Propagación de errores

Ejercicio 1

Calcular las siguientes expresiones, incluyendo sus cotas de error absoluto, donde:
x = 2,00, *y* = 3,00 y *z* = 4,00 (estos valores están correctamente redondeados)

a) 3x + y - z

Datos: $3x + y - z = w \qquad x = 2{,}00 \qquad y = 3{,}00 \qquad z = 4{,}00$

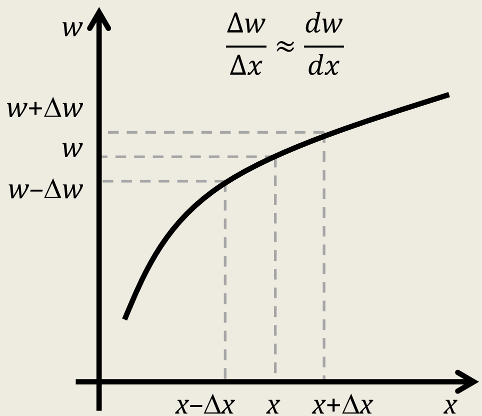
$$\Delta w = \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{dw}{dx_i}\right| \Delta x_i = \left|\frac{dw}{dx}\right| \Delta x + \left|\frac{dw}{dy}\right| \Delta y + \left|\frac{dw}{dz}\right| \Delta z$$

$$\Delta x_i = 0{,}5.10^{-t} \qquad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0{,}5.10^{-2} = 0{,}005$$

$$\Delta w = 3.0{,}005 + 0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}025 \cong 0{,}03$$

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \mathbf{3.2 + 3 - 4 = 5}$$

$$w = \hat{w} \pm \Delta w \qquad w = 5{,}00 \pm 0{,}03$$



c) x sen (y / 40)

Datos: $x.sin(y/40) = w$ $\quad x = 2{,}00$ $\quad y = 3{,}00$

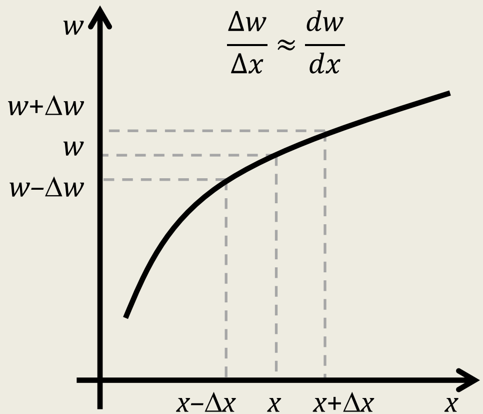
$$\Delta w = \left|\frac{dw}{dx}\right|\Delta x + \left|\frac{dw}{dy}\right|\Delta y$$

$$\Delta w = \left|sin\left(\frac{3{,}00}{40}\right)\right| 0{,}005 + \left|\frac{2{,}00}{40}cos\left(\frac{3{,}00}{40}\right)\right| 0{,}005$$

$$\Delta w = 0{,}000623 \cong 0{,}0007$$

$$\hat{w} = 2{,}00.sin\left(\frac{3{,}00}{40}\right) = 0{,}149859414$$

$$w = \hat{w} \pm \Delta w \qquad w = 0{,}150 \pm 0{,}0007$$



Ejercicio 2

Calcular la siguiente expresión, incluyendo su cota de error absoluto: w = x y² / z donde x = 2,0 ± 0,1, y = 3,0 ± 0,2 y z = 1,0 ± 0.1. Indicar qué variable tiene mayor incidencia en el error en w.

Datos: $w = \frac{xy^2}{z}$ $\quad x = 2{,}0 \pm 0{,}1 \quad y = 3{,}0 \pm 0{,}2 \quad z = 1{,}0 \pm 0{,}1$

$$\Delta w = \left|\frac{dw}{dx}\right| \Delta x + \left|\frac{dw}{dy}\right| \Delta y + \left|\frac{dw}{dz}\right| \Delta z$$

$$\Delta w = \left|\frac{y^2}{z}\right| \Delta x + 2\left|\frac{xy}{z}\right| \Delta y + \left|\frac{xy^2}{z^2}\right| \Delta z = \frac{3^2}{1}.0{,}1 + 2.\frac{2.3}{1}.0{,}2 + \frac{2.3^2}{1^2}.0{,}1 = 0{,}9 + 2{,}4 + 1{,}8 = 5{,}1 \cong 5$$

$$\hat{w} = \frac{2.3^2}{1} = 18$$

$$w = \hat{w} \pm \Delta w \qquad w = 20 \pm 5$$

$$\frac{\Delta w}{w} = \left|\frac{y^2}{z}\right| \frac{x}{w}\frac{\Delta x}{x} + 2\left|\frac{xy}{z}\right| \frac{y}{w}\frac{\Delta y}{y} + \left|\frac{xy^2}{z^2}\right| \frac{z}{w}\frac{\Delta z}{z} = \left|\frac{y^2}{z}\right| \frac{xz}{xy^2}\frac{\Delta x}{x} + 2\left|\frac{xy}{z}\right| \frac{yz}{xy^2}\frac{\Delta y}{y} + \left|\frac{xy^2}{z^2}\right| \frac{z^2}{xy^2}\frac{\Delta z}{z}$$

$$R_w = 1.R_x + 2.R_y + 1.R_z$$

La variable que tiene mayor incidencia en el error de w es y.

