

CAPÍTULO 1

SOLICITACIÓN POR TORSIÓN

1.1 Teoría de Coulomb: Torsión para Secciones Circulares y Anulares

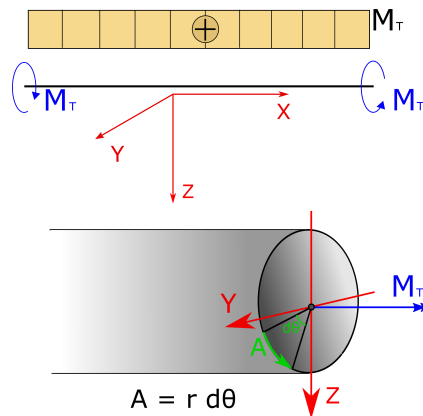


Fig. 1.1: Barra solicitada a torsión pura

La teoría de Coulomb describe el comportamiento de las secciones circulares solicitadas a torsión pura. Al someter una barra a torsión, la misma sufrirá un giro entorno a su eje, lo que significa distorsiones angulares. Asumiendo la ley de Hooke esto resulta en la aparición de tensiones tangenciales. Dada las condiciones particulares de este tipo de sección la dirección de estas tensiones siguen trayecto particular que analizaremos a continuación .

Como puede observarse en la Fig. 1.2, la existencia de tensiones no tangentes al contorno de la sección implica la existencia de una componente normal al mismo. A su vez, según el teorema de Cauchy, resultaría en tensiones tangenciales en la superficie externa de la barra. Como deben ser tangentes al contorno del mismo y ortogonales al radio.

Al solicitar una barra a un momento torsor (M_T), esta gira respecto a su eje describiendo un arco de circunferencia. Se asume que el giro es constante en la sección, es decir, tanto los puntos más cercanos al baricentro como los más lejanos giran el mismo ángulo. Si analizamos un diferencial de longitud de la barra, como muestra la Fig. 1.3, podemos

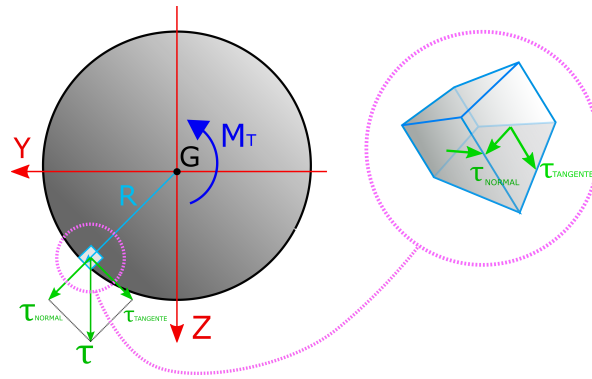


Fig. 1.2: Tensiones tangenciales en el perfil y en un cubo elemental

encontrar una relación entre el giro y la distorsión.

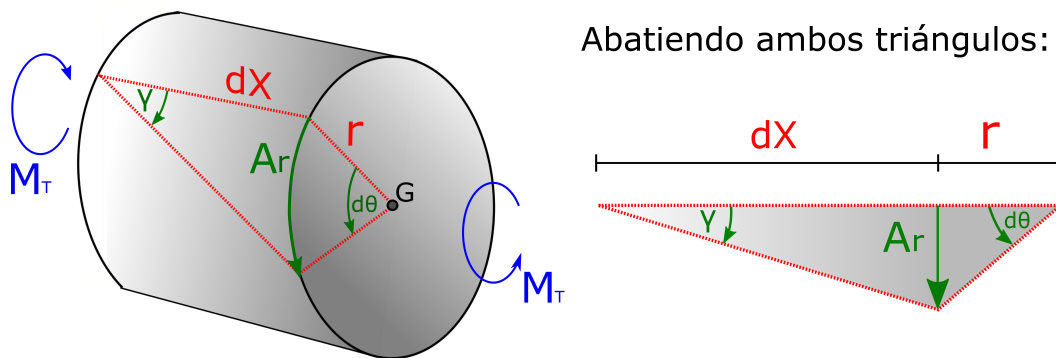


Fig. 1.3: Giro relativo entre secciones

Planteando semejanza de triángulos, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\gamma_r \cdot dx = d\theta_x \cdot r$$

