ECUACIONES NO LINEALES – Primera Parte

Autor: Alderete, Iván Martín

En general, cuando se intentan resolver ecuaciones no lineales, uno se encuentra obligado a utilizar métodos aproximados debido a que puede llegar a ser complejo el despeje de la ecuación $f(x) = 0$.

Los métodos de resolución de ecuaciones no lineales (ENL) pueden clasificarse en dos grupos: métodos de arranque o de convergencia.

1. MÉTODOS DE ARRANQUE:

Es necesario conocer un intervalo $[a, b]$ en el cual se sabe con certeza la existencia de una raíz. Para asegurarlo, se recurre al teorema de Bolzano, visto en cursos anteriores de Análisis Matemático. En particular, si decimos que $x = c$ es raíz de una función $f(x)$, es decir $f(x) = 0$, se necesita que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos contrarios.

El ejemplo para repasar los distintos métodos de arranque:

Hallar la raíz de $f(x) = 2x - e^{-x}$ con un error absoluto menor a 0.02.

a. BISECCIÓN:

En primera instancia necesitamos conocer el intervalo en el cual se encuentra la raíz. Haciendo un análisis de la derivada primera de f podemos encontrar que ésta es positiva para todo x, por lo que la función es monótona creciente. Esto indica que, si la función tiene una raíz, ésta es única en todo su dominio. Evaluando a la función en distintos valores nos encontramos con lo siguiente:

x	$f(x)$
0	-1
1	$2 - e^{-1} \sim 1.63212 \ldots > 0$

Podemos decir entonces, que la raíz de f se encuentra en el intervalo $I_0 = [0; 1]$. Ahora, al método numérico.

El método de bisección comienza utilizando el punto medio al intervalo en el cual se encuentra la raíz, $m_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, y evalúa el signo de $f(m_1)$. Si este coincide con el de $f(a_0)$, implica que la raíz buscada se encuentra en el intervalo $[m_1, b_0]$. En caso de coincidir con el signo de $f(b_0)$, el intervalo se reduce a $[a_0, m_1]$.

