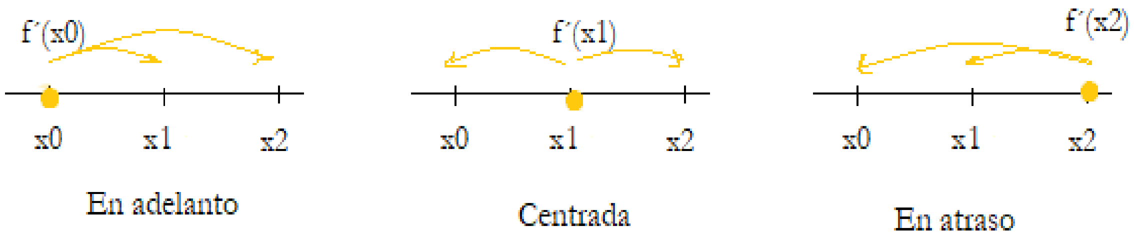
FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Análisis Numérico / Métodos Matemáticos y Numéricos (75.12/95.04/95.13)

Diferenciación numérica

Diferenciación numérica



$\mathrm{OP} = \mathrm{N} - \mathrm{OD}$ Para esquemas en **adelanto/atraso** y **centrados** [cuando par.(N)=par.(OD)]

$\mathrm{OP} = \mathrm{N} - \mathrm{OD}(+\mathbf{1})$ Para esquemas **centrados** cuando par.(N)≠par.(OD)

f´con 2 puntos adelanto/atraso $\rightarrow \mathrm{OP} = 1$
f´con 2 puntos centrada $\rightarrow \mathrm{OP} = 2 \rightarrow gano\ 1\ OP$

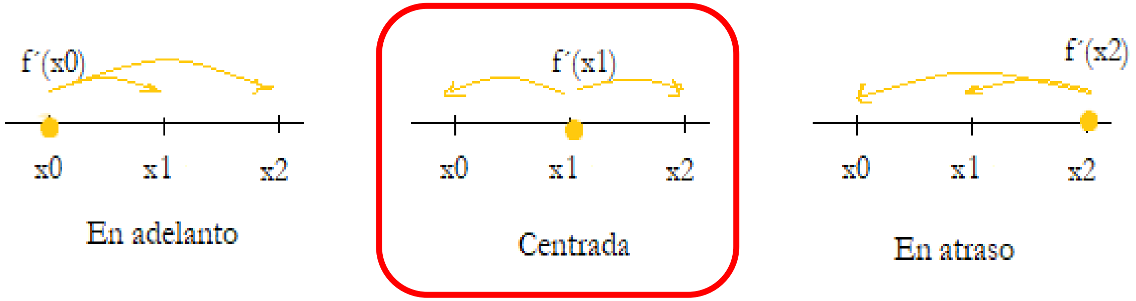
f´con 3 puntos adelanto/atraso $\rightarrow \mathrm{OP} = 2$
f´con 3 puntos centrada $\rightarrow \mathrm{OP} = 2$

f´´con 3 puntos adelanto/atraso $\rightarrow \mathrm{OP} = 1$
f´´con 3 puntos centrada $\rightarrow \mathrm{OP} = 2 \rightarrow gano\ 1\ OP$

Diferenciación numérica

Eje 1. *Construir una aproximación centrada con* ***tres puntos*** *de* ***f´(x)*** *y analizar la precisión del esquema obtenido.*

