

ESTABILIDAD IIa FI-UBA

1.- OBJETO

Ejemplo de solución de la determinación de tensiones tangenciales en una barra de sección compuesta por tramos de espesor reducido en relación a su longitud, múltiplemente conexas, sometida a la acción de una sollicitación de torsión.

2.- RESUMEN Y ANTECEDENTES

Se desarrolla un problema típico para una sección con dos celdas cerradas, explicitando el procedimiento de análisis, el cual se puede extender a un número mayor de celdas.

3.- DESARROLLO

Sea la siguiente sección transversal de una barra compuesta por un material de comportamiento elástico lineal, como la indicada en la Figura 1, sometida a la acción de un momento torsor M uniforme a lo largo de la misma.

Las hipótesis básicas son las siguientes:

a) Las secciones rectas giran un ángulo θ en torno a un eje paralelo al eje de la pieza denominado eje de torsión. El centro de torsión es el punto de intersección del eje con el plano de la sección.

b) El giro de la sección por unidad de longitud se lo denomina, *ángulo específico o unitario de torsión* o bien **curvatura de torsión** $\chi_x = d\theta/dx$

c) Cada punto de la sección transversal experimenta corrimientos en la dirección del eje x , expresables mediante una función $u(y,z)$. Estos corrimientos no son función de x sino que los mismos son iguales para todos los puntos de la sección y la variación de estos corrimientos en la dirección x es nula por lo cual las tensiones normales son nulas. (Hipótesis de las secciones planas)

Lo expuesto se puede definir como sigue

$$u_{(x,y,z)} = u_{(y,z)} = \chi_x \cdot \xi_{(y,z)} \quad (1)$$

$$v_{(x,y,z)} = -\chi_x \cdot x \cdot z \quad (2)$$

$$w_{(x,y,z)} = \chi_x \cdot x \cdot y \quad (3)$$

La función $\xi_{(y,z)}$, se denomina función de alabeo de Saint Venant

Al ser constante la curvatura de torsión, el producto $\chi_x \cdot x$ es el giro θ de la sección en estudio identificada por la ordenada x a partir de un determinado origen de corrimiento nulo.

Tomando como referencia lo visto al determinar el estado de deformación de un medio continuo se puede determinar

$$\epsilon_x = \delta u / \delta x = 0 \quad \epsilon_y = \delta v / \delta y = 0 \quad \epsilon_z = \delta w / \delta z = 0 \quad (4)$$

$$\gamma_{xy} = \delta u / \delta y + \delta v / \delta x = \chi_x \cdot (\delta \xi_{(y,z)} / \delta y - z) \quad (5)$$

$$\gamma_{xz} = \delta u / \delta z + \delta w / \delta x = \chi_x \cdot (\delta \xi_{(y,z)} / \delta z + y) \quad (6)$$

$$\gamma_{yz} = \delta v / \delta z + \delta w / \delta y = 0 \quad (7)$$

De acuerdo a la hipótesis de linealidad las únicas tensiones no nulas son

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \chi_x \cdot (\delta \xi_{(y,z)} / \delta y - z) \quad (8)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot \chi_x \cdot (\delta \xi_{(y,z)} / \delta z + y) \quad (9)$$

Si se reemplazan estas expresiones de las tensiones en las ecuaciones de equilibrio interno de un medio continuo se obtiene

$$\delta^2 \xi_{(y,z)} / \delta^2 y + \delta^2 \xi_{(y,z)} / \delta^2 z = 0 \quad (10)$$

De esta ecuación diferencial se deduce que la solución debe ser armónica, y las condiciones de borde imponen que la componente de las tensiones tangenciales perpendicular a la línea que define el borde de la sección transversal debe ser nula.

La ecuación diferencial no tiene solución analítica conocida, por lo tanto no es fácil obtener una expresión del alabeo que además cumpla las condiciones de contorno. No obstante esto es posible de obtener por medio del análisis numérico (elementos finitos)

El momento torsor se obtendrá de las ecuaciones de equivalencia considerando que las únicas tensiones no nulas son las tangenciales

$$M_x = \int (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dA \quad Q_y = \int \tau_{xy} dA = 0 \quad Q_z = \int \tau_{xz} dA = 0$$

(11)

(12)

(13)

Puesto que las únicas tensiones no nulas son las tangenciales indicadas en función de las ecuaciones de equilibrio interno de un medio continuo se pueden satisfacer siempre definiendo una función ψ tal que

$$\tau_{xy} = \delta \psi / \delta z \quad y \quad \tau_{xz} = - \delta \psi / \delta y \quad (14)$$

A la función ψ se la conoce como función de Prandtl

La relación con la función de alabeo de Saint Venant se obtiene igualando las tensiones

$$\delta \psi / \delta z = G \cdot \chi_x \cdot (\delta \xi_{(y,z)} / \delta y - z) \quad (15) \quad \delta \psi / \delta y = - G \cdot \chi_x \cdot (\delta \xi_{(y,z)} / \delta z + y) \quad (16)$$

