

CAPÍTULO 1

SOLICITACIÓN AXIL

Por las ecuaciones de equivalencia sabemos que

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (1.1)$$

Si asumimos que las secciones planas y paralelas se mantienen planas y paralelas, entonces las deformaciones específicas (ϵ) son constantes en la sección. Luego, asumiendo la ley de Hooke, entonces las tensiones resultan constantes en la sección, y por lo tanto

$$N = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x \cdot A \quad (1.2)$$

$$\frac{N}{A} = \sigma_x \quad (1.3)$$

Entonces, si una pieza se encuentra solicitada unicamente por esfuerzo axil el volumen de tensiones resulta constante, y la fuerza resultante de estas tensiones que actúa sobre su baricentro es igual al esfuerzo axil

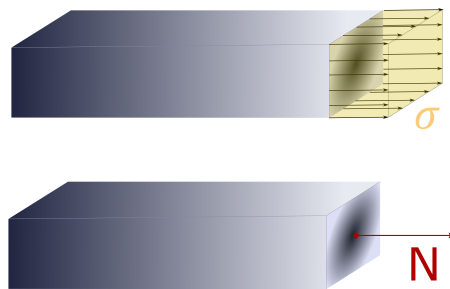


Fig. 1.1: Volumen de Tensiones generado por un esfuerzo axil

1.1 Deformación específica

Para las **deformaciones** específicas recurrimos a la ley de Hooke (1.4):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_X \quad (1.4)$$

$$\frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x \quad (1.5)$$

Reemplazando por la expresión hallada para la tensión (1.3):

$$\frac{N}{A \cdot E} = \varepsilon_x \quad (1.6)$$

Como puede observarse en la ecuación (??), la deformación específica es constante. Esto implica que la sección se traslada y su posición final es paralela a la inicial.

1.2 Desplazamiento longitudinal

Anteriormente definimos la deformación específica como la deformación sufrida por un diferencial. Por lo tanto, si sumamos la deformación longitudinal sufrida por cada diferencial de longitud obtendremos la deformación total de la barra:

$$\Delta L = \int_L \varepsilon_x dL \quad (1.7)$$

Utilizando la (1.6), resulta:

$$\Delta L_\sigma = \int_L \frac{N}{E \cdot A} dL \quad (1.8)$$

Si el esfuerzo axil, el módulo de elasticidad y el área son constantes a lo largo de la misma, entonces:

$$\Delta L_\sigma = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \quad (1.9)$$

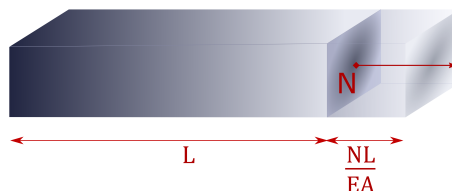


Fig. 1.2: Deformaciones (ΔL) generada por un esfuerzo axil

1.3 Causa: variación de temperatura

Sin embargo la longitud de una barra puede modificarse por otros factores tales como la temperatura. Ciertos materiales se dilatan con el calor y se contraen al enfriarse. Definimos el coeficiente de dilatación de un material (α) como la razón entre la deformación específica sufrida por un cambio de temperatura, y el cambio de temperatura que la provoca:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_T}{\Delta T} \quad (1.10)$$

Por lo tanto, si queremos calcular la deformación que sufre la barra:

$$\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T \quad (1.11)$$

$$\Delta L_T = \int_L \alpha \cdot \Delta T \, dL = \alpha \cdot \Delta T \int_L dL = \alpha \cdot \Delta T \cdot L \quad (1.12)$$

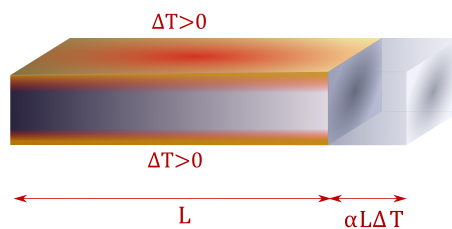


Fig. 1.3: Deformaciones (ΔL) generada por un cambio de temperatura

La forma general de la deformación específica (1.13) resulta de la suma de las deformaciones generadas por las tensiones y la temperatura:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_\sigma + \varepsilon_T \quad (1.13)$$

$$\varepsilon_x = \frac{N}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T \quad (1.14)$$

1.4 Resolución de hiperestáticos - Inspección

Al dejar de considerar las barras como indeformables y empezar a tener en cuenta sus deformaciones se incorpora otra variable a la resolución de estructuras, puesto que a las ecuaciones de equilibrio se añaden las de compatibilidad de deformación. La incorporación de las nuevas ecuaciones son necesarias para resolver sistemas hiperestáticos, pues estos ya no comprenden sistemas de ecuaciones indeterminados.

