. Roberto Carretero

De esta expresión surge

$$\frac{d^2}{dx^2} w_{gQ} = \frac{-q_z \cdot \kappa_z}{G \cdot A}$$

$$\frac{d}{dx} w_{gQ} = \frac{-q_z \cdot \kappa_z}{G \cdot A} \cdot x + C_{1Q}$$

$$w_{gQ} = \frac{-q_z \cdot \kappa_z}{G \cdot A} \cdot \frac{x^2}{2} + C_{1Q} \cdot x + C_{2Q}$$

Las condiciones de borde serán las vinculadas al corte

para $x=0$ se anula el corrimiento y la tangente es nula por lo cual las constantes son nul

$$w_{gQ} = \frac{-q_z \cdot \kappa_z}{G \cdot A} \cdot \frac{x^2}{2}$$

Se puede aprovechar este ejemplo para determinar la influencia de la deformación relativa respecto de la que genera la flexión

El corrimiento máximo se verifica en el extremo de la barra

$$w_{gQ_{\max}} = \frac{-q_z \cdot \kappa_z}{G \cdot A} \cdot \frac{L^2}{2} \quad w_{gM_{\max}} = \left[\left[q_z \cdot \frac{L^4}{24} + (-L \cdot q_z) \cdot \frac{L^3}{6} + \frac{L^2}{2} \cdot q_z \cdot \frac{L^2}{2} \right] \cdot \frac{1}{E \cdot J_y} \right]$$

$$w_{gM_{\max}} = \frac{q_z \cdot L^4}{E \cdot J_y}$$

$$\frac{w_{gM_{\max}}}{w_{gQ_{\max}}} = \frac{\frac{L^2}{E \cdot \frac{J_y}{G \cdot A}} \cdot 2}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \left(\frac{L}{i_y} \right)^2$$

Si se considera en forma simplificada que el factor de forma y el módulo de Poisson proxir la unidad se tiene que la relación entre los corrimientos debidos a estas solicitaciones es si a la denominada esbeltez de la barra al cuadrado

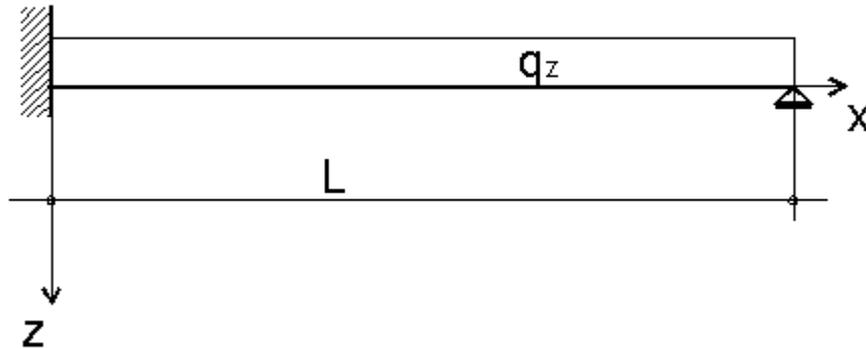
Si la sección fuese rectangular, se puede escribir en forma aproximada

$$\frac{w_{gM_{\max}}}{w_{gQ_{\max}}} = 12 \cdot \left(\frac{L}{d} \right)^2$$

Si consideramos una relación mínima para configura una barra de 2 se tendría una inciden orden del 2% de los desplazamientos debidos al corte con respecto a los debidos a la flexi

EJERCICIO Nº2

Considerando carga y luces similares pero una barra empotrada en el extremo izquierdo y articulada en el extremo derecho.



Given

$$0 = q_{zf} \cdot \frac{L^2}{2} + C_1 \cdot L + C_2$$

$M=0$ para $x=L$

$$0 = q_{zf} \cdot \frac{0^3}{6} + C_1 \cdot \frac{0^2}{2} + C_2 \cdot 0 + C_3$$

$d w/dx=0$ para $x=0$

$$0 = q_{zf} \cdot \frac{0^4}{24} + C_1 \cdot \frac{0^3}{6} + C_2 \cdot \frac{0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4$$

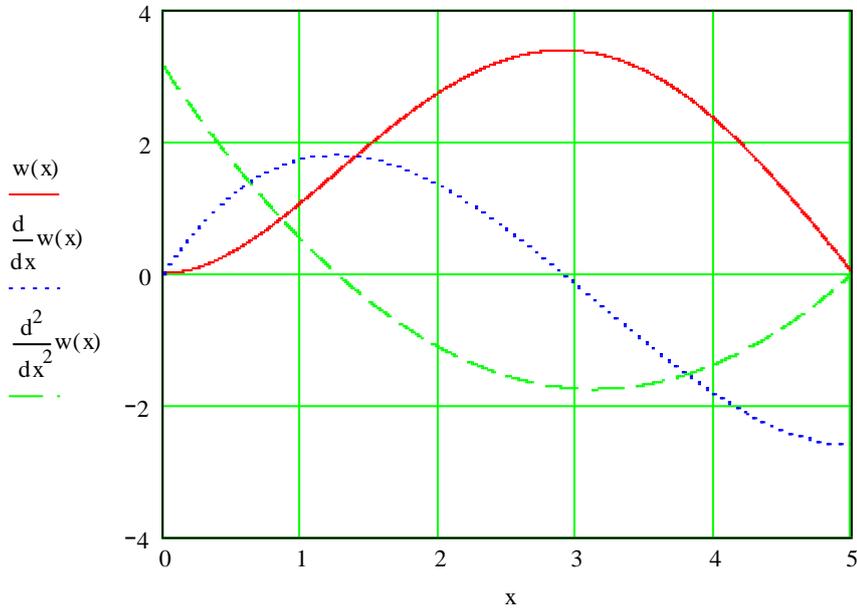
$w=0$ para $x=0$

$$0 = q_{zf} \cdot \frac{L^4}{24} + C_1 \cdot \frac{L^3}{6} + C_2 \cdot \frac{L^2}{2} + C_3 \cdot L + C_4$$

$w=0$ para $x=L$

$$\text{Find}(C_1, C_2, C_3, C_4) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{25}{8} \\ \frac{25}{8} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w(x) := \left[q_{zf} \cdot \frac{x^4}{24} + \left(\frac{-25}{8} \right) \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{25}{8} \cdot q_{zf} \cdot \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x + 0 \right]$$



Es de apreciar que en este último caso se ha resuelto un sistema hiperestático de primer g