Cuando se efectúa un cálculo, hay una precisión necesaria y suficiente para alcanzar la tolerancia requerida en el resultado. Es decir, no hace falta conocer cada entrada con la máxima precisión. Para el ingeniero esto es vital, ya que hace a la "economía": no pedir mas de lo necesario.

Ejercicio 4:

Se tienen las siguientes expresiones algebraicamente equivalentes:

i) $f = (2^{1/2} - 1)^6$

ii) $f = 1/(2^{1/2} + 1)^6$

iii) $f = (3 - 2*2^{1/2})^3$

iv) $f = 1/(3 + 2*2^{1/2})^3$

v) $f = (99 - 70*2^{1/2})$

vi) $f = 1/(99 + 70*2^{1/2})$

a) Demostrar que, efectivamente, son algebraicamente equivalentes.

b) Utilizando el valor aproximado 1,4 para la raíz cuadrada de 2, indicar qué alternativa proporciona el mejor resultado.

Algoritmos algebraicamente equivalentes no son numéricamente equivalentes: propagan de forma distinta los errores.

Ejercicio 5

Se tiene la expresión y = ln [x - (x² - 1) ^ 0.5]. *a)* Calcular y para x = 30, incluyendo su error absoluto. Suponer que la raíz cuadrada se conoce con 6 decimales correctos y que el error en x es despreciable. *b)* Obtener una expresión matemáticamente equivalente a la anterior, pero mejor condicionada desde el punto de vista numérico, y recalcular el resultado con el nuevo error.

$$y = ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

→ x = 30 (se desprecia su error absoluto, $\Delta x=0$)

→ la raíz cuadrada se conoce solo con 6 decimales correctos

La raíz cuadrada introduce error, entonces

$r = \sqrt{x^2 - 1}$ → $r = \hat{r} \pm \Delta r$

Con seis decimales correctos

$$\Delta r = 0.0000005 = 0.5 \cdot 10^{-6}$$

$$y = ln(x - r)$$

$$\Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right| \Delta x + \left|\frac{dy}{dr}\right| \Delta r = 0 + \left|\frac{-1}{x - r}\right| \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} = \left|\frac{-1}{30 - 29.9833287}\right| \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}$$

$\Delta y = 0.000029992 \approx 0.00003 = 0.3 \cdot 10^{-4}$

Logramos 4 decimales significativos y uno medianamente significativo.

$\hat{y} = ln(\hat{x} - \hat{r}) = ln(30 - 29.9833287) = -4.09406667$ …

$y = -4.09407 \pm 0.00003$

La resta de magnitudes similares produjo un efecto de cancelación de términos. Esta resta se presenta dividiendo en el factor de amplificación del error. Al dividir por un número pequeño, el factor resulta crítico para la propagación de errores. Cada vez que se presenta un efecto de cancelación de términos se buscará:

- *Si es posible, eliminar dicha cancelación de términos*
- *Si no es posible, procurar que suceda lo antes posible en el algoritmo*

Expresión original:

$$y = ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$y = ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\,\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) = ln\left(\frac{x^2 + x\sqrt{x^2 - 1} - x\sqrt{x^2 - 1} - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) = ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

Aplicando la propiedad del logaritmo $ln(a/b) = ln(a) - ln(b)$:

$$y = ln(1) - ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\,ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Obtuve un **algoritmo alternativo** matemáticamente equivalente.

De nuevo llamando $r = \sqrt{x^2 - 1}$, la expresión queda:

$y = -\,ln(x + r)$

La cota del error de la raíz:

$\Delta r = 0.5 \cdot 10^{-6}$

Aplicando propagación de errores:

$$\Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right| \Delta x + \left|\frac{dy}{dr}\right| \Delta r = 0 + \left|\frac{1}{x + r}\right| \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \approx 0.1 \cdot 10^{-7}$$

La cota del error en el resultado dio mucho menor a la del algoritmo original (3 órdenes de magnitud más chica), pues no se produjo el fenómeno de cancelación de términos. El denominador en el factor de amplificación ya no es una resta de magnitudes similares.

El cálculo del valor medio debe dar lo mismo que en el algoritmo original:

$\hat{y} = -\,ln(\hat{x} + \hat{r}) = -\,ln(30 + 29.9833287) = -4.09406667$ ...