1.4.1 Ejemplo

La estructura de la figura consiste en una barra doblemente empotrada con una fuerza N aplicada a una distancia L_A del empotramiento izquierdo. Al tener vinculada de ambos extremos, se trata de una estructura hiperestática.

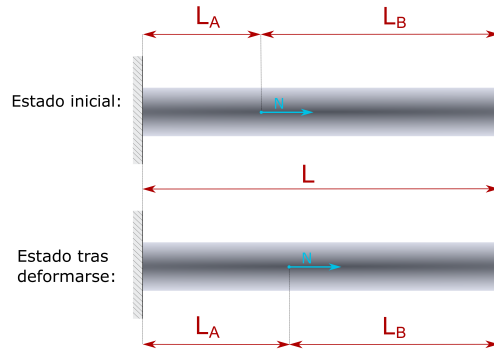


Fig. 1.4: Barra biempotrada

Esta estructura es imposible de resolver mediante las ecuaciones de la estática, pues hay una infinita combinación de posibles reacciones de los empotramientos tales que la barra está en equilibrio. Sin embargo, si agregamos una ecuación de compatibilidad el sistema pasará a ser determinado. Debido a que los extremos A y B están empotrados, sabemos que la longitud L debe permanecer constante. Por extensión, sabemos que lo que se alarga el tramo L_A es igual a lo que se acorta el tramo L_B :

$$\Delta L_A = -\Delta L_B \quad (1.15)$$

Sean N_{LA} y N_{LB} las normales en los tramos A y B respectivamente, y asumiendo módulo de elasticidad y área constantes en toda la barra, entonces:

$$\frac{N_{LA} \cdot L_A}{E \cdot A} = -\frac{N_{LB} \cdot L_B}{E \cdot A} \quad (1.16)$$

$$N_{LA} \cdot L_A = -N_{LB} \cdot L_B \quad (1.17)$$

$$N_{LA} = -N_{LB} \cdot \frac{L_B}{L_A} \quad (1.18)$$

Si trazamos un diagrama de normales genérico, como se puede ver en la Fig. 1.5, aún sin conocer los valores y signos de las normales resulta que en el punto donde está aplicado N hay un salto:

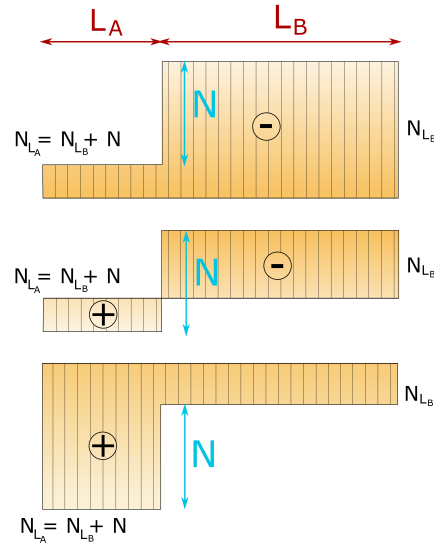


Fig. 1.5: Diagramas posibles de esfuerzo axial

Entonces podemos plantear nuestra ecuación de equilibrio:

$$N_{L_A} = N_{L_B} + N \quad (1.19)$$

Reemplazando (1.18) en (1.19):

$$-N_{L_B} \cdot \frac{L_B}{L_A} = N_{L_B} + N \quad (1.20)$$

$$0 = N_{L_B} \cdot \left(1 + \frac{L_B}{L_A}\right) + N = N_{L_B} \cdot \left(1 + \frac{L - L_A}{L_A}\right) + N \quad (1.21)$$

$$0 = N_{L_B} \cdot \frac{L}{L_A} + N \quad (1.22)$$

$$\therefore N_{L_B} = -N \cdot \frac{L_A}{L} \quad (1.23)$$

Reemplazando (1.18) en (1.23)

$$N_{L_A} = -\left(-N \cdot \frac{L_A}{L}\right) \cdot \frac{L_B}{L_A} \longrightarrow N_{L_A} = N \cdot \frac{L_B}{L} \quad (1.24)$$

