ECUACIONES NO LINEALES (Primera parte)

ANÁLISIS NUMÉRICO/MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS

(75.12/95.04/95.13)

CURSO TARELA

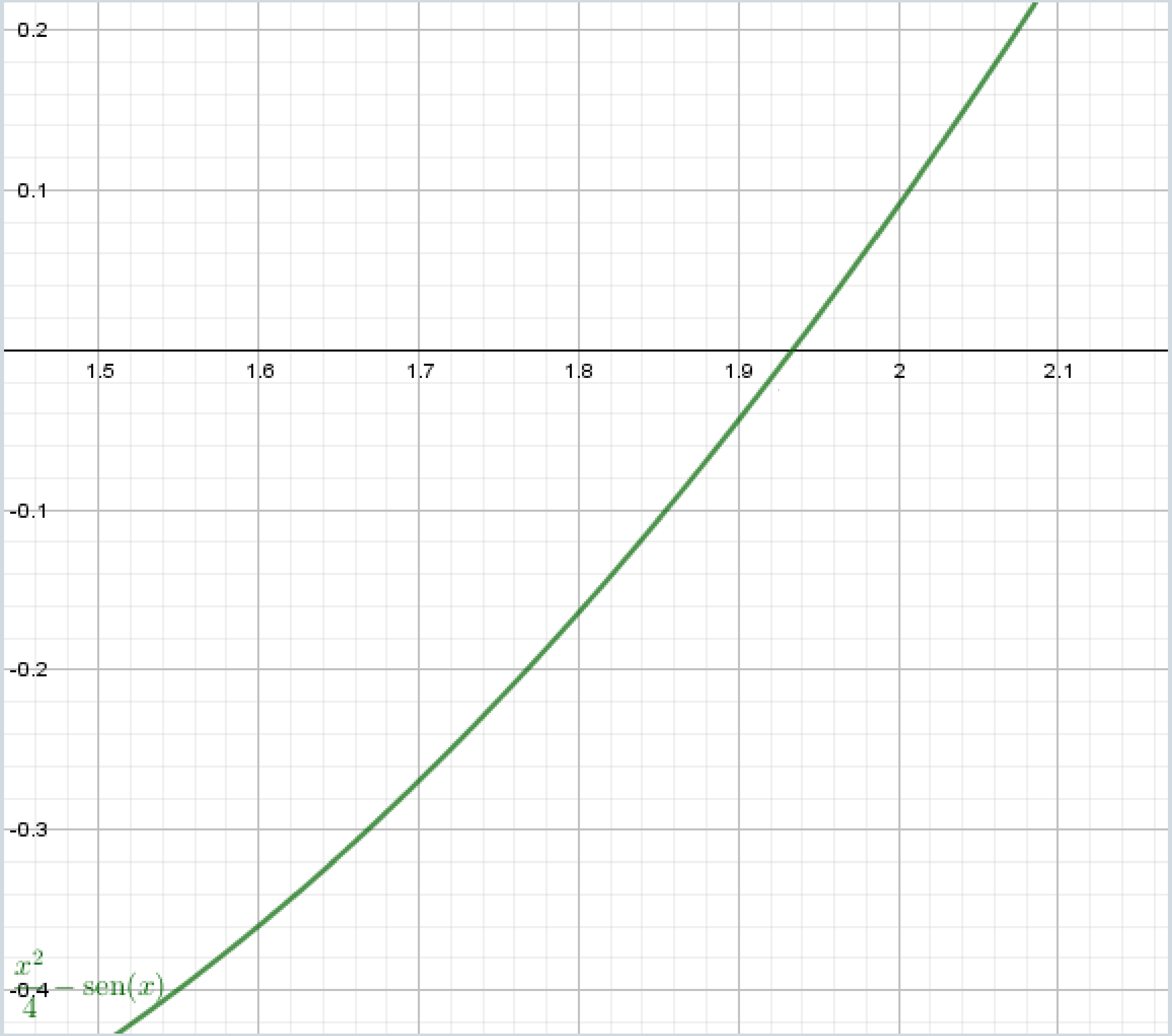
PROBLEMA:

Hallar la raíz de $f(x) = \frac{x^2}{4} - sen(x)$ *en un intervalo de partida válido, con un error absoluto de 0,02 por los métodos:*

a. *Bisección*
b. *Regula Falsi*
c. *Punto Fijo*

Calcular orden de convergencia para cada uno.

FUNCIÓN:



BISECCIÓN

Pasos a seguir:

1. Definir el intervalo $[a_0, b_0]$.
2. Calcular $f(a_0)$ y $f(b_0)$, verificando que $f(a_0) * f(b_0) < 0$.
3. Calcular $m_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
4. Calcular $f(m_1)$.
5. Si $S[f(m_1)] = S[f(a_0)]$, entonces $a_1 \rightarrow m_1$. Caso contrario, $b_1 \rightarrow m_1$
6. Calcular cota de error absoluto: $\Delta_1 = |m_1 - m_0| = \frac{b_0-a_0}{2}$
7. Repetir a partir de '2' hasta cumplir que $\Delta_{k+1} < 0{,}02$

BISECCIÓN

¿Puedo determinar la cantidad de pasos que necesito para hallar la raíz de la función con la tolerancia deseada?