Eliminado ξ en las expresiones anteriores se obtiene

$$\delta^2\psi/\delta^2y + \delta^2\psi/\delta^2z = -2 \cdot G \cdot \chi_x \quad (17)$$

y las condiciones de contorno quedan reducidas a

$$\delta\psi/\delta s = 0 \quad (18)$$

Siendo s la función que describe el contorno de la sección analizada

El momento torsor, luego de operar con las expresiones anteriores se puede definir para una sección genérica como

$$M_x = 2 \cdot \int \psi \, dA - \int (y \cdot n_y + z \cdot n_z) \, ds \quad (19)$$

siendo n_y y n_z los cosenos directores de la normal a la curva que define el perímetro de la sección que se analiza

De lo expuesto también es factible deducir el valor de una circulación en un área encerrada por la curva que se circula

$$\int \tau \, ds = 2 \cdot G \cdot \chi_x \cdot A \quad (20)$$

$$\chi_x = \frac{1}{2 \cdot G \cdot A} \cdot \int \tau \, ds \quad (21)$$

En un tubo de pared delgada de la expresión (18) se deduce que la función ψ tiene derivada nula en proximidades del borde en dirección normal al mismo, lo cual para pequeños espesores puede asumirse que la función ψ es constante en el ancho de la sección.

$$M_x = 2 \cdot \psi \cdot A \quad (22)$$

Se ha deducido para los tubos de pared delgada la siguiente expresión

$$M_x = \tau \cdot e \cdot 2 \cdot A \quad (23)$$

Lo cual permite identificar a $\psi = \tau \cdot e \quad (24)$

Reemplazando en la (21) y considerando que la función ψ es constante en la circulación

$$\chi_x = \frac{\psi}{2 \cdot G \cdot A} \cdot \int \frac{1}{e} \, ds \quad (25)$$

Asimismo se ha determinado para un tubo de pared delgada la curvatura de torsión como

$$\chi_x = \frac{M_x}{4 \cdot G \cdot A^2} \cdot \int \frac{1}{e} \, ds \quad (26)$$

Si se reemplaza el valor del momento obtenido en la (23)

$$\chi_x = \frac{\tau \cdot e \cdot 2 \cdot A}{4 \cdot G \cdot A^2} \int \frac{1}{e} ds \quad (27)$$

Lo cual permite apreciar que esta expresión coincide con la (25) y se puede resumir en el siguiente concepto: la curvatura de torsión determinada en una circulación se puede definir mediante la función de Prandtl que permanece constante a lo largo de la misma si se trata de un tubo de pared delgada.

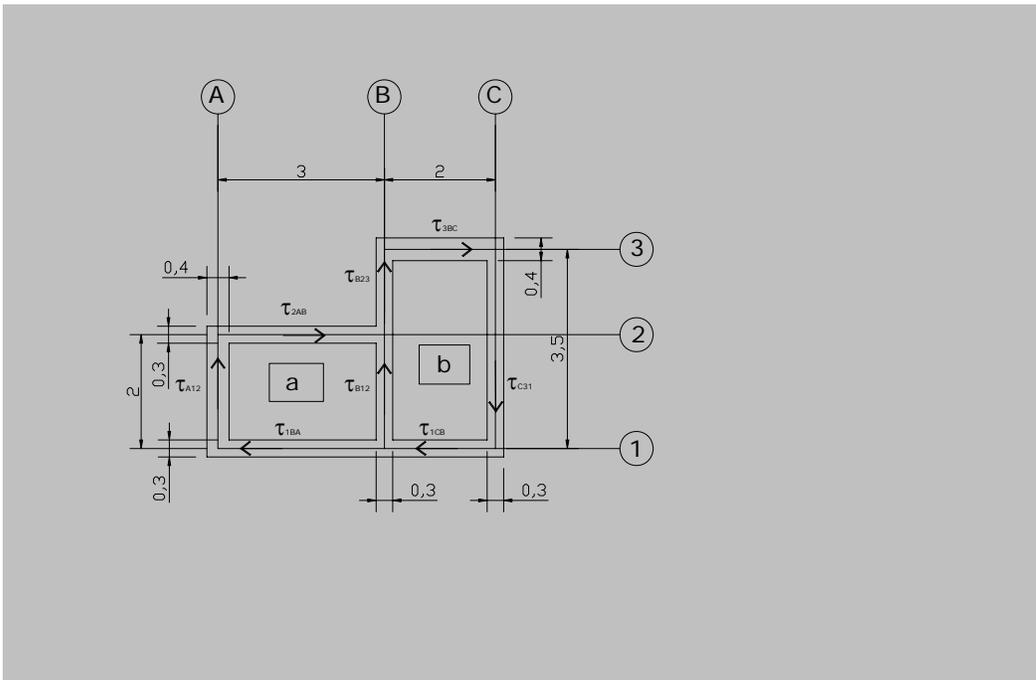


Figura 1

$$E_b := 30000 \text{ MPa}$$

Dimensiones en metros

$$KN := 10 \text{ N}$$

$$\mu := 0.2$$

$$M_x := 600 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$G := \frac{E_b}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