El valor del resultado correctamente expresado queda:

$y = -4.09406667 \pm 0.00000001$

Ejercicio 6:

Se realizan observaciones de un satélite para determinar su velocidad. En la primera observación la distancia al satélite es L = 30.000 ± 10 km. Luego de 5 segundos (medido con 4 dígitos de precisión) la distancia radial ha aumentado en ρ = 125 ± 0,5 km y el cambio en la orientación ha sido ϕ =0,00750 ± 0,00002 radianes. Calcular la velocidad del satélite, incluyendo su error, suponiendo que el mismo se mueve en línea recta y a velocidad constante durante ese intervalo de tiempo.

Es un problema simple de propagación de errores. Sólo que los errores de cálculo de ciertas cantidades son errores de entrada de otros cálculos.

Ejercicio 7:

En una computadora, una celda de memoria tiene 2 posiciones binarias para almacenar los signos de la mantisa y del exponente, 11 posiciones decimales para la mantisa y 3 posiciones decimales para el exponente. Por ejemplo, el número π se almacena de la siguiente forma: +31415926536+001. Indicar cómo se almacenan los números:

a) 2,7182818285 b) -1073741824 c) 0,577216 d) -123E-45

La máquina puede representar sólo una cantidad finita (aunque grande) de números reales.

Ejercicio adicional A1:

A.1) Se dispone de un algoritmo para computar la siguiente integral:

$$I(a,b) = \int_0^1 e^{\frac{-b.x}{(a+x^2)}}\,dx$$

Utilizando dicho algoritmo se obtuvo la siguiente tabla de resultados:

a	b	I
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
0,40	0,34	1,398464
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

Ahora bien, se midieron las cantidades físicas z e y, obteniéndose:

$z = 0{,}400 \pm 0{,}003$ $\qquad\qquad$ $y = 0{,}340 \pm 0{,}005$

Estimar el error en $I(z,y)$ y expresar el resultado final.

$I(a,b) = F(z,y)$

$$\Delta I = \left|\frac{\partial I}{\partial z}\right|_P \Delta z + \left|\frac{\partial I}{\partial y}\right|_P \Delta y = \left|\frac{\partial F(z,y)}{\partial z}\right|_P \Delta z + \left|\frac{\partial F(z,y)}{\partial y}\right|_P \Delta y$$

$$\frac{\partial F(z,y)}{\partial z} \approx \frac{\delta I}{\delta a} = \frac{1.372950 - 1.425032}{0.41 - 0.39} = -2.6041$$

$$\frac{\partial F(z,y)}{\partial y} \approx \frac{\delta I}{\delta b} = \frac{1.388198 - 1.408845}{0.36 - 0.32} = -0.516175$$

$$\Delta I = 2.6041 \,.\, 0.003 + 0.516175 \,.\, 0.005 = 0.01039$$

Adoptando un solo dígito para la cota, la misma nos queda $\Delta I = 0.01$

$\Delta I = 0.01 \quad \rightarrow \quad 0.5\ 10^{-t-1} < \Delta x < 0.5\ 10^{-t} \quad \rightarrow \quad 0.005 < \Delta x < 0.05 \quad \rightarrow \quad t = 1$ Por lo tanto, la forma correcta de expresar el resultado es $I = \bar{I} \pm \Delta I = 1.40 \pm 0.01$

Este tipo de evaluación del error, por “perturbaciones experimentales”, es común en la práctica ingenieril.

Gráfica de proceso

$$c = a < ob > b$$

$$\delta c = \frac{\partial c}{\partial a}\delta a + \frac{\partial c}{\partial b}\delta b$$

$$rc = \frac{\delta c}{c} = \frac{\partial c}{\partial a}\frac{a}{c}\frac{\delta a}{a} + \frac{\partial c}{\partial b}\frac{b}{c}\frac{\delta b}{b} = \frac{\partial c}{\partial a}\frac{a}{c}ra + \frac{\partial c}{\partial b}\frac{b}{c}rb = fa * ra + fb * rb(+\mu)$$

$$c =< ou > (a)$$

$$\delta c = \frac{\partial c}{\partial a}\delta a$$

$$rc = \frac{\partial c}{\partial a}\frac{a}{c}ra = fa * ra(+\mu)$$

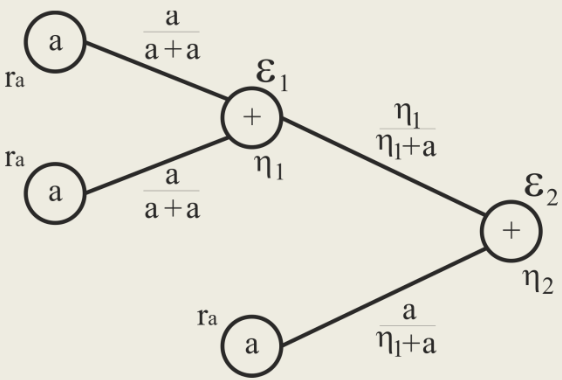
Ejercicio 8

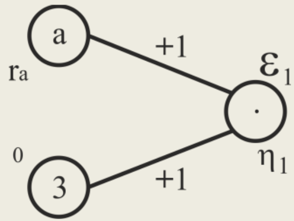
Determinar las cotas para los errores relativos de v y w (que son dos expresiones algebraicamente equivalentes) en los siguientes casos, utilizando la gráfica de proceso:

a) v = a+a , w = 2a b) v = a+a+a , w = 3a

Suponer que a es positivo y que los números 2 y 3 tienen una representación exacta en la computadora. Comparar los resultados de las dos expresiones y extraer conclusiones. Calcular dichos errores para a = 0,6992 (correctamente redondeado), redondeando a 4 dígitos luego de cada operación aritmética.

