Tema 1

$\sigma_{adm} := 16 \frac{kN}{cm^2}$ $\quad E_1 := 20000 \frac{kN}{cm^2} = 200\ GPa$ $\quad A_1 := 30\ cm^2$ $\quad L_1 := 800\ cm$

$E_2 := 15000 \frac{kN}{cm^2}$ $\quad A_2 := 10\ cm^2$ $\quad L_2 := 100\ cm$

$E_3 := \frac{E_2}{2} = 7500 \frac{kN}{cm^2}$ $\quad A_3 := \frac{A_2}{2} = 5\ cm^2$ $\quad \lambda_1 := 1.5 \cdot 10^{-5}$

Ecuaciones de equilibrio

$N_1 = N_2 + N_3$ $\quad N_{tramo.2} = N_2 + N_3$ Esfuerzo normal en el tramo de longitud L2

Ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos

Para tramo de longitud L2 $\quad \Delta L_{2.N} = \Delta L_{3.N}$

$$\frac{N_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_3 \cdot L_2}{E_3 \cdot A_3}$$

$$N_2 = \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3} \cdot N_3$$

$N_1 = N_2 + N_3$ Se reescribe como $N_1 = \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3} \cdot N_3 + N_3$ Entonces $N_1 = N_3 \cdot \left(1 + \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right)$

Para toda la estructura

$\Delta L_{Total} = \Delta L_{1.\Delta T} + \Delta L_{1.N} + \Delta L_{3.N}$ donde $\Delta L_{Total} = 0\ cm$

$\Delta L_{1.\Delta T} = \lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1$ Contracción

$\Delta L_{1.N} = \frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}$ Dilatación

$\Delta L_{3.N} = \frac{N_3 \cdot L_2}{E_3 \cdot A_3}$ Dilatación

$$-\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 + \frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_3 \cdot L_2}{E_3 \cdot A_3} = 0\ cm$$

Reemplazando N1

$$-\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 + \frac{N_3 \cdot \left(1 + \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_3 \cdot L_2}{E_3 \cdot A_3} = 0\ cm$$

Se obtiene N3 en función de Δ T

$$N_3 = \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1 + \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right)}$$

σ 3 debe ser menor a σ admisible

$$\sigma_3 = \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot A_3} \quad \text{y} \quad \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot A_3} \le \sigma_{adm}$$

Reemplazando

$$\Delta T \le \sigma_{adm} \cdot \frac{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot A_3}{\lambda_1 \cdot L_1}$$

$$\Delta T := \sigma_{adm} \cdot \frac{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot A_3}{\lambda_1 \cdot L_1} = 62.2222$$

$$N_3 := \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right)} = 80 \text{ kN} \qquad \sigma_3 := \frac{N_3}{A_3} = 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$N_1 := N_3 \cdot \left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) = 400 \text{ kN} \qquad \sigma_1 := \frac{N_1}{A_1} = 13.3333 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$N_2 := N_1 - N_3 = 320 \text{ kN} \qquad \sigma_2 := \frac{N_2}{A_2} = 32 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

σ 2 es mayor a σ adm (es 2 veces σ adm). Entonces, el Δ T máximo (en módulo) será la mitad del valor hayado

$$\Delta T := \frac{\Delta T}{2} = 31.1111$$

$$N_3 := \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right)} = 40 \text{ kN} \qquad \sigma_3 := \frac{N_3}{A_3} = 8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \qquad \varepsilon_3 := \frac{\sigma_3}{E_3} = 0.0011$$

$$N_1 := N_3 \cdot \left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) = 200 \text{ kN} \qquad \sigma_1 := \frac{N_1}{A_1} = 6.6667 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \varepsilon_1 := \frac{\sigma_1}{E_1} - \lambda_1 \cdot \Delta T = -0.0001$$

$$N_2 := N_1 - N_3 = 160 \text{ kN} \qquad \sigma_2 := \frac{N_2}{A_2} = 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \qquad \varepsilon_2 := \frac{\sigma_2}{E_2} = 0.0011$$

$$\delta_{máx} := \varepsilon_1 \cdot L_1 = -0.1067 \text{ cm} \qquad \delta_{máx} := \varepsilon_2 \cdot L_2 = 0.1067 \text{ cm}$$

(contracción de la barra 1) (dilatación de la barra 2 / barra 3)