$N = 3, OD = 1 \Rightarrow \boxed{OP = 2}$



1• Combinación Lineal →

$$f´(x1) \approx a\, f(xo) + b\, f(x1) + c\, f(x2) \qquad (1)$$

2• Desarrollo Taylor →

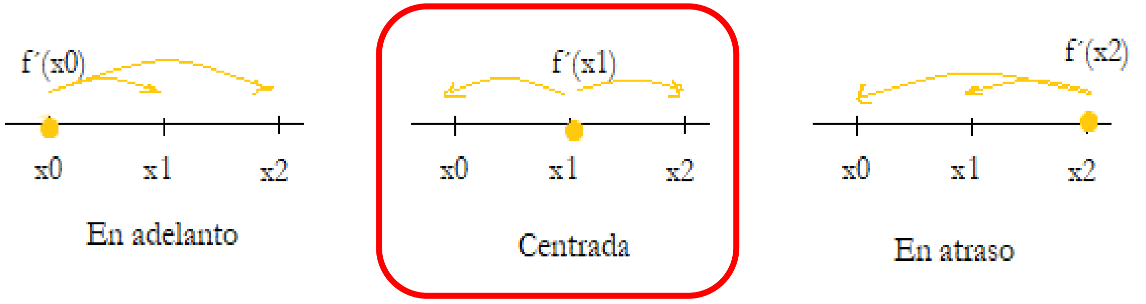
$$f(x0) = f(x1) + f´(x1)(x0 - x1) + \frac{f´´(x1)(x0 - x1)^2}{2!} + \frac{f´´´(x1)(x0 - x1)^3}{3!} + O(h^4)$$

$$f(x2) = f(x1) + f´(x1)(x2 - x1) + \frac{f´´(x1)(x2 - x1)^2}{2!} + \frac{f´´´(x1)(x2 - x1)^3}{3!} + O(h^4)$$

Diferenciación numérica

Eje 1. *Construir una aproximación centrada con* ***tres puntos*** *de* ***f´(x)*** *y analizar la precisión del esquema obtenido.*

$N = 3, OD = 1 \Rightarrow \boxed{OP = 2}$



1• Combinación Lineal →

$$f´(x1) \approx a\, f(xo) + b\, f(x1) + c\, f(x2) \quad (1)$$

2• Desarrollo Taylor →

$$f(x0) = f(x1) + f´(x1)(-h) + \frac{f´´(x1)(-h)^2}{2!} + \frac{f´´´(x1)(-h)^3}{3!} + O(h^4) \qquad x0 - x1 = -h$$

$$f(x2) = f(x1) + f´(x1)\ h + \frac{f´´(x1)h^2}{2!} + \frac{f´´´(x1)h^3}{3!} + O(h^4) \qquad x2 - x1 = h$$

3• Reemplazo en (1)

$$f´(x1) \approx a\left[f(x1) + f´(x1)(-h) + \frac{f´´(x1)(-h)^2}{2!} + \frac{f´´´(x1)(-h)^3}{3!} + O(h^4)\right] + b\, f(x1) + c\left[f(x1) + f´(x1)\ h + \frac{f´´(x1)h^2}{2!} + \frac{f´´´(x1)h^3}{3!} + O(h^4)\right]$$

Diferenciación numérica

4• Despejo los coeficientes [a,b,c]

$$f'(x1) + R_D = a\left[f(x1) + f'(x1)(-h) + \frac{f''(x1)(-h)^2}{2!} + \frac{f'''(x1)(-h)^3}{3!} + O(h^4)\right] + b\, f(x1) + c\left[f(x1) + f'(x1)\ \ h + \frac{f''(x1)h^2}{2!} + \frac{f'''(x1)h^3}{3!} + O(h^4)\right]$$

$$f'(x1) + R_D = \underbrace{[a+b+c]}_{\mathbf{0}}\, f(x1) + \underbrace{[-ha+hc]}_{\mathbf{1}}\ f'(x1) + \underbrace{\left[\frac{h^2a}{2} + \frac{h^2c}{2}\right]}_{\mathbf{0}}\ \underbrace{f''(x1) + \left[\frac{-h^3a}{6} + \frac{h^3c}{6}\right]\ f'''(x1) + O(h^4)}_{\textbf{Error trunc.}}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -ha + hc = 1 \\ \dfrac{h^2a}{2} + \dfrac{h^2c}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -h & 0 & h \\ \dfrac{h^2}{2} & 0 & \dfrac{h^2}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2h}\ \ ;\ \ b = 0\ \ ;\ \ c = \frac{1}{2h}}$$

Diferenciación numérica

$$\Rightarrow \quad f'(x1) \approx \frac{-1}{2h}\, f(xo) + 0\;\, f(x1) + \frac{1}{2h}\;\, f(x2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x1) \approx \frac{f(x2)\;-f(x0)}{2h}}$$