$$\gamma_r = \frac{d\theta_x}{dx} \cdot r$$

Desarrollando la ecuación de equivalencia correspondiente al momento torsor:

$$M_t = \int_A \tau \cdot r \, dA = \int_A (G \cdot \gamma_r) \cdot r \, dA = G \int_A \gamma_r \cdot r \, dA = G \int_A \left(\frac{d\theta_r}{dx} \cdot r \right) \cdot r \, dA$$

Como el giro es constante en la sección se puede simplificar la integral:

$$M_t = G \cdot \frac{d\theta_r}{dx} \int_A r^2 \, dA = G \cdot \frac{d\theta_r}{dx} \cdot J_p$$

Siendo J_p el momento polar de la sección.

De la ecuación anterior podemos despejar la derivada del giro respecto a x. Este parámetro recibe el nombre de giro específico o curvatura, y describe el giro por unidad

de longitud. Usualmente se lo representa con la letra griega χ :

$$\chi = \frac{d\theta_r}{dx} = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$

Para hallar el giro θ de una sección, basta con integrar el giro específico a lo largo de la longitud de la barra:

$$\theta(x) = \int_l \chi \, dx = \int_l \frac{M_t}{G \cdot J_p} \, dx = \frac{1}{G \cdot J_p} \int_l M_T \, dx$$

Es importante notar que la función que describe al giro dependerá del diagrama característico de momento torsor. En el caso de tener un momento torsor constante a lo largo de la barra, resulta:

$$\theta(x) = \frac{M_t \cdot x}{G \cdot J_p}$$

Para hallar la expresión de las tensiones se utiliza la ley de Hooke:

$$\tau = G \cdot \gamma_r = G \cdot \left(\frac{d\theta_r}{dx} \cdot r \right) = G \cdot \chi \cdot r = G \cdot \left(\frac{M_t}{G \cdot J_p} \right) \cdot r = \frac{M_t}{G \cdot J_p} \cdot r$$

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot r$$

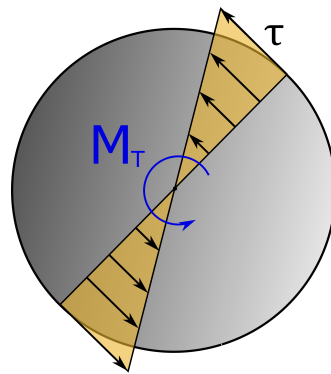


Fig. 1.4: Diagrama de tensiones tangenciales debido a M_t

Como puede observarse, la tensión varía linealmente con el radio. Esto significa que las tensiones serán mayores en los puntos más alejados al baricentro.

1.2 Teoría de Bredt: Torsión para secciones cerradas de pared delgada

Describe las tensiones y deformaciones de secciones tubulares de pared delgada sometidas a torsión. Se basa en la hipótesis fundamental que las tensiones son constantes en el espesor de la sección.