Si, por ejemplo, L_A y L_B fueran respectivamente un tercio y dos tercios de la longitud total, entonces:

$$\bullet N_{L_A} = N \cdot \frac{2}{3} \quad \bullet N_{L_B} = -N \cdot \frac{1}{3}$$

La resolución puede variar según su estado de carga y sus vínculos externos, así

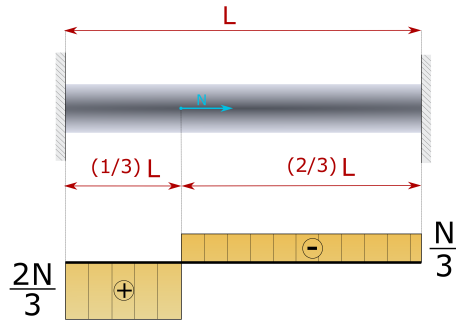


Fig. 1.6: Diagrama de esfuerzo axial

como también difiere si el área o el módulo de elasticidad no fueran constantes a lo largo de la barra. Sin embargo el procedimiento de resolución es similar, esto es, partimos de las restricciones de deformación impuestas por los vínculos externos y despejamos los esfuerzos normales.

1.5 Método de las incógnitas estáticas

Este método consiste en llevar una estructura hiperestática a una suma de estructuras isostáticas poniendo en evidencia a sus reacciones de vínculo, es decir, reemplazando a cada condición de vínculo por sus magnitudes estáticas.

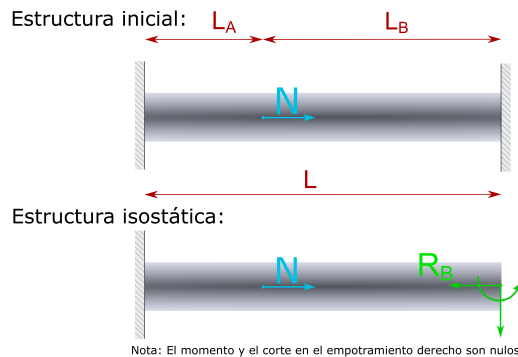


Fig. 1.7: MIE: Se reemplaza un vínculo por la reacción

A continuación separamos las cargas originales y estas nuevas magnitudes estáticas en estructuras separadas utilizando el principio de superposición de efectos. Colocamos las fuerzas o momentos actuantes en estructuras separadas, de modo que al superponerlas obtengamos la configuración original. El equilibrio lo calcularemos a partir de cada estructura isostática, y luego el equilibrio de la estructura original será la suma de estos.

En cuanto a la ecuación de compatibilidad, sabemos que como el empotramiento restringe los desplazamientos del punto, el desplazamiento del extremo derecho de la estructura original es nulo. Nuevamente, por superposición de efectos, la suma del desplazamiento de la estructura de la izquierda, debido a P , y el del desplazamiento de la



Fig. 1.8: MIE: Separamos las cargas de la incógnita

estructura derecha, debido a R_B , debe ser nulo:

$$\delta_B^H = \delta_{B,P} + \delta_{B,R_B} \quad (1.25)$$

$$0 = \delta_{B,P} + \delta_{B,R_B} \quad (1.26)$$

Para poder resolver el sistema, sólo resta determinar dichos desplazamientos.

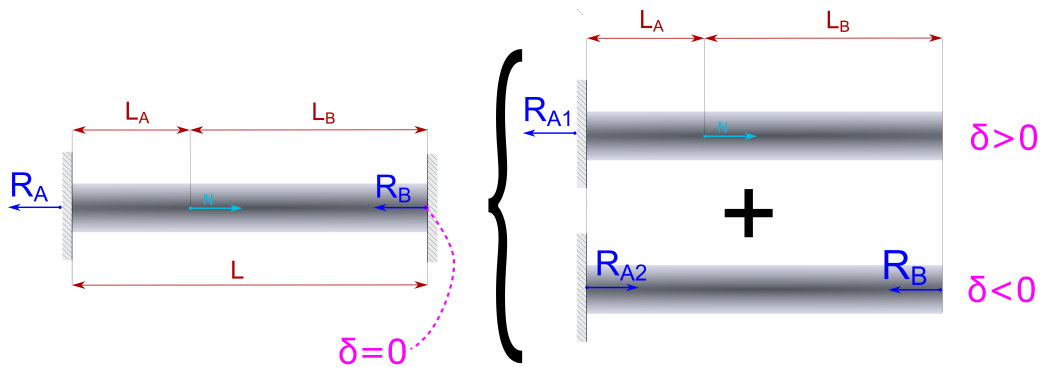


Fig. 1.9: MIE: Ecuación de compatibilidad

En la estructura propuesta el desplazamiento en el extremo derecho resulta igual a la variación de longitud de la barra, luego:

$$\delta_{B,P} = \frac{N \cdot L_A}{E \cdot A} \quad \text{y} \quad \delta_{B,R_B} = -\frac{-R_B \cdot L}{E \cdot A} \quad (1.27)$$

Entonces:

$$\frac{N \cdot L_A}{E \cdot A} = \frac{-R_B \cdot L}{E \cdot A} \quad (1.28)$$

$$N \cdot L_A = R_B \cdot L \quad (1.29)$$

$$R_B = N \cdot \frac{L_A}{L} \quad (1.30)$$

1.6 Cálculo de desplazamientos mediante el Teorema de los Trabajos Virtuales (TTV)

En ciertas estructuras el cálculo de los desplazamientos no resulta simple o inmediato, por lo que para este fin suele aplicarse el teorema de los trabajos virtuales. Para enunciar el teorema primero definimos a un Sistema Equilibrado (SE) como cualquier sistema que cumpla las relaciones de equilibrio, y una Deformación Virtual (DV) a cualquier sistema que cumpla con las compatibilidades de deformaciones. El teorema entonces establece que el trabajo externo de las fuerzas del SE actuando sobre los desplazamientos del DV, es igual trabajo interno entre las tensiones del SE y las deformaciones del DV.

$$W_e = W_i \quad (1.31)$$

Siendo W_e y W_i el trabajo externo e interno, respectivamente.

El trabajo se define como la integral de la fuerza en un campo de desplazamientos:

$$W = \int_r F dr = F \cdot r \cdot \cos(\alpha) \quad (1.32)$$

Como se dijo previamente el TTV es muy útil para calcular desplazamientos. La forma de utilizarlo es que la estructura cargada, a la cual le calcular un desplazamiento, será nuestro DV. Como sistema equilibrado crearemos uno que nos sea conveniente, y este es uno que tenga una carga P_{SE} en el punto y dirección en la que queremos calcular el desplazamiento. Entonces el trabajo externo resulta siendo la carga que creamos en el SE multiplicado por el desplazamiento real del punto donde actúa:

$$W_e = P_{SE} \cdot \delta_D V \quad (1.33)$$

El trabajo interno es la suma del trabajo ejercido punto a punto por las tensiones derivadas del SE, actuando sobre la deformación de cada uno de estos puntos. El trabajo total es la integral en el volumen de la barra, que en el caso de esfuerzo axil resulta:

$$W_i = \int_V \sigma_{SE} \cdot \varepsilon_{DV} dV \quad (1.34)$$

Los diagramas pueden cambiar en distintos tramos de la estructura, que puede contar con múltiples barras, módulos de elasticidad y secciones, pero en todo punto será directamente proporcional a P_{SE} . Las deformaciones del DV son por definición las deformaciones específicas sufridas por la estructura por el sistema de cargas reales:

$$\varepsilon_{DV} = \frac{N_{DV}}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T_{SE} \quad (1.35)$$

El trabajo interno entonces resulta

$$W_i = \sum \int_L N_S E (P_{SE}) \cdot \left(\frac{N_{DV}}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T_S E \right) dL \quad (1.36)$$

Igualando trabajo externo e interno:

$$P_{SE} \cdot \delta_D V = \sum \int_L N_S E (P_{SE}) \cdot \left(\frac{N_{DV}}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T_S E \right) dL \quad (1.37)$$

Como la fuerza P_{SE} queda a ambos lados de la igualdad, en todos los casos el sistema es independiente del valor que tiene, y por esto que se suele utilizar una fuerza unitaria (+1) a fin de simplificar los cálculos. Entonces

$$\delta_P = \sum \int_{L_i} N_{SE} \cdot \left(\frac{N_{DV}}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T \right) dL \quad (1.38)$$

Este método es de especial utilidad en las estructuras donde el desplazamiento de un punto no resulte tan inmediato como en la anteriormente resuelta.