$$G = 1.25 \times 10^4 \cdot \text{MPa}$$

Se han identificado dos celdas con letras y las tensiones en cada uno de los tramos mediante el eje que ubica la dirección y los dos ejes que limitan el tramo.

$$L_{2AB} := 3 \quad e_{2AB} := 0.3$$

$$L_{B23} := 1.5 \quad e_{B23} := 0.3$$

$$L_{3BC} := 2 \quad e_{3BC} := 0.4$$

$$L_{C31} := 3.5 \quad e_{C31} := 0.3$$

$$L_{1CB} := 1.5 \quad e_{1CB} := 0.3$$

$$L_{B12} := 2 \quad e_{B12} := 0.3$$

$$L_{1BA} := 2 \quad e_{1BA} := 0.3$$

$$L_{A12} := 2 \quad e_{A12} := 0.4$$

Áreas de las mallas

$$A_a := L_{2AB} \cdot L_{A12} \quad A_a = 6$$

$$A_b := L_{3BC} \cdot L_{C31} \quad A_b = 7$$

$$A := A_a + A_b \quad A = 13$$

El análisis se sustenta en la determinación de la función de Prandtl para cada una de las circulaciones que se efectuará en cada una de las celdas identificadas.

$$\chi_i := \frac{\psi_i}{G \cdot 2 \cdot A_i} \int \frac{1}{e_i} ds$$

Esta expresión introduce una variable adicional que es la curvatura de torsión y un momento torsor asociado a cada uno de los circuitos.

De la expresión de continuidad correspondiente a las ramas continuas, se deduce que cada una de las ramas tiene una incógnita ψ_i . Por lo tanto se tendrán tantas incógnitas como mallas.

De lo expuesto se obtienen las siguientes incógnitas

ψ_i : 2 incógnitas

χ : 1 incógnita

Se disponen de las siguientes ecuaciones:

$M_x = \sum M_i$ 1 ecuación (22)

χ_i 2 ecuaciones

$$M_x := \frac{M_x}{\text{KN} \cdot \text{m}}$$

$$M_x = 600$$

$$G := \frac{G}{\text{MPa}}$$

$$G = 1.25 \times 10^4$$

$$A_a = 6$$

$$A_b = 7$$

Guess values

$$\chi := 0.0005$$

$$\psi_a := 500$$

$$\psi_b := 150$$

Given

$$\psi_a \cdot (21.667) + (\psi_a - \psi_b) \cdot \frac{L_{B12}}{e_{B12}} = 2 \cdot G \cdot A_a \cdot \chi$$

$$M_x = 2 \cdot (\psi_a \cdot A_a + \psi_b \cdot A_b)$$

$$\psi_b \cdot \left(\frac{L_{B23}}{e_{B23}} + \frac{L_{3BC}}{e_{3BC}} + \frac{L_{C31}}{e_{C31}} + \frac{L_{1CB}}{e_{1CB}} \right) + (\psi_b - \psi_a) \cdot \frac{L_{B12}}{e_{B12}} = 2 \cdot G \cdot A_b \cdot \chi$$

$$\text{Find}(\psi_a, \psi_b, \chi) = \begin{pmatrix} 23.5 \\ 22.71 \\ 3.43 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\psi_a := 23.5 \quad \psi_b := 22.71$$

Las tensiones serán

$$\tau_{A12} := \frac{\psi_a}{e_{A12}} \quad \tau_{A12} = 58.75$$

$$\tau_{2AB} := \frac{\psi_a}{e_{2AB}} \quad \tau_{2AB} = 78.333$$

$$\tau_{B23} := \frac{\psi_b}{e_{B23}} \quad \tau_{B23} = 75.7$$

$$\tau_{3BC} := \frac{\psi_b}{e_{3BC}} \quad \tau_{3BC} = 56.775$$

$$\tau_{C31} := \frac{\psi_b}{e_{C31}} \quad \tau_{C31} = 75.7$$

$$\tau_{1CB} := \frac{\psi_b}{e_{1CB}} \quad \tau_{1CB} = 75.7$$

$$\tau_{B12} := \frac{(\psi_a - \psi_b)}{e_{B12}} \quad \tau_{B12} = 2.633$$

$$\tau_{1BA} := \frac{\psi_a}{e_{1BA}} \quad \tau_{1BA} = 78.333$$