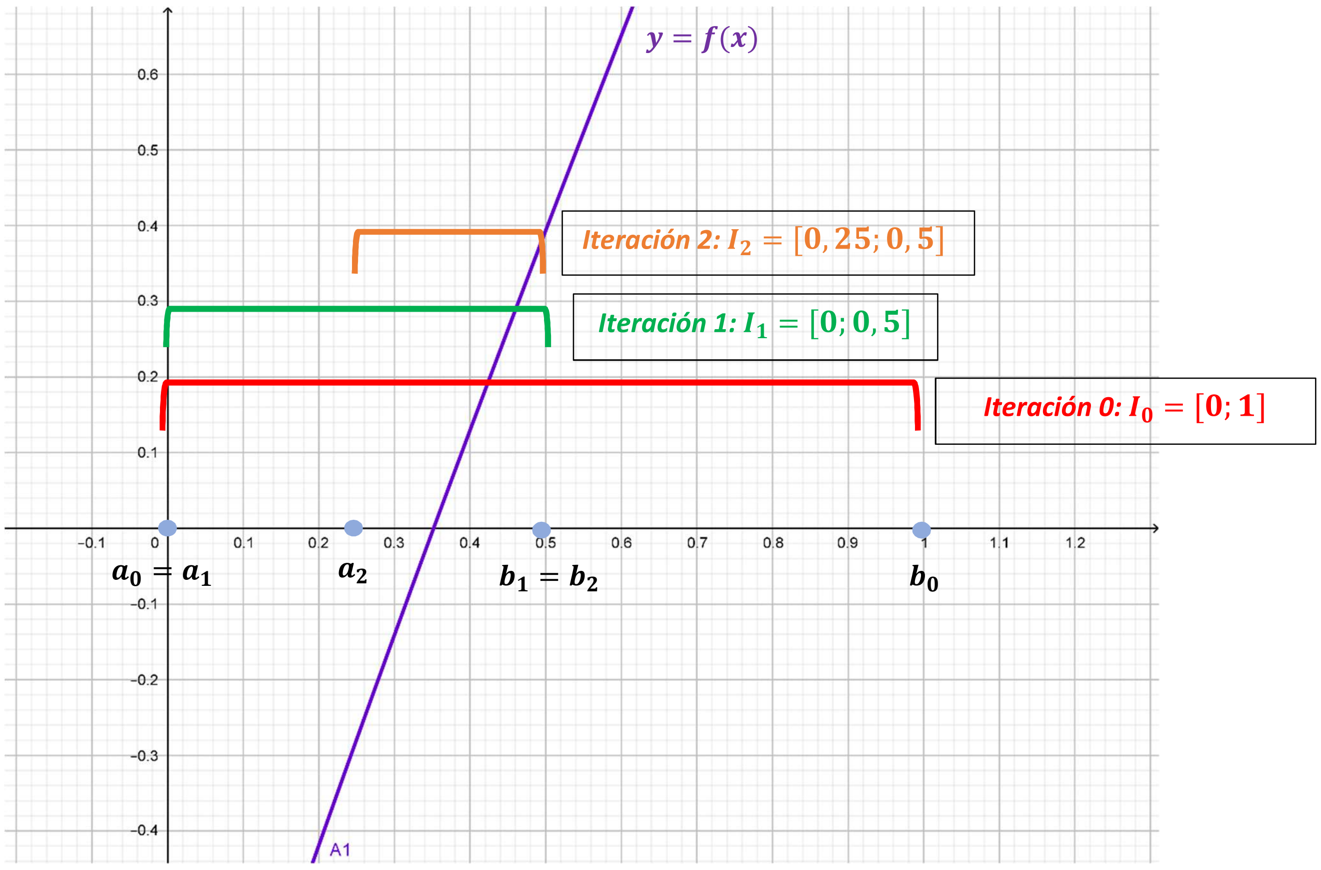

FIGURA 1 – Gráfica de f y esquema del método de bisección

Para este caso particular conviene elaborar una tabla como la siguiente:

k	a_k	b_k	$S(f(a_k))$	$S(f(b_k))$	m_{k+1}	$S(f(m_{k+1}))$	$\varepsilon_k = \Delta x$
0	0	1	-	+	0,5	+	0,5
1	0	0,5	-	+	0,25	-	0,25
2	0,25	0,5	-	+	0,375	+	0,125
3	0,25	0,375	-	+	0,3125	-	0,0625
4	0,3125	0,375	-	+	0,34375	-	0,03125
5	0,34375	0,375	-	+	0,015625	-	0,015625

En donde $S(f(x_k))$ es el signo de la función f evaluada en x_k, y ε_k es el error absoluto en la iteración k que se calcula como como la diferencia positiva entre dos iteraciones consecutivas: $\varepsilon_k = m_{k+1} - m_k$. También, y para este método en particular, se puede calcular como la diferencia positiva entre los extremos del intervalo dividido entre dos; es decir: $\varepsilon_k = \frac{b_k - a_k}{2}$.

Como la raíz encontrada no es exacta, es necesario recurrir a la notación aprendida en las primeras clases de errores. La expresión correcta de la raíz de la función será:

$$\boldsymbol{x = 0,34 \pm 0,02}$$

Una característica de este método es que fijando el error que uno desea se puede calcular la cantidad de iteraciones necesarias para el método según la inecuación:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n \geq \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)$$

Y podemos verificar que $n = 6$ es el mínimo número de iteraciones para el error que se nos pide (tener en cuenta que $k = 0$ es la primera iteración). Notar que este cálculo es independiente de la función a analizar, solo hay que asegurarse que el intervalo tomado contenga a la raíz que se busca.

b. REGULA-FALSI:

El método, al igual que el anterior, construye una sucesión de intervalos que contienen a la raíz, pero utiliza la forma de la función para acercarse más rápido al valor deseado.