1.6.1 Ejemplo

Analicemos la siguiente estructura:

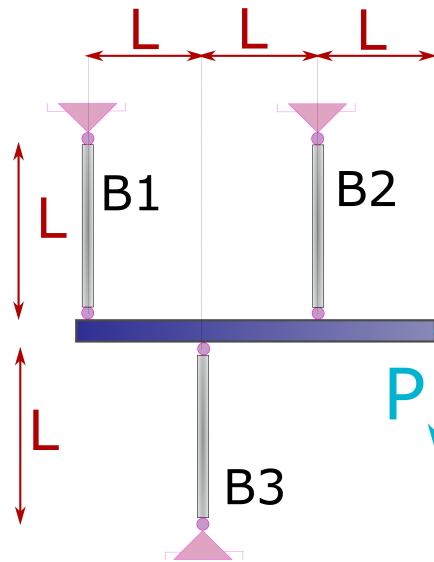


Fig. 1.10: Estructura Hiperestática de grado 1

La viga horizontal es infinitamente rígida, por lo tanto los únicos desplazamientos verticales posibles son aquellos correspondientes a alargamientos y acortamientos de las barras verticales.

Para resolver la estructura, aplicamos el Método de Incógnitas Estáticas, reemplazando un vínculo externo por su reacción, y planteando un isostático con las cargas, y otro con una reacción del vínculo eliminado.

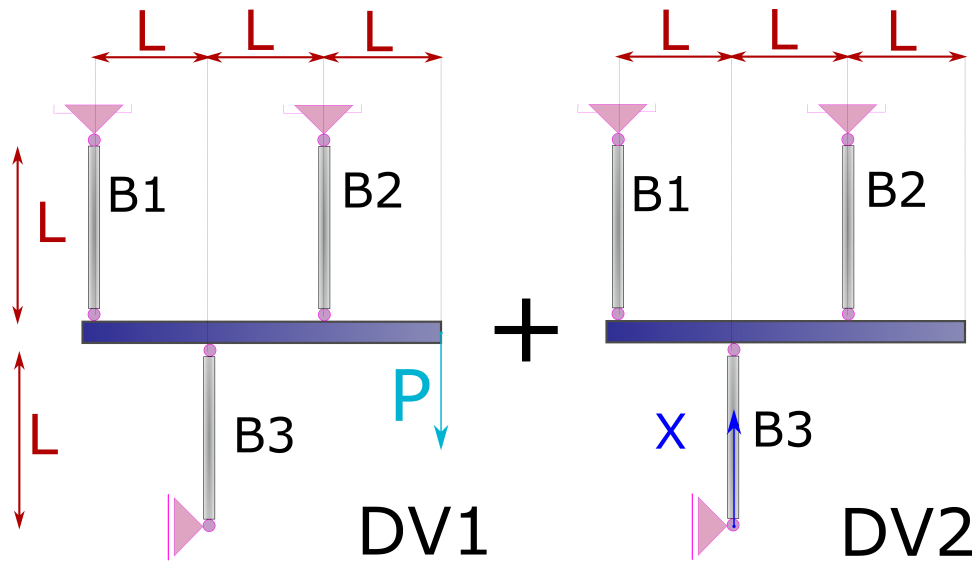


Fig. 1.11: MIE: Separamos cargas de incógnita

Calculamos los esfuerzos internos de ambos sistemas

$$\begin{aligned}
 \bullet N_{1_{DV1}} &= -\frac{P}{2} & \bullet N_{1_{DV2}} &= -\frac{X}{2} \\
 \bullet N_{2_{DV1}} &= \frac{3}{2} \cdot P & \bullet N_{2_{DV2}} &= -\frac{X}{2} \\
 \bullet N_{3_{DV1}} &= 0 & \bullet N_{3_{DV2}} &= -X
 \end{aligned}$$

Debido a que originalmente había un vínculo de segunda especie en el punto inferior de la barra B3 sabemos que su corrimiento total deberá ser nulo:

$$\delta_T = \delta_{DV1} + \delta_{DV2} = 0 \quad (1.39)$$

Calcularemos el desplazamiento debido al sistema DV1 y DV2 aplicando TTV, y plantearemos

$$0 = \sum_i N_{i_{SE}} \cdot \frac{N_{i_{DV1}} \cdot L_i}{E \cdot A} + \sum_i N_{i_{SE}} \cdot \frac{N_{i_{DV2}} \cdot L_i}{E \cdot A} \quad (1.40)$$

Para generar el SE, aplicamos una fuerza unitaria en el punto cuyo corrimiento queremos calcular, y con el sentido de dicho corrimiento.