b) v = a + a + a, w = 3a





$$|r_{\eta 1}| = \left|r_a \tfrac{1}{2} + r_a \tfrac{1}{2} + \varepsilon_1\right| = |r_a + \varepsilon_1| \leq |r_a| + |\varepsilon_1|$$

$$|r_{\eta 2}| = \left| r_{\eta 1} \frac{\eta_1}{\eta_1 + a} + r_a \frac{a}{\eta_1 + a} + \varepsilon_2 \right| = \left| \frac{r_{\eta_1}\eta_1 + r_a a}{\eta_1 + a} + \varepsilon_2 \right| = \left| \frac{(r_a + \varepsilon_1)\eta_1 + r_a a}{\eta_1 + a} + \varepsilon_2 \right|$$

$$|r_{\eta 2}| = \left| \frac{r_a(\eta_1 + a) + \varepsilon_1 \eta_1}{\eta_1 + a} + \varepsilon_2 \right| = \left| r_a + \frac{\varepsilon_1 \eta_1}{\eta_1 + a} + \varepsilon_2 \right| = \left| r_a + \frac{2}{3}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right| \leq |r_a| + \left| \frac{2}{3}\varepsilon_1 \right| + |\varepsilon_2|$$

$$|r_w| = |r_a + \varepsilon_1| \leq |r_a| + |\varepsilon_1|$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \mu$ $\quad$ $|r_v| \leq 1.r_a + \frac{5}{3}.\mu$ $\quad$ $|r_w| \leq 1.r_a + 1.\mu$ $\quad$ $r_v \geq r_w$

$Ry \leq Cp.R + F_\mu.\mu$ $\quad$ $Ca = \frac{F_\mu}{Cp}$

Cp: Número de condición del problema (factor de amplificación de los errores relativos inherentes). No depende del algoritmo, depende del problema matemático.

Fu: Término de estabilidad (factor global de amplificación de errores de redondeo). Depende del algoritmo y del problema matemático.

Ca: Número de condición del algoritmo. Ca<=1 Estable, Ca>>1 Inestable (o mal condicionado)

Con a=0,6992 $\quad$ $\varepsilon_{1,2} = 0{,}5.10^{1-t} = 0{,}0005$

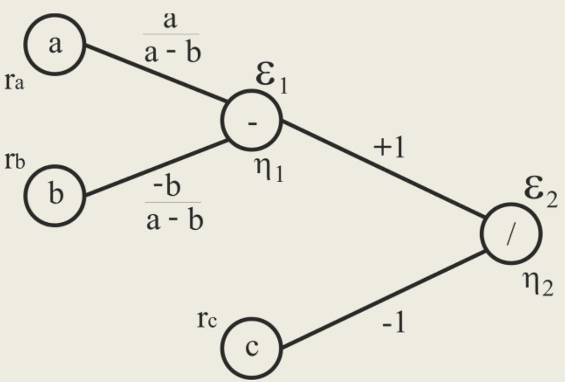
$|r_{\eta 2}| \leq \frac{5}{3} 0{,}0005 = 0{,}0008\hat{3}$ $\quad$ $v = 2{,}0976 \pm 0{,}0009 = 2{,}098 \pm 0{,}0009$

$|r_w| \leq 0{,}0005$ $\quad$ $w = 2{,}0976 \pm 0{,}0009 = 2{,}098 \pm 0{,}0005$

Ejercicio 9:

Considerar las expresiones v = (a-b) / c y w = (a/c) - (b/c). Suponer que a, b y c son positivos, sin errores de entrada y que a es aproximadamente igual a b.
a) Demostrar que el error relativo por redondeo en w puede ser mucho mayor que el mismo error en v.
b) Calcular dichos errores para a = 0,41, b = 0,36 y c = 0,70, utilizando aritmética de punto flotante con 2 dígitos de precisión.