Tema 2

$\sigma_{adm} := 15 \frac{kN}{cm^2}$

$E_1 := 20000 \frac{kN}{cm^2} = 200\ GPa$ $\quad A_1 := 40\ cm^2$ $\quad L_1 := 1000\ cm$

$E_2 := 16000 \frac{kN}{cm^2}$ $\quad A_2 := 16\ cm^2$ $\quad L_2 := 200\ cm$

$E_3 := \frac{E_2}{2} = 8000 \frac{kN}{cm^2}$ $\quad A_3 := \frac{A_2}{2} = 8\ cm^2$ $\quad \lambda_1 := 1.5 \cdot 10^{-5}$

Ecuaciones de equilibrio

$N_1 = N_2 + N_3$ $\qquad N_{tramo.2} = N_2 + N_3$ Esfuerzo normal en el tramo de longitud L2

Ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos

Para tramo de longitud L2 $\quad \Delta L_{2.N} = \Delta L_{3.N}$

$$\frac{N_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_3 \cdot L_2}{E_3 \cdot A_3}$$

$$N_2 = \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3} \cdot N_3$$

$N_1 = N_2 + N_3$ Se reescribe como $N_1 = \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3} \cdot N_3 + N_3$ Entonces $N_1 = N_3 \cdot \left(1 + \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right)$

Para toda la estructura

$\Delta L_{Total} = \Delta L_{1.\Delta T} + \Delta L_{1.N} + \Delta L_{3.N}$ donde $\Delta L_{Total} = 0\ cm$

$\Delta L_{1.\Delta T} = \lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1$ Contracción

$\Delta L_{1.N} = \frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}$ Dilatación

$\Delta L_{3.N} = \frac{N_3 \cdot L_2}{E_3 \cdot A_3}$ Dilatación

$$-\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 + \frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_3 \cdot L_2}{E_3 \cdot A_3} = 0\ cm$$

Reemplazando N1

$$-\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 + \frac{N_3 \cdot \left(1 + \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_3 \cdot L_2}{E_3 \cdot A_3} = 0\ cm$$

Se obtiene N3 en función de Δ T

$$N_3 = \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1 + \frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right)}$$

σ 3 debe ser menor a σ admisible

$$\sigma_3 = \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot A_3} \quad \text{y} \quad \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot A_3} \le \sigma_{adm}$$

Reemplazando

$$\Delta T \le \sigma_{adm} \cdot \frac{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot A_3}{\lambda_1 \cdot L_1}$$

$$\Delta T := \sigma_{adm} \cdot \frac{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot A_3}{\lambda_1 \cdot L_1} = 75$$

$$N_3 := \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right)} = 120\ \text{kN} \qquad \sigma_3 := \frac{N_3}{A_3} = 15\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$N_1 := N_3 \cdot \left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) = 600\ \text{kN} \qquad \sigma_1 := \frac{N_1}{A_1} = 15\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$N_2 := N_1 - N_3 = 480\ \text{kN} \qquad \sigma_2 := \frac{N_2}{A_2} = 30\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

σ 2 es mayor a σ adm (es 2 veces σ adm). Entonces, el ΔT máximo (en módulo) será la mitad del valor hayado

$$\Delta T := \frac{\Delta T}{2} = 37.5$$

$$N_3 := \frac{\lambda_1 \cdot \Delta T \cdot L_1}{\left(\frac{\left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_3 \cdot A_3}\right)} = 60\ \text{kN} \qquad \sigma_3 := \frac{N_3}{A_3} = 7.5\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \qquad \varepsilon_3 := \frac{\sigma_3}{E_3} = 0.0009$$

$$N_1 := N_3 \cdot \left(1+\frac{E_2 \cdot A_2}{E_3 \cdot A_3}\right) = 300\ \text{kN} \qquad \sigma_1 := \frac{N_1}{A_1} = 7.5\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \qquad \varepsilon_1 := \frac{\sigma_1}{E_1} - \lambda_1 \cdot \Delta T = -0.0002$$

$$N_2 := N_1 - N_3 = 240\ \text{kN} \qquad \sigma_2 := \frac{N_2}{A_2} = 15\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \qquad \varepsilon_2 := \frac{\sigma_2}{E_2} = 0.0009$$

$$\delta_{máx} := \varepsilon_1 \cdot L_1 = -0.1875\ \text{cm} \qquad \delta_{máx} := \varepsilon_2 \cdot L_2 = 0.1875\ \text{cm}$$

(contracción de la barra 1) (dilatación de la barra 2 / barra 3)