A continuación calculamos los esfuerzos axiales de todas las barras:

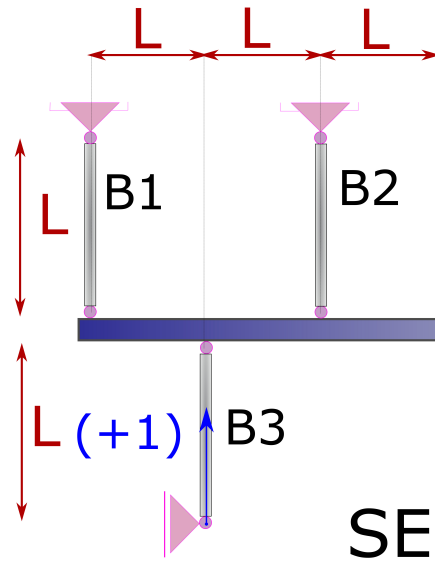


Fig. 1.12: Sistema equilibrado

$$\bullet N_{1SE} = -\frac{1}{2} \qquad \bullet N_{2SE} = -\frac{1}{2} \qquad \bullet N_{3SE} = -1$$

Procedemos entonces a desarrollar el desplazamiento del punto cuyo vínculo externo fue removido:

$$\delta_{DV1} = \frac{\left(-\frac{1}{2} \cdot P\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot L}{E \cdot A} + \frac{\left(\frac{3}{2} \cdot P\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot L}{E \cdot A} = -\frac{P \cdot L}{2 \cdot EA} \quad (1.41)$$

$$\delta_{DV2} = \frac{\left(-\frac{X}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot L}{E \cdot A} + \frac{\left(-\frac{X}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot L}{E \cdot A} + \frac{(-X) \cdot (-1) \cdot L}{E \cdot A} = \frac{3 \cdot X \cdot L}{2 \cdot EA} \quad (1.42)$$

El corrimiento total es nulo, entonces:

$$\delta_{DV1} + \delta_{DV2} = 0 \quad (1.43)$$

$$\delta_{DV1} = -\delta_{DV2} \quad (1.44)$$

$$-\frac{P \cdot L}{2 \cdot EA} = \frac{3 \cdot X \cdot L}{2 \cdot EA} \quad (1.45)$$

$$X = \frac{P}{3} \quad (1.46)$$

Habiendo hallado X reemplazamos su valor en el sistema DV2 y lo sumamos con el

sistema DV1 para obtener el sistema final:

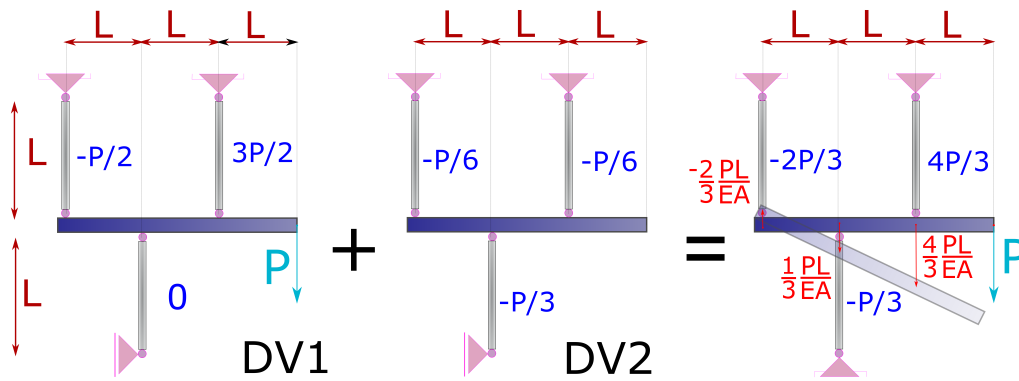


Fig. 1.13: DV1 + DV2

Observar que en el sistema final se observa la compatibilidad de deformaciones de la estructura: al ser la barra horizontal infinitamente rígida, los corrimientos de los tres puntos donde apoyan las barras describen una recta. Con este conocimiento se pudo haber establecida una relación entre los desplazamientos para resolver el hiperestático por inspección.