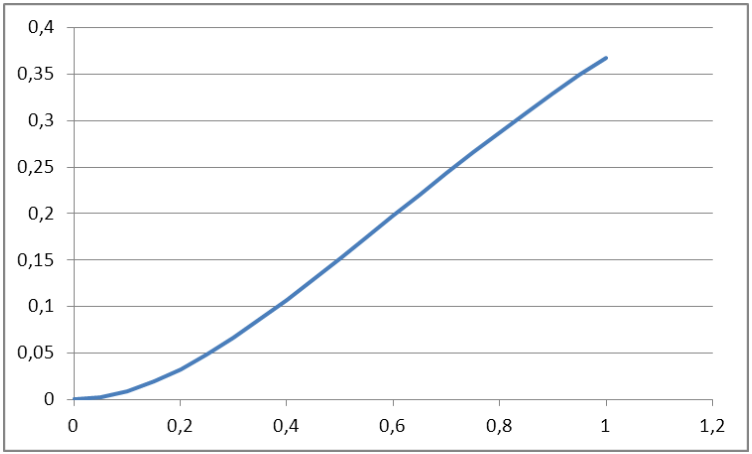
Clase práctica – Integración numérica

Existen integrales muy difíciles o imposibles de resolver analíticamente

Nodos equiespaciados	Trapecios Simpson Newton – Cotes (generalización) Método de Romberg = Trapecios + Extrapolación Richardson
Nodos no equiespaciados	Cuadratura de Gauss

Ejercicio: resolver $I = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$



Contamos con la solución analítica: $I = 2 - 5e^{-1} \cong 0{,}16060279 \ldots$

Newton – Cotes

Idea de Newton – Cotes: Tomar el dominio en el cual se quiere integrar
Separarlo en *n* intervalos iguales (*n*+1 nodos)
Interpolar esos datos con un polinomio de grado *n*: $P_n(x)$
Integrar analíticamente dicho polinomio

Método	Expresión local	Orden		Integra exacto hasta polinomios de grado…
		Local	Comp	
Trapecios (*n*=1)	$I = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$	3	2	1
Simpson (*n*=2)	$I = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi)$	5	4	3
Simpson 3/8	$I = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{IV}(\xi)$	5	4	3
n=4	$I = \cdots - \frac{8h^7}{945} f^{VI}(\xi)$	7	6	5
Newton – Cotes	$I = \cdots + \frac{1}{n+1!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\, f^{n+1}(\xi) dx$			Si *n* es impar: *n* Si *n* es par: *n*+1

Los errores son de truncamiento, no de redondeo.

Que el método sea de orden 2 significa que, si disminuyo el paso a la mitad, el error disminuye a la cuarta parte.

Regla del trapecio: $I_t = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) = \frac{1}{2}(0e^0 + 1^2 e^{-1}) = 0{,}18393972 \ldots$

Cota del error: $err_t < \frac{h^3}{12}|f''(\xi)|$

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$
$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$
$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$

$\max\limits_{0<x<1} |f''(\xi)| = 2$, luego: $err_t < \frac{1^3}{12}|2| \cong 0.17$

Error real: $err_t = |I_t - I| = 0.023$

Regla de Simpson: $I_s = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{1}{2.3}(0e^0 + 4.\,0{,}5^2 e^{-0{,}5} + 1^2 e^{-1}) = 0{,}16240168\ldots$

Cota del error: $err_s < \frac{h^5}{90}|f^{IV}(\xi)|$

$$f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$
$$f'''(x) = (-4 + 2x)e^{-x} - (2 - 4x + x^2)e^{-x} = (-6 + 6x - x^2)e^{-x}$$
$$f^{IV}(x) = (6 - 2x)e^{-x} - (-6 + 6x - x^2)e^{-x} = (12 - 8x + x^2)e^{-x}$$

$\max\limits_{0<x<1}|f^{IV}(\xi)| = 12$, luego: $err_s < \frac{0{,}5^5}{90}|12| \cong 0.0042$

Error real: $err_s = |I_s - I| = 0.0018$

Extrapolación de Richardson

Supongamos que tenemos un método de orden 1: al disminuir el paso a la mitad, el error disminuye a la mitad:

Si con paso h, obtengo *I* = 10.50 (hasta aquí no podría estimar el error)
Y con paso h/2 obtengo *I* = 10.25

Entonces yo podría inferir que el error es aprox 0.25 y mi integral vale *I* = 10.

Generalizando, si $h_1 < h_2$: $I_{Rich} = I(h_1) + \frac{I(h_1)-I(h_2)}{(h_2/h_1)^p - 1} + O(h^r)$, siendo p el orden del método y $r > p$.