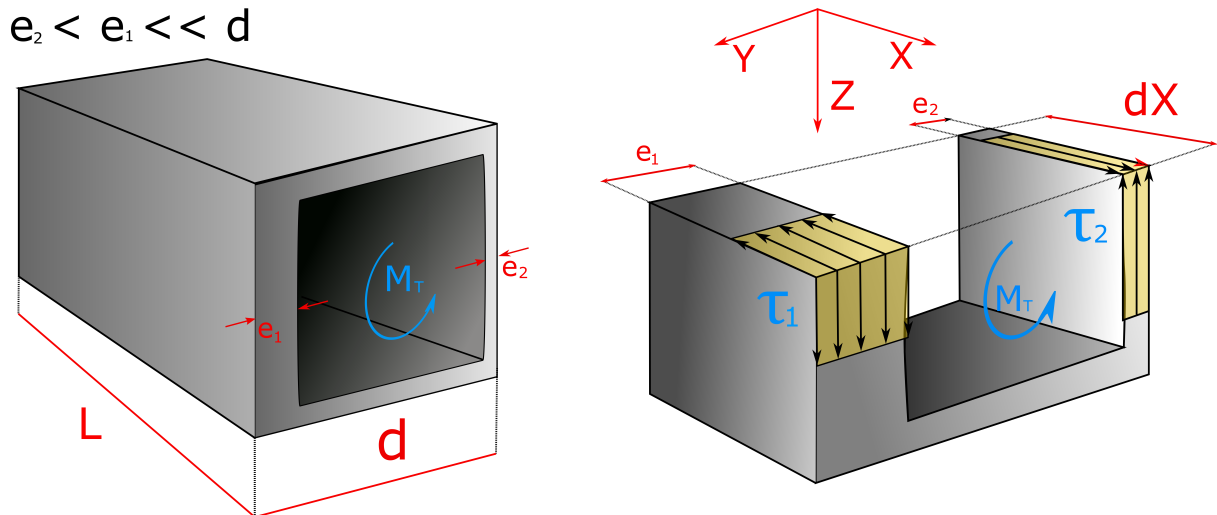


Fig. 1.5: Tubo de pared delgada solicitado a torsión y flujo de tensiones generado

Basándonos en dicha hipótesis, planteamos sobre el plano de la sección cierta distribución de tensiones. Luego, aislamos una parte de la sección del elemento de la barra de longitud dx , como se ve en la Fig. 1.5. Por Cauchy, si tenemos las tensiones τ_1 y τ_2 en el plano de la sección, entonces tendremos una distribución de tensiones como se muestra en la figura para el plano X-Y. Considerando que el elemento está en equilibrio, se plantea que la sumatoria de fuerzas en dirección X es igual a cero. La sumatoria de fuerzas en X se calcula haciendo el producto de las tensiones, que son constantes según la hipótesis mencionada, por la superficie donde actúan:

$$\sum F_x = 0 = -\tau_1 \cdot e_1 \cdot dx + \tau_2 \cdot e_2 \cdot dx$$

Por lo tanto, podemos establecer una relación entre las tensiones tangenciales de la sección según su ancho:

$$\tau_1 \cdot e_1 = \tau_2 \cdot e_2$$

Definiendo el producto de la tensión τ por el espesor e como el flujo de tensiones q , podemos notar que el flujo de tensiones es constante en la sección.

$$q_1 = q_2 \longrightarrow q = k$$

1.2.1 Tensiones según la teoría de Bredt

Para analizar la dependencia de las tensiones con el momento torsor plantearemos la ecuación de equivalencia correspondiente:

$$M_t = \int_A \tau \cdot r \, dA$$

Debemos recordar que en la ecuación anterior la distancia r se mide como la distancia hasta el baricentro, perpendicular a la dirección de τ . En este caso, como las tensiones son constantes en el espesor, la distancia r resultará igual a la distancia a la línea media, medida perpendicular a esta. Por la misma razón, el diferencial de área resulta del producto de la longitud por el espesor. Dicha integral se realiza a lo largo de cada tramo de la línea media:

$$M_t = \int_{LM} \tau \cdot r \cdot e \, dl$$

Como vimos anteriormente, el producto de las tensiones por el espesor es constante en la sección, y por lo tanto:

$$M_t = \tau \cdot e \int_{LM} r \, dl$$

Para analizar como realizar la integral de línea, asilamos un diferencial de longitud de la pared de la sección tubular, como se puede ver en la Fig. 1.6:

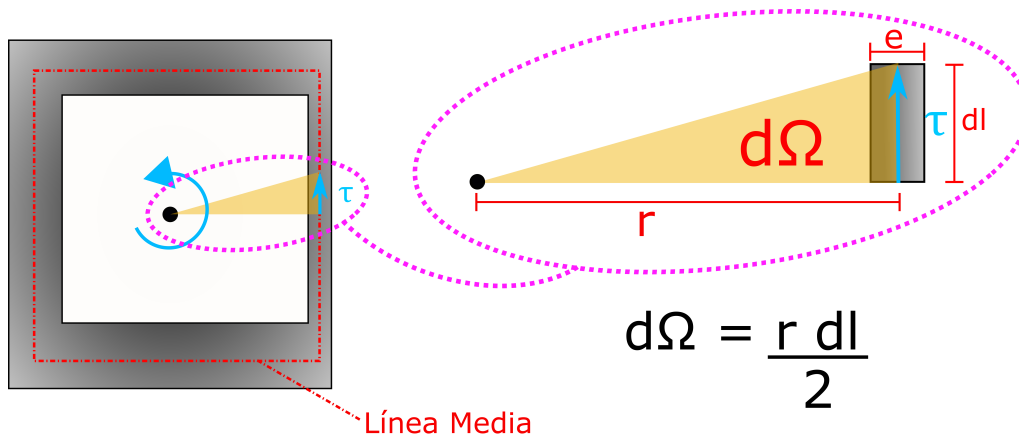


Fig. 1.6: Tensiones en un diferencial de longitud aislado

Considerando el área del triángulo marcada en la figura, podemos hacer el siguiente reemplazo:

$$r \, dl = 2 \, d\Omega$$

Entonces podemos desarrollar la integral de la siguiente forma:

$$M_t = \tau \cdot e \int_{LM} r \, dl = \tau \cdot e \int_{\Omega} 2 \, d\Omega = 2 \cdot \tau \cdot e \int_{\Omega} d\Omega$$

$$M_t = \tau \cdot 2 \cdot e \cdot \Omega$$

Entonces finalmente la expresión para el cálculo de las tensiones resulta:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot e \cdot \Omega}$$

Al barrer la línea media en la sección, Ω resulta ser el área encerrada por ella.

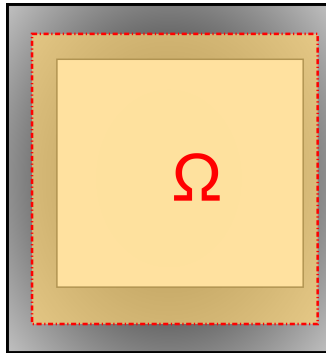


Fig. 1.7: Área Ω encerrada por la línea media

1.2.2 Giro y curvatura según la teoría de Bredt

El análisis de los desplazamientos asociados no derivan directamente de las tensiones sino que será necesario plantear el problema utilizando consideraciones energéticas.

La energía externa viene dada por el momento aplicado integrado en la curvatura y en la longitud. Por lo tanto:

$$U_e = \int_L \int_{\chi} M d\chi dL$$

Si consideramos cargas cuasiestáticas, entonces la curvatura es proporcional al momento:

$$\chi = k \cdot M_t \longrightarrow M_t = \frac{\chi}{k}$$

$$\longrightarrow U_e = \int_L \int_{\chi} \frac{\chi}{k} d\chi dL = \int_L \frac{1}{k} \int_{\chi} \chi d\chi dL = \int_L \frac{1}{k} \cdot \frac{\chi^2}{2} dL = \int_L \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \chi dL$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_L M_t \cdot \chi dL$$

Por otro lado, para la energía interna, definimos primero a la energía de deformación por unidad de volumen para el caso de tensiones tangenciales como

$$u_i = \int_{\gamma} \tau d\gamma$$

Por lo tanto, la energía interna total resulta

$$U_i = \int_V \int_{\gamma} \tau d\gamma dV$$

Aplicando la ley de Hooke:

$$U_i = \int_V \int_{\gamma} G \cdot \gamma \, d\gamma \, dV$$

$$U_i = \int_V \frac{1}{2} \cdot (G \cdot \gamma) \cdot \gamma \, dV = \int_V \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \, dV$$

Si lo reescribimos en función de las tensiones tangenciales

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V \tau \cdot \gamma \, dV = \frac{1}{2} \int_V \tau \cdot \frac{\tau}{G} \, dV = \frac{1}{2 \cdot G} \int_V \tau^2 \, dV$$