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} < TOL \qquad \Rightarrow \qquad K + 1 > ln\left(\frac{b_0 - a_0}{TOL}\right)$$

$$K > 3{,}643 \ldots$$

$$\boldsymbol{n = 4}$$

BISECCIÓN

k	a_k	b_x	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	$f(m_{k+1})$	Δ_{k+1}
0	1,50000	2,00000	-0,43499	0,09070	1,75000	-0,21836	0,25000
1	1,75000	2,00000	-0,21836	0,09070	1,87500	-0,07518	0,12500
2	1,87500	2,00000	-0,07518	0,09070	1,93750	0,00496	0,06250
3	1,87500	1,93750	-0,07518	0,00496	1,90625	-0,03581	0,03125
4	1,90625	1,93750	-0,03581	0,00496	1,92188	-0,01560	0,01563

Raíz: $\boldsymbol{x = 1,92 \pm 0,02}$

ORDEN DE CONVERGENCIA:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{{\varepsilon_k}^{\boldsymbol{P}}} = \lambda$$

$$\frac{\Delta_{k+1}}{{\Delta_k}^{\boldsymbol{P}}} = \lambda = \frac{\Delta_k}{{\Delta_{k-1}}^{\boldsymbol{P}}}$$

$$\Rightarrow \quad \ln \Delta_{k+1} - \boldsymbol{P} * \ln \Delta_k = \ln \Delta_k - \boldsymbol{P} * \ln \Delta_{k-1}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{\Delta_{k+1}}}{\boldsymbol{\Delta_k}}\right)}{\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{\Delta_k}}{\boldsymbol{\Delta_{k-1}}}\right)}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}01563}{0{,}03125}\right)}{\ln\left(\frac{0{,}03125}{0{,}06250}\right)} = \boldsymbol{0{,}99953 \approx 1}$$

REGULA FALSI:

Pasos a seguir:

1. Definir el intervalo $[a_0, b_0]$.
2. Calcular $f(a_0)$ y $f(b_0)$, verificando que $f(a_0) * f(b_0) < 0$.
3. Calcular $\boldsymbol{m_1 = a_0 - (b_0 - a_0)\frac{f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}}$.
4. Calcular $f(m_1)$.
5. Si $S[f(m_1)] = S[f(a_0)]$, entonces $a_1 \rightarrow m_1$. Caso contrario, $b_1 \rightarrow m_1$
6. Calcular cota del error absoluto: $\Delta_1 = |m_1 - m_0|$
7. Repetir a partir de ‘2’ hasta cumplir que $\Delta_{k+1} < 0{,}02$

REGULA FALSI:

k	a_k	b_x	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	$f(m_{k+1})$	Δ_{k+1}
0	1,500000	2,000000	-0,434995	0,090703	1,913731	-0,026180	-
1	1,913731	2,000000	-0,026180	0,090703	1,933054	-0,000924	0,019323
2	1,933054	2,000000	-0,000924	0,090703	1,933730	-0,000032	0,000675
3	1,933730	2,000000	-0,000032	0,090703	1,933753	-0,000001	0,000023

Raíz: $\boldsymbol{x = 1,93 \pm 0,02}$

ORDEN DE CONVERGENCIA:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k{}^{P}} = \lambda$$

$$\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k{}^{P}} = \lambda = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}{}^{P}}$$

$$\Rightarrow \ln \Delta_{k+1} - P * \ln \Delta_k = \ln \Delta_k - P * \ln \Delta_{k-1}$$

$$P = \frac{ln\left(\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}\right)}{ln\left(\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}\right)}$$

$$P = \frac{\ln\left(\frac{0{,}000023}{0{,}000675}\right)}{\ln\left(\frac{0{,}000675}{0{,}019323}\right)} = 1{,}0074 \ldots \approx 1$$

PUNTO FIJO:

Pasos a seguir:

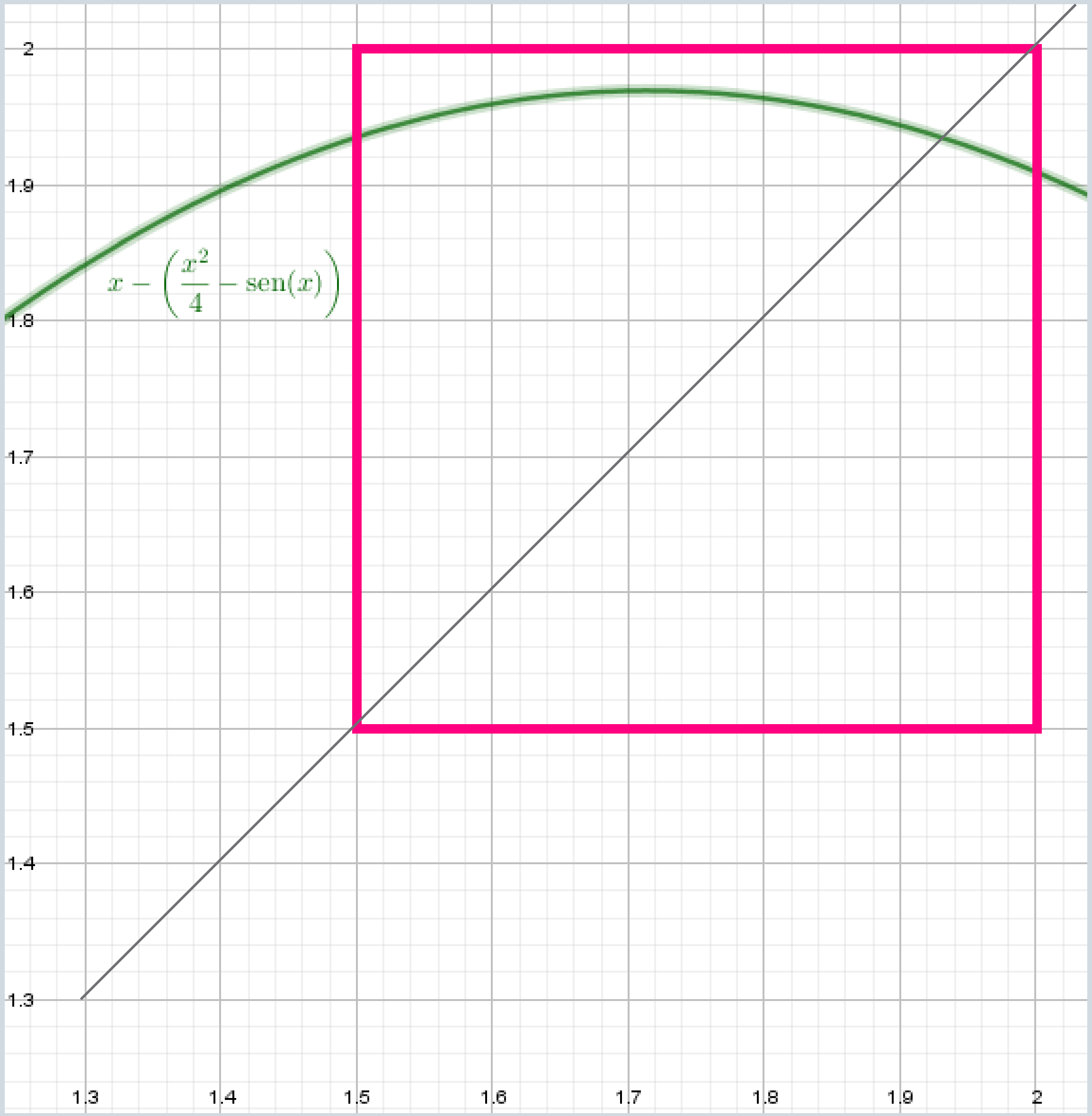
1. Definir el intervalo $[a, b\ ]$.
2. Definir g tal que si $f(c) = 0$, entonces g$(c) = c$
3. Probar que se cumplen las condiciones de existencia y de unicidad del punto fijo.
4. Elegir un valor semilla x_0 e Iterar: $x_1 = g(x_0)$
5. Calcular $\Delta_1 = |x_1 - x_0|$
6. Repetir a partir de '4' hasta cumplir que $\Delta_{k+1} < 0{,}02$

PUNTO FIJO:

Necesitaríamos probar que la función $g(x) = x - f(x)$ cumple con las condiciones de existencia y unicidad del punto fijo en el intervalo.

Existencia: $g \in C[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]$ $\forall$ $x \in [a,b]$.

Unicidad: $\exists$ $g'(x)$ en $[a,b]$ y $\exists$ $0<k<1$ tq $|g'(x)| \leq k < 1$ $\forall$ $x \in [a,b]$.



Cumple condición de existencia.

Cumple condición de unicidad.

PUNTO FIJO:

$$g(x) = x - \left(\frac{x^2}{4} - sen(x)\right)$$

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{{x_k}^2}{4} - sen(x_k)\right)$$

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{x_{k+1}}$	$\mathbf{\Delta_{k+1}}$
0	1,600000	1,959574	0,359574
1	1,959574	1,924965	0,034609
2	1,924965	1,936528	0,011563

Raíz: $\boldsymbol{x = 1,94 \pm 0,02}$

ORDEN DE CONVERGENCIA:

$$\boldsymbol{P = \frac{ln\left(\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}\right)}{ln\left(\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}\right)}}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{\ln\left(\frac{0{,}011563}{0{,}034609}\right)}{\ln\left(\frac{0{,}034609}{0,359574}\right)} = 0,46\ldots \approx ???}$$

Hago más iteraciones…

k	x_k	x_{k+1}	Δ_{k+1}	P
0	1,600000	1,959574	0,359574	-
1	1,959574	1,924965	0,034609	-
2	1,924965	1,936528	0,011563	0,468343
3	1,936528	1,932855	0,003672	1,046216
4	1,932855	1,934042	0,001187	0,984588
5	1,934042	1,933661	0,000382	1,004897
6	1,933661	1,933784	0,000123	0,998417
7	1,933784	1,933744	0,000040	1,000509
8	1,933744	1,933757	0,000013	0,999836