Aproximación centrada de la f’(x1), con 3 puntos

<u>Análisis de e_T</u>

$$f'(x1) + R_D = [a+b+c]\, f(x1) + [-ha+hc]\;\, f'(x1) + \left[\frac{h^2 a}{2} + \frac{h^2 c}{2}\right]\;\, f''(x1) + \underbrace{\left[\frac{-h^3 a}{6} + \frac{h^3 c}{6}\right]\, f'''(x1) + O(h^4)}_{\text{Error trunc.}}$$

$$e_T \le \left| \left(\frac{-h^3 a}{6} + \frac{h^3 c}{6} \right) \quad \text{máx}|\, f'''(x)| \quad \right| \qquad con \quad x0 \le \text{ x } \le x2$$

$$a = \frac{-1}{2h} \;\; ; \quad b = 0 \;\; ; \quad c = \frac{1}{2h}$$

$$e_T \le \left| \frac{h^2}{12} + \frac{h^2}{12} \right| \quad \text{máx}|\, f'''(x)|$$

$$\boxed{e_T \le \left| \frac{h^2}{6} \right| \quad \text{máx}|\, f'''(x)|}$$

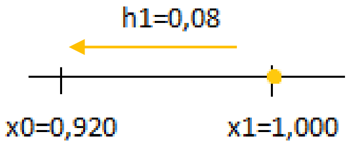
Cota de e_T.

Esquema de orden 2

Diferenciación numérica

***Eje 2**. Estimar el valor de f´(1,000) utilizando la siguiente tabla de valores para función sen(x):*

x	f(x)
0,920	0,79560
1,000	0,84147



N =2 ⇒ OP=N - OD

OD=1 OP= 1

1• Combinación Lineal de la derivada a aproximar $f'(x_1) \approx a\, f(x_0) + b\, f(x_1)$ (1)

2• Desarrollo Taylor

$$f(x_0) = f(x_1) + f'(x_1)(-h_1) + \frac{f''(x_1)(-h_1)^2}{2!} + O({h_1}^3)$$

3• Reemplazo en (1)

$$f'(x_1) = a\left[f(x_1) + f'(x_1)(-h_1) + \frac{f''(x_1)(-h_1)^2}{2!} + O({h_1}^3)\right] + b\, f(x_1)$$

$$f'(x_1) = \underbrace{[a+b]}_{\mathbf{0}} f(x_1) + \underbrace{[-h_1 a]}_{\mathbf{1}} f'(x_1) + \underbrace{\left[\frac{{h_1}^2 a}{2}\right] f''(x_1) + O({h_1}^3)}_{\textbf{Error de trunc.}}$$

Diferenciación numérica

Eje 2. *Estimar el valor de f´(1,000) utilizando la siguiente tabla de valores para función sen(x):*

x	f(x)
0,920	0,79560
1,000	0,84147

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -h_1 a = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{-1}{h_1} \qquad b = \frac{1}{h_1}$$

$$\Rightarrow \quad f´(x_1) \approx a\, f(x_0) + b\, f(x_1)$$

$$f´(x_1) \approx \frac{-1}{h_1} f(x_0) + \frac{1}{h_1} f(x_1)$$

$$f´(1{,}000) \approx \frac{1}{0{,}08}[-0{,}79560 + 0{,}84147]$$

$$\boxed{f´(1{,}000) \approx 0{,}57338}$$

Diferenciación numérica

Eje 2. *Estimar el valor de f´(1,000) utilizando la siguiente tabla de valores para función sen(x):*

x	f(x)
0,920	0,79560
1,000	0,84147

$$f'(x_1) \approx [a+b]f(x_1) + [-h_1 a]f'(x_1) + \underbrace{\left[\frac{{h_1}^2 a}{2}\right] f''(x_1) + O({h_1}^3)}_{\text{Error de trunc.}}$$

$$e_T \leq \left| \text{máx}|\, f''(x)| \; \frac{{h_1}^2 a}{2} \right| \qquad con \;\; 0{,}920 \leq \mathrm{x} \leq 1{,}000$$

Cota del $\boldsymbol{e_T}$

$$e_T \leq |-\text{sen}(1)| \left| -\frac{h_1}{2} \right|$$

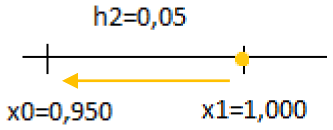
$$\boxed{e_T \leq \;\; 0{,}034 \;\approx 0{,}04}$$

¿Cómo podría mejorar el resultado?