Una vez obtenida la expresión de la energía interna y externa, planteamos la igualdad entre ambas:

$$U_e = U_i$$

$$\int_L \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \chi \, dL = \frac{1}{2 \cdot G} \int_L \int_A \tau^2 \, dA \, dL$$

$$M_t \cdot \chi = \frac{1}{G} \int_A \tau^2 \, dA$$

Para desarrollar la expresión tomamos en cuenta que estamos analizando los giros específicos, por lo que consideramos una faja de longitud unitaria. Entonces:

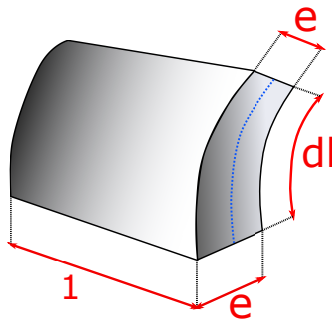


Fig. 1.8: Faja de longitud unitaria

$$dA = e \, dl$$

Además, recordemos que:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot e \cdot \Omega}$$

Utilizando estas relaciones, desarrollamos:

$$M_T \cdot \chi = \frac{1}{G} \int \left(\frac{M_t}{2 \cdot e \cdot \Omega} \right)^2 \cdot e \, dl = \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{M_t}{2 \cdot \Omega} \right)^2 \int \frac{e}{e^2} \, dl$$

$$\chi = \frac{M_t}{G \cdot 4 \cdot \Omega^2} \int \frac{1}{e} dl$$

Reescribimos la ecuación, de forma tal que la curvatura es función del momento, de un parámetro material y otro relacionado con la geometría de la sección:

$$\chi = \frac{M_t}{4 \cdot G \cdot \Omega^2} \int \frac{1}{e} dl$$

Definimos el módulo J_t tal que:

$$J_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\int \frac{1}{e} dl}$$

Entonces:

$$\chi = \frac{M_t}{G \cdot J_t}$$

Escrita de esta forma podemos observar que la expresión para la curvatura según la teoría de Bredt resulta similar a la expresión dada por Coulomb para secciones circulares

1.3 Teoría de Saint-Venant: Torsión en secciones abiertas

La teoría de Saint-Venant se utiliza para describir el comportamiento a torsión de barras prismáticas de cualquier sección. En este curso se utilizará para las secciones abiertas de perfiles normalizados.

Tomando como modelo de referencia una sección rectangular, mediante un razonamiento análogo al utilizado en la teoría de Coulomb se puede concluir que las tensiones han de ser tangentes al contorno de la sección. Como vimos, no puede haber tensiones con dirección hacia el borde de la sección, entonces las mismas irán disminuyendo a medida que nos acercamos a las esquinas, para hacerse completamente nulas en esos puntos.

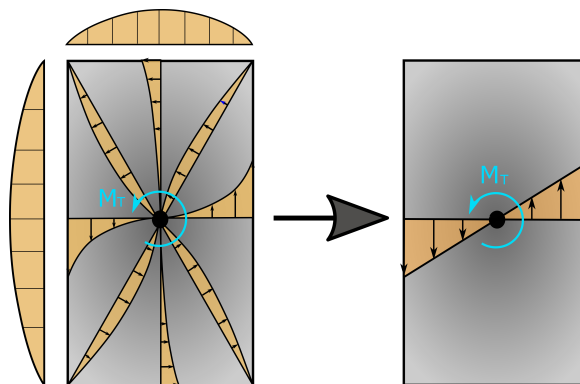


Fig. 1.9: Flujo de tensiones teórico vs. modelo simplificado

El desarrollo de la teoría de Saint Venant parte de la teoría matemática de la

elasticidad, para barras de sección uniforme o constante (prismáticas), sin impedimentos al alabeo, y sometidas a momento torsor constante. Haciendo una serie de hipótesis adicionales, en el caso de las secciones rectangulares, quedan definidas la tensión y la curvatura de forma tal que:

$$\tau_{max} = \frac{\alpha \cdot M_t}{a \cdot b^2}$$

$$\chi = \beta \cdot \frac{M_t}{G \cdot a \cdot b^3}$$

Si definimos un parámetro K como la razón entre los lados de la sección ($K = \frac{a}{b}$), entonces se puede construir el siguiente cuadro con ciertos valores de α y β en función de K :