Método de Romberg: Trapecios compuesta + Extrapolación de Richardson

Ya calculamos: $I_{t(h=1)} = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) = 0{,}18393972\ldots$

Ahora calculo: $I_{t(h=0,5)} = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) = 0{,}16778619\ldots$

Extrapolación: $I_r = I_{t(h=1)} + \frac{I_t(h=1) - I_t(h=0,5)}{\left(\frac{0,5}{1}\right)^2 - 1} = 0{,}16240168\ldots = I_{s(h=0,5)}$ (igual que Simpson)

Luego, podría seguir extrapolando:

Trapecios, O(2)	Simpson, O(4)	Romberg 3, O(6)	Romberg 4, O(8)
$I_{r1,1} = I_{t\,(h)} = 0{,}18393972$			
$I_{r2,1} = I_{t\,(h/2)} = 0{,}16778619$	$I_{r2,2} = I_{s\,(h/2)} = 0.16240168$		
$I_{r3,1} = I_{t\,(h/4)} = 0{,}16248841$	$I_{r3,2} = I_{s\,(h/4)} = 0.16072248$	$I_{r3,3} = 0.16061053$	
$I_{r4,1} = I_{t\,(h/8)} = 0{,}16107990$	$I_{r4,2} = I_{s\,(h/8)} = 0.16061039$	$I_{r4,3} = 0.16060292$	$I_{r4,4} = 0.16060280$

Cuadratura de Gauss

Utiliza polinomios de grado bajo, pero elige estratégicamente los puntos donde se evalúa el integrando (no equiespaciados). Usando n+1 nodos, integra exactamente hasta polinomios de grado 2n+1.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi(u)du \cong \sum_{i=0}^{n} C_i\, \varphi(u_i)$$

donde

u_i Puntos de Gauss: ceros de polinomios de Legendre $P_n(u)$

$P_n(u)$ Polinomios de Legendre:

$$P_0(u) = 1\ ;\ P_1(u) = u\ ;\ P_n(u) = \frac{1}{n}[(2n-1)uP_{n-1}(u) - (n-1)P_{n-2}(u)]$$

C_i Coeficientes de Gauss: se pueden calcular mediante: $C_i = \frac{2}{(1-u_i^2)\left(P'_m(u_i)\right)^2}$, con m=n+1

o mediante coeficientes indeterminados: $\int_{-1}^{1} \varphi(u)du = I \cong \sum_{i=0}^{n} C_i\, \varphi(u_i)$, eligiendo $\varphi(u)$ fáciles de integrar (1, x, x^2, etc), el resultado analítico I, y los u_i hallados antes.

$\varphi(u)$ Cambio de variable: $f(x)dx = \varphi(u)du = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}\right) du$

Aplicación al ejercicio

1° Cambio de variable

$$x = \frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\ ; dx = \frac{1}{2}du$$

$$f(x)dx = x^2e^{-x}dx = f\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\right)}du = \varphi(u)du$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x^2e^{-x}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\right)}du = \int_{-1}^1 \varphi(u)du$$

2° Determinación de puntos de Gauss: trabajemos con 2 puntos, o sea *n*=1

$P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1)$, luego $u_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (simétricos con respecto a *u*=0)

3° Determinación de los coeficientes de Gauss

a) Mediante la expresión: $C_i = \frac{2}{(1-u_i^2)\left(P_m'(u_i)\right)^2}$; $P_m'(u) = 3u$

$$C_0 = \frac{2}{\left(1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\frac{2}{3}\frac{9}{3}} = 1$$

$C_1 = \frac{2}{\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ (puntos de Gauss simétricos tienen iguales coeficientes)

b) Mediante coeficientes indeterminados:

$$\int_{-1}^{1} 1\, du = 2 \cong C_0\, \varphi(u_0) + C_1\, \varphi(u_1) = C_0\, 1 + C_1\, 1$$

$$\int_{-1}^{1} u\, du = 0 \cong C_0\, \varphi(u_0) + C_1\, \varphi(u_1) = -C_0\, \frac{1}{\sqrt{3}} + C_1\, \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Son 2 ec, 2 inc: $C_0 = 1$; $C_1 = 1$

4° Resolución de la integral

$$\int_{-1}^{1} \varphi(u)\, du \cong C_0\, \varphi(u_0) + C_1\, \varphi(u_1) = 1\,\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)} + 1\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)} = 0{,}15941043\ldots$$

Error: $err_g = \left|I_g - I\right| = 0.0012$

Los pasos 2° y 3° no dependen de la integral sino sólo de la cantidad de puntos/coeficientes de Gauss:

Cantidad de puntos *m*	Coeficientes de Gauss	Puntos de Gauss
1	2	0
2	1	$\pm\sqrt{1/3}$
3	$8/9$ $5/9$	0 $\pm\sqrt{3/5}$
4	$\left(18+\sqrt{30}\right)/36$ $\left(18-\sqrt{30}\right)/36$	$\pm\sqrt{\left(3-2\sqrt{6/5}\right)/7}$ $\pm\sqrt{\left(3+2\sqrt{6/5}\right)/7}$
5	$128/225$ $\left(322+13\sqrt{70}\right)/900$ $\left(322-13\sqrt{70}\right)/900$	0 $\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$ $\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{10/7}}$

De todas formas, se puede pedir que calculen puntos / coeficientes.