a) $v = \frac{(a-b)}{c}$

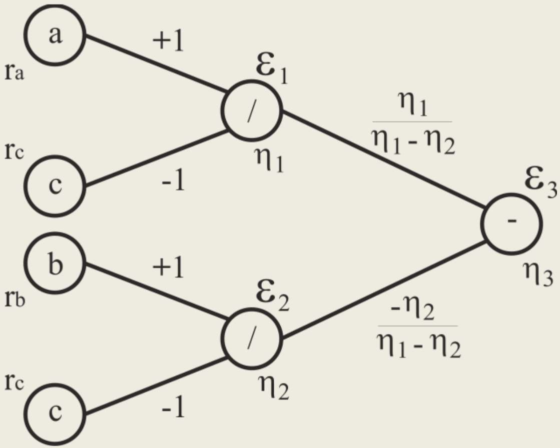


$|r_{\eta 1}| = \left| r_a \frac{a}{a-b} + r_b \frac{-b}{a-b} + \varepsilon_1 \right|$ $\qquad r_a = r_b = 0 \qquad$ $|r_{\eta 1}| = |\varepsilon_1|$

$$|r_{\eta 2}| = |r_{\eta 1} 1 + r_c(-1) + \varepsilon_2| \qquad r_c = 0 \qquad |r_{\eta 2}| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2|$$

$$|r_v| = |r_{\eta 2}| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \leq 2\mu$$

$$w = \left(\frac{a}{c}\right) - \left(\frac{b}{c}\right)$$



$$|r_{\eta 1}| = |r_a 1 + r_c(-1) + \varepsilon_1| \qquad r_a = r_c = 0 \qquad |r_{\eta 1}| = |\varepsilon_1|$$

$$|r_{\eta 2}| = |r_b 1 + r_c(-1) + \varepsilon_2| \qquad r_b = r_c = 0 \qquad |r_{\eta 2}| = |\varepsilon_2|$$

$$|r_{\eta 3}| = \left|r_{\eta 1} \frac{\eta_1}{\eta_1 - \eta_2} + r_{\eta_2} \frac{-\eta_2}{\eta_1 - \eta_2} + \varepsilon_3\right| = \left|\varepsilon_1 \frac{\eta_1}{\eta_3} + \varepsilon_2 \frac{-\eta_2}{\eta_3} + \varepsilon_3\right|$$

$$|r_w| = |r_{\eta 3}| = \left|\varepsilon_1 \frac{\eta_1}{\eta_3} + \varepsilon_2 \frac{-\eta_2}{\eta_3} + \varepsilon_3\right| \leq |\varepsilon_1| \frac{|\eta_1|}{|\eta_3|} + |\varepsilon_2| \frac{|\eta_2|}{|\eta_3|} + |\varepsilon_3| \leq \mu \left(\frac{|\eta_1|}{|\eta_3|} + \frac{|\eta_2|}{|\eta_3|} + 1 \right)$$

$$|r_w| = |r_{\eta 3}| \leq \mu \left(\frac{|\eta_1| + |\eta_2|}{|\eta_3|} + 1 \right) \approx \mu \left(\frac{2\frac{a}{c}}{|w|} + 1 \right)$$

$\frac{a}{c} \approx \frac{b}{c}$ $\quad |w| \ll \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a}{c|w|} \gg 1 \Rightarrow r_v \ll r_w$

b) $|r_v| \leq 2.0{,}05 = 0{,}1$

$$|r_w| \leq \left(2 \left(\frac{\left(\frac{0{,}41}{0{,}70}\right)}{0{,}08} \right) + 1 \right) 0{,}05 = \left(2 \left(\frac{0{,}59}{0{,}08} \right) + 1 \right) 0{,}05 = 0{,}79$$

Aunque haya cancelación de términos, hay algoritmos más estables que otros. Notar que el segundo algoritmo involucra más operaciones y que, al postergar la cancelación de términos, produce la amplificación de los primeros errores de redondeo.

Ejercicio 10: en el cálculo numérico, el orden de las operaciones influye. Esto es debido a la precisión finita.

Ejercicio 13

Calcular v^2 - w^2 usando aritmética de punto flotante de 4 dígitos de precisión, con v = 43,21 y w = 43,11, utilizando los siguientes algoritmos:

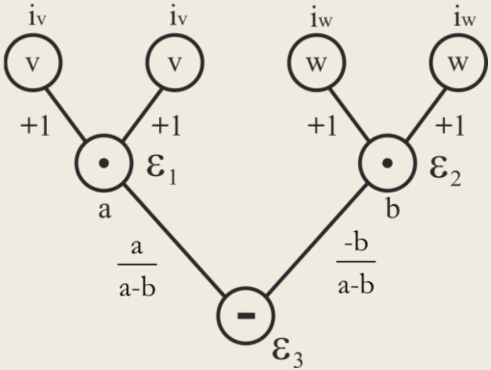
a) (v * v) - (w * w) b) (v + w) * (v – w)

Indicar cuál algoritmo es más conveniente y justificar.

Datos: $v^2 - w^2$ $t = 4$ $v = 43.21$ $w = 43.11$

Para ver cuál es el algoritmo más conveniente, vamos a realizar un análisis mediante la gráfica de procesos.