K	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10,00	∞
α	4,80	4,33	4,19	4,07	3,88	3,74	3,55	3,35	3,26	3,19	3,00
β	7,11	5,10	5,10	4,68	4,02	3,80	3,55	3,35	3,26	3,19	3,00

Fig. 1.10: Tabla de valores de α y β

También es posible aproximar α y β con las siguientes fórmulas:

$$\alpha = 3 + \frac{1,8}{K}$$

$$\beta = \frac{3}{(1 - \frac{0,63}{K})}$$

Habitualmente se toma un modelo aproximado con una distribución lineal de tensiones en sentido de la dirección mayor, tal como muestra la Fig. 1.9. En este modelo simplificado, y asumiendo que la pieza es lo suficientemente angosta para que K tienda a infinito, la tensión máxima resulta:

$$\tau = 3 \cdot \frac{M_t}{a \cdot b^2} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} \cdot a \cdot b^3} \cdot b$$

Donde la dimensión b es el espesor de la sección, entonces lo podemos reescribir como:

$$\tau = \frac{M_t}{J} \cdot e \quad \text{con} \quad J_t = \frac{1}{3} \cdot a \cdot e^3$$

Similarmente, la curvatura queda definida como:

$$\chi = \frac{M_t}{G \cdot J_t}$$

Una vez más, esta expresión es similar a la dada por las teorías de Coulomb y de Bredt para el giro específico.

Estas formulas se puede utilizar para secciones abiertas curvas, e inclusive extrapolar para perfiles laminados, planteándolos como combinación de secciones rectangulares.

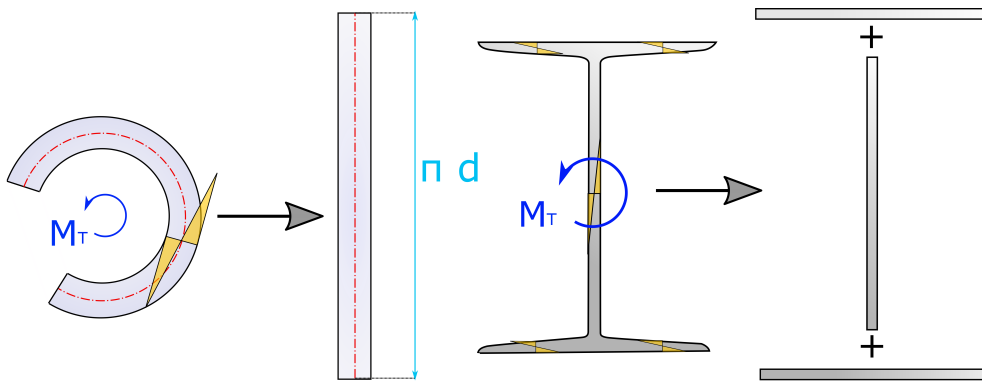


Fig. 1.11: Cálculo del J_t para sección abierta curva y perfil IPN

En el caso de las secciones curvas se tomará el J_t correspondiente al rectángulo resultante de la transformación.

$$J_t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot d \cdot e^3$$

En el caso de los perfiles laminados se tomará la suma de los J_t de cada rectángulo que, aproximadamente, componen a la sección original.

$$J_t = \sum_{n=1}^i J_{ti} = \sum_{n=1}^i \frac{1}{3} \cdot h_i \cdot t_i^3$$

Por ejemplo, en el caso del perfil IPN, esto resulta en:

$$J_t = \frac{2}{3} \cdot b_f \cdot t_f^3 + \frac{1}{3} \cdot h_w \cdot t_w^3$$

Como vimos, la tensión tangencial es directamente proporcional a e . Por lo tanto las tensiones máximas se hallarán en las regiones del perfil de mayor espesor.