$$|\cos(1{,}000) - 0{,}57338| = 0{,}033$$

***Eje 2**. Estimar el valor de f´(1,000) utilizando la siguiente tabla de valores para función sen(x):*

x	f(x)
0,950	0,81342
1,000	0,84147



N =2 $\Rightarrow$ OP=N - OD
OD=1 OP= 1

$$f'(x_1) \approx a\, f(x_0) + b\, f(x_1) \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{-1}{h_2} \qquad b = \frac{1}{h_2}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{h_2}\,[\,f(x_1) - f(x_0)]$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{0{,}05}\,[\,0{,}84147 - 0{,}81342\,]$$

$$\boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}56100}$$

$$\boxed{e_T \leq 0{,}021 \approx 0{,}03}$$

$$|cos(1{,}000) - 0{,}56100| = 0{,}0207$$

Diferenciación numérica

Resumiendo: $h_1 = 0{,}08 \quad \rightarrow \quad \boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}57338} \quad \boxed{e_T \leq 0{,}034 \approx 0{,}04}$

$h_2 = 0{,}05 \quad \rightarrow \quad \boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}56100} \quad \boxed{e_T \leq 0{,}021 \approx 0{,}03}$

$\downarrow \boldsymbol{h} \quad \rightarrow \quad \downarrow e_T$

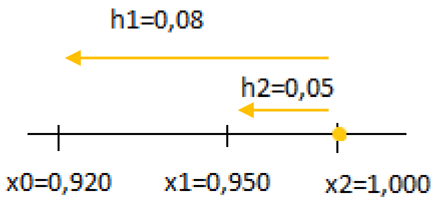
(!! $\uparrow e_R$)

¿Cómo podría mejorar el resultado?

Diferenciación numérica

Eje 2*. Estimar el valor de f´(1,000) utilizando la siguiente tabla de valores para función sen(x) y un esquema de orden 2:*

x	f(x)
0,920	0,79560
0,950	0,81342
1,000	0,84147



N =3 $\Rightarrow$ OP=N - OD $\Rightarrow$ $\boxed{\text{OP= } 2}$

OD=1

$$f'(x2) \approx a\, f(x0) + b\, f(x1) + c\, f(x2)$$

Desarrollo Taylor

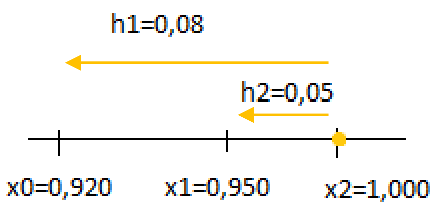
$$\begin{cases} f(x0) = f(x2) + f'(x2)(x0 - x2) + \dfrac{f''(x2)(x0 - x2)^2}{2!} + \dfrac{f'''(x2)\,(x0 - x2)^3}{3!} + O({h_1}^4) \\ f(x1) = f(x2) + f'(x2)(x1 - x2) + \dfrac{f''(x2)(x1 - x2)^2}{2!} + \dfrac{f'''(x2)\,(x1 - x2)^3}{3!} + O({h_2}^4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x0) = f(x2) + f'(x2)(-h_1) + \dfrac{f''(x2)(-h_1)^2}{2!} + \dfrac{f'''(x2)\,(-h_1)^3}{3!} + O({h_1}^4) \\ f(x1) = f(x2) + f'(x2)(-h_2) + \dfrac{f''(x2)(-h_2)^2}{2!} + \dfrac{f'''(x2)\,(-h_2)^3}{3!} + O({h_2}^4) \end{cases}$$

Diferenciación numérica

Eje 2. *Estimar el valor de f´(1,000) utilizando la siguiente tabla de valores para función sen(x) y un esquema de orden 2:*

x	f(x)
0,920	0,79560
0,950	0,81342
1,000	0,84147



$$f´(x2) \approx a\, f(x0) + b\, f(x1) + c\, f(x2)$$

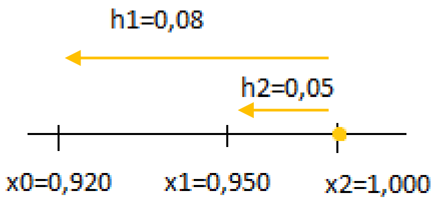
$$f´(x2) = f(x2)\underbrace{[a+b+c]}_{0} + f´(x2)\underbrace{[-h_1 a - h_2 b]}_{1} + f´´(x2)\underbrace{\left[\frac{{h_1}^2 a}{2} + \frac{{h_2}^2 b}{2}\right]}_{0} + \underbrace{f´´´(x2)\left[\frac{-{h_1}^3 a}{6} - \frac{{h_2}^3 b}{6}\right] + O({h_1}^4) + O({h_2}^4)}_{\text{Error de trunc.}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ -h_1 a - h_2 b = 1 \\ \frac{{h_1}^2 a}{2} + \frac{{h_2}^2 b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 20{,}833 \\ b = -53{,}333 \\ c = 32{,}500 \end{array}$$