Algoritmo A): $y_A = (v.v) - (w.w)$



Llamaremos i_v, i_w a los errores inherentes relativos; y a los errores relativos de redondeo en cada operación $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Sabemos que $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq \mu$

$er_a = i_v + i_v + \varepsilon_1 = 2i_v + \varepsilon_1$ $\qquad$ $er_b = i_w + i_w + \varepsilon_2 = 2i_w + \varepsilon_2$

$$er_{yA} = er_a \frac{a}{a-b} - er_b \frac{b}{a-b} + \varepsilon_3 = \frac{(2i_v + \varepsilon_1)a - (2i_w + \varepsilon_2)b}{a-b} + \varepsilon_3$$

Separando los términos que dependen del error inherente de los términos que dependen del error de redondeo, tenemos:

$$er_{yA} = \frac{2ai_v - 2bi_w}{a-b} + \frac{a\varepsilon_1 - b\varepsilon_2}{a-b} + \varepsilon_3 = \frac{2v^2 i_v - 2w^2 i_w}{v^2 - w^2} + \frac{v^2\varepsilon_1 - w^2\varepsilon_2}{v^2 - w^2} + \varepsilon_3$$

$|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq \mu$ $\qquad$ $|i_v|, |i_w| \leq r$

acotando resulta

$$\left|er_{yA}\right| \leq \frac{2v^2+2w^2}{|v^2-w^2|} r + \left(1+\frac{v^2+w^2}{|v^2-w^2|}\right)\mu$$

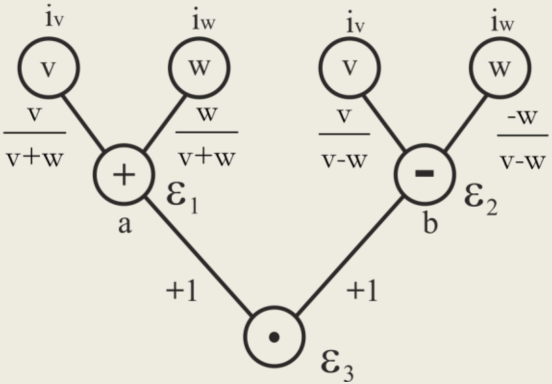
El término que multiplica a r es designado con el nombre **de CONDICION DEL PROBLEMA (Cp)**, y es el factor de amplificación de los errores de relativos inherentes. La condición del problema depende exclusivamente del problema numérico, es decir que para cualquier algoritmo que elijamos para resolver nuestro problema, la condición del problema será la misma.

El término que multiplica a μ se denomina **TÉRMINO DE ESTABILIDAD (Te),** y depende del problema numérico y del algoritmo elegido.

La condición del problema vale: $C_{pA} = \frac{2v^2+2w^2}{|v^2-w^2|} \cong 863$

El término de estabilidad vale: $Te_A = \frac{v^2+w^2}{|v^2-w^2|} + 1 \cong 432$

Algoritmo B): $y_B = (v+w).(v-w)$



$$er_a = i_v \frac{v}{v+w} + i_w \frac{w}{v+w} + \varepsilon_1 \qquad er_b = i_v \frac{v}{v-w} - i_w \frac{w}{v-w} + \varepsilon_2$$

$$er_a = \frac{i_v v + i_w w}{v+w} + \varepsilon_1 \qquad er_b = \frac{i_v v - i_w w}{v-w} + \varepsilon_2$$

$$er_{yB} = er_a + er_b + \varepsilon_3 = \frac{i_v v + i_w w}{v+w} + \frac{i_v v - i_w w}{v-w} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$er_{yB} = \frac{(v-w)(i_v v + i_w w) + (v+w)(i_v v - i_w w)}{(v^2 - w^2)} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$er_{yB} = \frac{(2v^2 i_v + 2w^2 i_w)}{(v^2 - w^2)} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq \mu \qquad |i_v|, |i_w| \leq r$$

acotando resulta

$$\left|er_{yB}\right| \leq \frac{2v^2 + 2w^2}{|v^2 - w^2|} r + (3)\mu$$

La condición del problema vale: $C_{pB} = \frac{2v^2+2w^2}{|v^2-w^2|} \cong 863$

El término de estabilidad vale: $Te_B = 3$

Tal como vimos anteriormente, el Cp es igual en casos, independientemente del algoritmo. Lo que disminuye notablemente es el término de estabilidad.

Esto nos muestra que el segundo algoritmo es el más conveniente, ya que operando como él indica, el error de redondeo propagado será mucho menor.

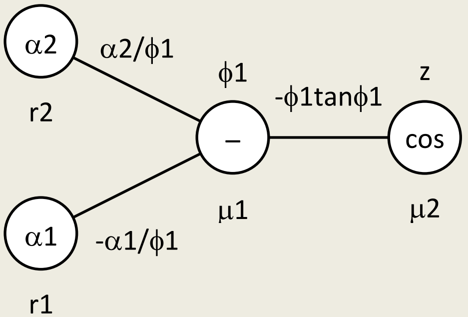
Ejercicio 17: esto es, en general, lo que se busca en la práctica: que los errores debido al redondeo en las operaciones sean despreciables frente a los debidos a los errores de entrada.

Ejercicio 18:

Se desea evaluar z = cos ($\alpha 2$ - $\alpha 1$) , donde $\alpha 1$ = 1,345 ± 0,0005 y $\alpha 2$ = 1,352 ± 0,0005, ambos medidos en radianes. Los cálculos se efectúan con 7 dígitos de precisión. El valor del coseno se obtiene de una tabla con 5 decimales significativos. Se pide:

a) Calcular z y efectuar una estimación de la cota de error mediante la gráfica de proceso. Identificar la principal fuente de error.

b) Repetir el cálculo anterior utilizando el algoritmo alternativo:
z = cos α2 cos α1 + sen α2 sen α1
Explicar cuál de los dos algoritmos es mejor y justificar.

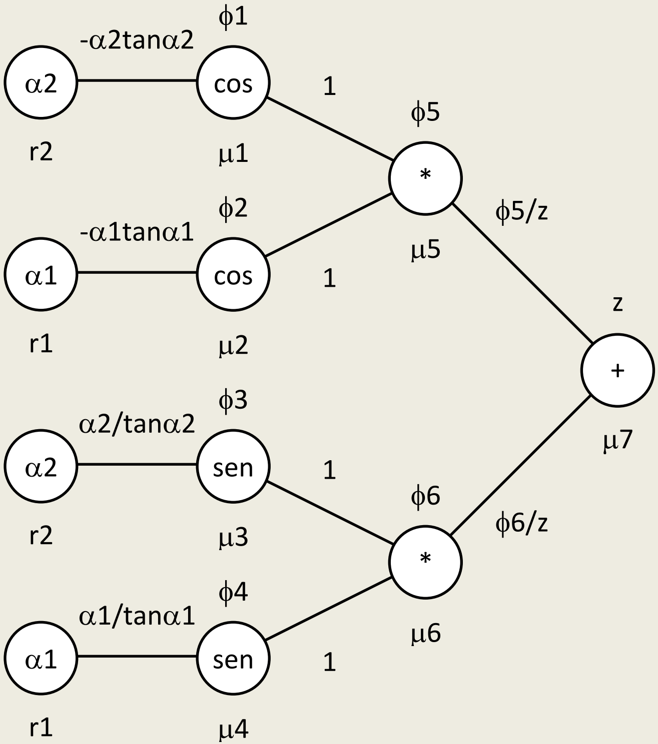


$$r_{\phi 1} = \frac{\alpha_2}{\phi_1} r_2 - \frac{\alpha_1}{\phi_1} r_1 + \mu_1$$

$$\begin{aligned} r_z &= -\phi_1 tan(\phi_1) r_{\phi 1} + \mu_2 = -\phi_1 tan(\phi_1) \left(\frac{\alpha_2}{\phi_1} r_2 - \frac{\alpha_1}{\phi_1} r_1 + \mu_1 \right) + \mu_2 \\ &= r_1 [tan(\phi_1)\alpha_1] + r_2[-tan(\phi_1)\alpha_2] + \mu_1[-\phi_1 tan(\phi_1)] + \mu_2 \\ &\leq R[tan(\phi_1)\alpha_1 + tan(\phi_1)\alpha_2] + U[\phi_1 tan(\phi_1) + 1] = Rc_p + Uf_u = R_z \end{aligned}$$

$$c_p = (\alpha_2 + \alpha_1)tan(\alpha_2 - \alpha_1) \approx 0.02$$

$$f_u = (\alpha_2 - \alpha_1)tan(\alpha_2 - \alpha_1) + 1 \approx 1$$



Variable auxiliar	Error relativo
$\phi_1 = cos(\alpha_2)$	$r_{\phi 1} = -\alpha_2 tan(\alpha_2) r_2 + \mu_1$
$\phi_2 = cos(\alpha_1)$	$r_{\phi 2} = -\alpha_1 tan(\alpha_1) r_1 + \mu_2$
$\phi_3 = sen(\alpha_2)$	$r_{\phi 3} = \alpha_2 / tan(\alpha_2) r_2 + \mu_3$
$\phi_4 = sen(\alpha_1)$	$r_{\phi 4} = \alpha_1 / tan(\alpha_1) r_1 + \mu_4$
$\phi_5 = \phi_1 \phi_2$	$r_{\phi 5} = r_{\phi 1} + r_{\phi 2} + \mu_5$
$\phi_6 = \phi_3 \phi_4$	$r_{\phi 6} = r_{\phi 3} + r_{\phi 4} + \mu_6$
$z = \phi_5 + \phi_6$	$r_z = \frac{\phi_5}{z} r_{\phi 5} + \frac{\phi_6}{z} r_{\phi 6} + \mu_7$