Diferenciación numérica

Eje 2*. Estimar el valor de f´(1,000) utilizando la siguiente tabla de valores para función sen(x) y un esquema de orden 2:*

x	f(x)
0,920	0,79560
0,950	0,81342
1,000	0,84147



$$f'(x2) \approx a\, f(x0) + b\, f(x1) + c\, f(x2)$$

$$f'(x2) \approx 20{,}833\, f(x0) - 53{,}333\, f(x1) + 32{,}500\, f(x2)$$

$$\boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}54038}$$

Diferenciación numérica

***Eje 2**. Estimar el valor de f´(1,000) utilizando la siguiente tabla de valores para función sen(x) y un esquema de orden 2:*

x	f(x)
0,920	0,79560
0,950	0,81342
1,000	0,84147

$$f´(x2) = f(x2)[a+b+c] + f´(x2)[-h_1 a - h_2 b] + f´´(x2)\left[\frac{h_1{}^2 a}{2} + \frac{h_2{}^2 b}{2}\right] + \underbrace{f´´´(x2)\left[\frac{-h_1{}^3 a}{6} - \frac{h_2{}^3 b}{6}\right] + O(h_1{}^4) + O(h_2{}^4)}_{\text{Error de trunc.}}$$

$$e_T \leq \left| \text{máx}\,|f´´´(x)| \left[\frac{-h_1{}^3 a}{6} - \frac{h_2{}^3 b}{6}\right] \right| \qquad con\ \ 0{,}920 \leq x \leq 1{,}000$$

$$e_T \leq |-\cos(0{,}920)| \left| \frac{-h_1{}^3 20{,}833}{6} - \frac{h_2{}^3 (53{,}333)}{6} \right| \qquad a = 20{,}833\ ;\ b = -53{,}333$$

$$\boxed{e_T \leq 0{,}000403 \approx 0{,}0005}$$

$$|cos(1{,}000) - 0{,}54038| = 0{,}0000777$$

Diferenciación numérica

Resumiendo:

$$N = 2, \mathrm{OP} = 1 \begin{cases} h_1 = 0{,}08 & \rightarrow \quad \boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}57338} \quad \boxed{e_T \leq 0{,}034 \approx 0{,}04} \\ h_2 = 0{,}05 & \rightarrow \quad \boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}56100} \quad \boxed{e_T \leq 0{,}021 \approx 0{,}03} \end{cases}$$

$\downarrow \boldsymbol{h} \rightarrow \downarrow e_T$

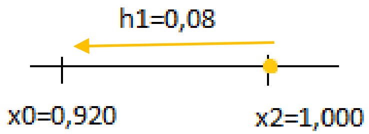
(**!!** $\uparrow e_R$)

$$N = 3, \mathrm{OP} = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}54038} \quad \boxed{e_T \leq 0{,}000403 \approx 0{,}0005}$$

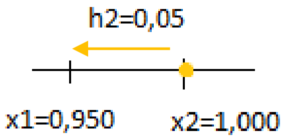
¿Otra forma de mejorar el resultado?

Diferenciación numérica

***Eje 2**. Mejorar la estimación f´(1,000), utilizando extrapolación de Richardson (Teórica de Integración).*



$$\boxed{f'_1(1{,}000) \approx 0{,}57338}$$



$$\boxed{f'_2(1{,}000) \approx 0{,}56100}$$

$$f'_R(x2) = f'_1(x2) + \frac{f'_1(x2) - f'_2(x2)}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{OP} - 1}$$

$$f'_R(1{,}000) = 0{,}57338 + \frac{0{,}57338 - 0{,}56100}{\left(\frac{0{,}05}{0{,}08}\right)^{1} - 1}$$

$$\boxed{f'_R(1{,}000) = 0{,}54037}$$

Diferenciación numérica

Resumiendo:

- $N = 2, \mathrm{OP} = 1$ $\begin{cases} h_1 = 0{,}08 & \rightarrow \\ h_2 = 0{,}05 & \rightarrow \end{cases}$

$\boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}57338}$ $\boxed{e_T \leq 0{,}034 \approx 0{,}04}$ $\downarrow \boldsymbol{h} \rightarrow \downarrow e_T$

$(!!\uparrow e_R)$

$\boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}56100}$ $\boxed{e_T \leq 0{,}021 \approx 0{,}03}$

- $N = 3, \mathrm{OP} = 2$ $\rightarrow$ $\boxed{f'(1{,}000) \approx 0{,}54038}$ $\boxed{e_T \leq 0{,}000403 \approx 0{,}0005}$

- $\text{Extrapol. de Richardson}$ $\rightarrow$ $\boxed{f'_R(x2) = 0{,}54037}$

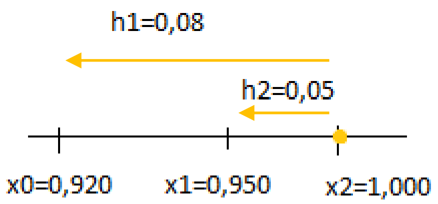
  $h_1 = 0{,}08$

  $h_2 = 0{,}05$

Diferenciación numérica

→ Método alternativo de determinación de los coeficientes

x	f(x)
0,920	0,79560
0,950	0,81342
1,000	0,84147



$$f'(x2) \approx {\color{red}a}\, f(x0) + {\color{red}b}\, f(x1) + {\color{red}c}\, f(x2)$$

Si f(x)=1 → f´(x)=0 → $f'(x2) = 0 = a\,1 + b\,1 + c\,1$

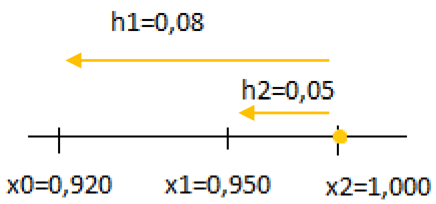
Si f(x)=(x-x2) → f´(x)=1 → $f'(x2) = 1 = a(x0 - x2) + b(x1 - x2) + c(x2 - x2)$

Si f(x)=(x-x2) ^{2} → f´(x)= 2(x-x2) → $f'(x2) = 0 = a\,(x0 - x2)^2 + b\,(x1 - x2)^2 + c\,(x2 - x2)^2$

Diferenciación numérica

Método alternativo de determinación de los coeficientes

x	f(x)
0,920	0,79560
0,950	0,81342
1,000	0,84147



$$f'(x2) \approx {\color{red}a}\, f(x0) + {\color{red}b}\, f(x1) + {\color{red}c}\, f(x2)$$

Si f(x)=1 → $f'(x2) = 0 = a + b + c$

Si f(x)=(x-x2) → $f'(x2) = 1 = a({\color{red}-h1}) + b({\color{red}-h2})$

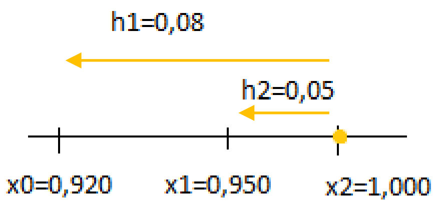
Si f(x)=(x-x2) ^{2} → $f'(x2) = 0 = a\,({\color{red}-h1})^2 + b\,({\color{red}-h2})^2$

→ $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -h1 & -h2 & 0 & 1 \\ -h1^2 & -h2^2 & 0 & 0 \end{array}\right|$

$a = 20{,}833$; $b = -53{,}333$; $c = 32{,}500$

→ Método alternativo de determinación de los coeficientes

x	f(x)
0,920	0,79560
0,950	0,81342
1,000	0,84147



$$f'(x2) \approx a\, f(x0) + b\, f(x1) + c\, f(x2)$$

$$f'(x2) \approx 20{,}833\, f(x0) - 53{,}333\, f(x1) + 32{,}500\, f(x2)$$

$$\boxed{f'(x2) \approx 0{,}54038}$$

¡Consultas?

MUCHAS GRACIAS!