Reemplazando:

$$r_z = \frac{\phi_5}{z}\left(r_{\phi 1} + r_{\phi 2} + \mu_5\right) + \frac{\phi_6}{z}\left(r_{\phi 3} + r_{\phi 4} + \mu_6\right) + \mu_7 =$$

$$= \frac{\phi_5}{z}(-\alpha_2 tan(\alpha_2) r_2 + \mu_1 - \alpha_1 tan(\alpha_1) r_1 + \mu_2 + \mu_5) + \frac{\phi_6}{z}(\alpha_2 / tan(\alpha_2) r_2 + \mu_3 + \alpha_1 / tan(\alpha_1) r_1 + \mu_4 + \mu_6) + \mu_7$$

Reagrupando:

$$r_z = r_1\alpha_1\left[\frac{\phi_6}{z}1/tan(\alpha_1) - \frac{\phi_5}{z}tan(\alpha_1)\right] + r_2\alpha_2\left[\frac{\phi_6}{z}1/tan(\alpha_2) - \frac{\phi_5}{z}tan(\alpha_2)\right] + \frac{\phi_5}{z}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_5)$$
$$+ \frac{\phi_6}{z}(\mu_3 + \mu_4 + \mu_6) + \mu_7$$

Llamemos C_1 al primer corchete, es decir:

$$C_1 = \frac{\phi_6}{z}1/tan(\alpha_1) - \frac{\phi_5}{z}tan(\alpha_1)$$

Recordando que $tan(\alpha) = sen(\alpha)/cos(\alpha)$ y reemplazando ϕ_5, ϕ_6 y z por sus expresiones:

$$C_1 = \frac{sen(\alpha_2)sen(\alpha_1)}{cos(\alpha_2)cos(\alpha_1) + sen(\alpha_2)sen(\alpha_1)}\frac{cos(\alpha_1)}{sen(\alpha_1)} - \frac{cos(\alpha_2)cos(\alpha_1)}{cos(\alpha_2)cos(\alpha_1) + sen(\alpha_2)sen(\alpha_1)}\frac{sen(\alpha_1)}{cos(\alpha_1)}$$

Simplificando y restando:

$$C_1 = \frac{sen(\alpha_2)cos(\alpha_1) - cos(\alpha_2)sen(\alpha_1)}{cos(\alpha_2)cos(\alpha_1) + sen(\alpha_2)sen(\alpha_1)}$$

Recordando las identidades trigonométricas, el numerador es $sen(\alpha_2 - \alpha_1)$ y el denominador $cos(\alpha_2 - \alpha_1)$. Luego:

$$C_1 = \frac{sen(\alpha_2 - \alpha_1)}{cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Si ahora llamamos C_2 al segundo corchete:

$$C_2 = \frac{\phi_6}{z} 1/tan(\alpha_2) - \frac{\phi_5}{z} tan(\alpha_2)$$

Reemplazando:

$$C_2 = \frac{sen(\alpha_2)sen(\alpha_1)}{cos(\alpha_2)cos(\alpha_1) + sen(\alpha_2)sen(\alpha_1)} \frac{cos(\alpha_2)}{sen(\alpha_2)} - \frac{cos(\alpha_2)cos(\alpha_1)}{cos(\alpha_2)cos(\alpha_1) + sen(\alpha_2)sen(\alpha_1)} \frac{sen(\alpha_2)}{cos(\alpha_2)}$$

Operando:

$$C_2 = \frac{sen(\alpha_1)cos(\alpha_2) - cos(\alpha_1)sen(\alpha_2)}{cos(\alpha_2)cos(\alpha_1) + sen(\alpha_2)sen(\alpha_1)}$$

Ahora el numerador queda $sen(\alpha_1 - \alpha_2)$. Como es una función impar, $sen(\alpha_1 - \alpha_2) = -sen(\alpha_2 - \alpha_1)$. Luego:

$$C_2 = \frac{-sen(\alpha_2 - \alpha_1)}{cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = -tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Volviendo a la expresión de r_z:

$$r_z = r_1\alpha_1 tan(\alpha_2 - \alpha_1) - r_2\alpha_2 tan(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{\phi_5}{z}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_5) + \frac{\phi_6}{z}(\mu_3 + \mu_4 + \mu_6) + \mu_7$$

$$\leq R[(\alpha_2 + \alpha_1)tan(\alpha_2 - \alpha_1)] + \frac{\phi_5}{\phi_5 + \phi_6}3U + \frac{\phi_6}{\phi_5 + \phi_6}3U + U$$

$$= R[(\alpha_2 + \alpha_1)tan(\alpha_2 - \alpha_1)] + 4U = Rc_p + Uf_u = R_z$$

$$c_p = (\alpha_2 + \alpha_1)tan(\alpha_2 - \alpha_1) \approx 0.02$$

$$f_u = 4$$