Para cada par a_k y b_k, el punto m_{k+1} será la intersección del eje x con la recta que une a los puntos $(a_k;\ f(a_k))$ y $(b_k; f(b_k))$. Es decir:

$$\boldsymbol{m_{k+1} = a_k - (b_k - a_k)\frac{f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}}$$

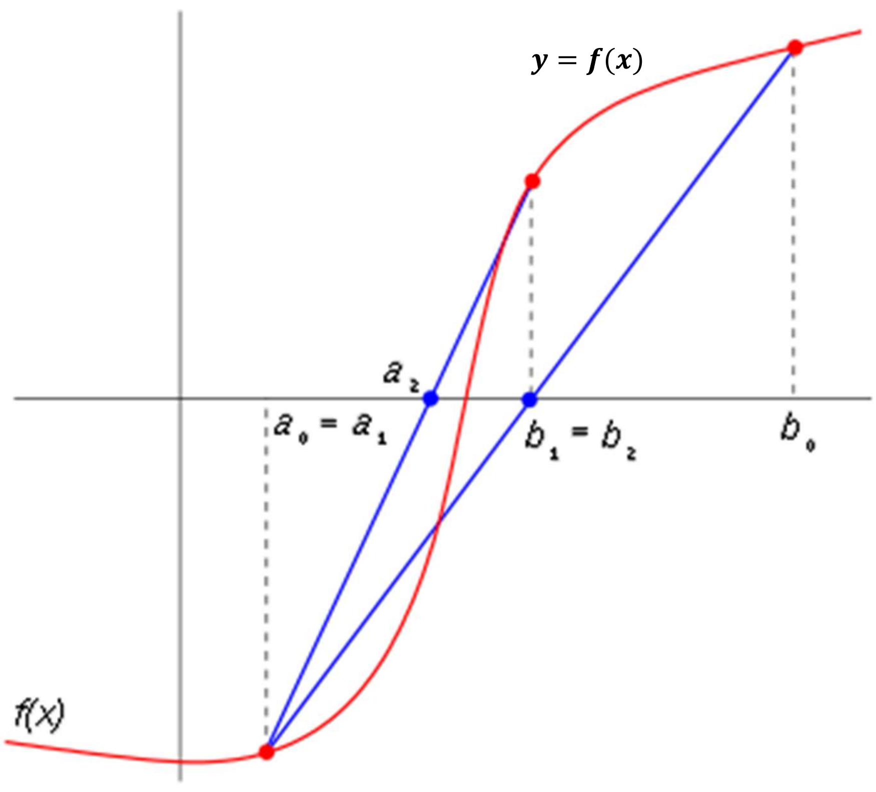

FIGURA 2 –Esquema del método regula-falsi

El esquema anterior no grafica a la función del problema. Su gráfica complica los fines didácticos y de buen entendimiento del método, dado a que las rectas se superponen con la misma gráfica.

Una vez hallado m_{k+1}, el criterio para elegir los extremos es el mismo que para bisección. Para calcular el error absoluto, se tiene en cuenta la diferencia positiva entre dos iteraciones consecutivas, por lo que para la primera iteración no se calcula. Para este método conviene formular la siguiente tabla:

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	$f(m_{k+1})$	$\varepsilon_k = \Delta x$
0	0	1	-1	1,6321	0,37992	0,075928	-
1	0	0,37992	-1	0,075928	0,35311	0,0037177	0,026810
2	0	0,35311	-1	0,0037177	0,35180	0,00018490	0,0013100
3	0	0,35180	-1	0,00017921	0,35174	0,000008797	0,0000600

Para $k = 2$ ya se cumple la restricción impuesta, por lo que la expresión correcta de la raíz de la función sera:

$$x = 0,352 \ \pm 0,002$$

2. MÉTODOS DE CONVERGENCIA (Parte 1):

Los métodos de convergencia requieren verificar su convergencia. Veamos qué ocurre con el primer método de este tipo (punto fijo) para el problema planteado. Definamos la función $g(x) = x - f(x)$ y el intervalo $I = [0; 1]$ en el cual sabemos que se encuentra la raíz buscada, y analicemos las condiciones de convergencia y unicidad a partir del gráfico:

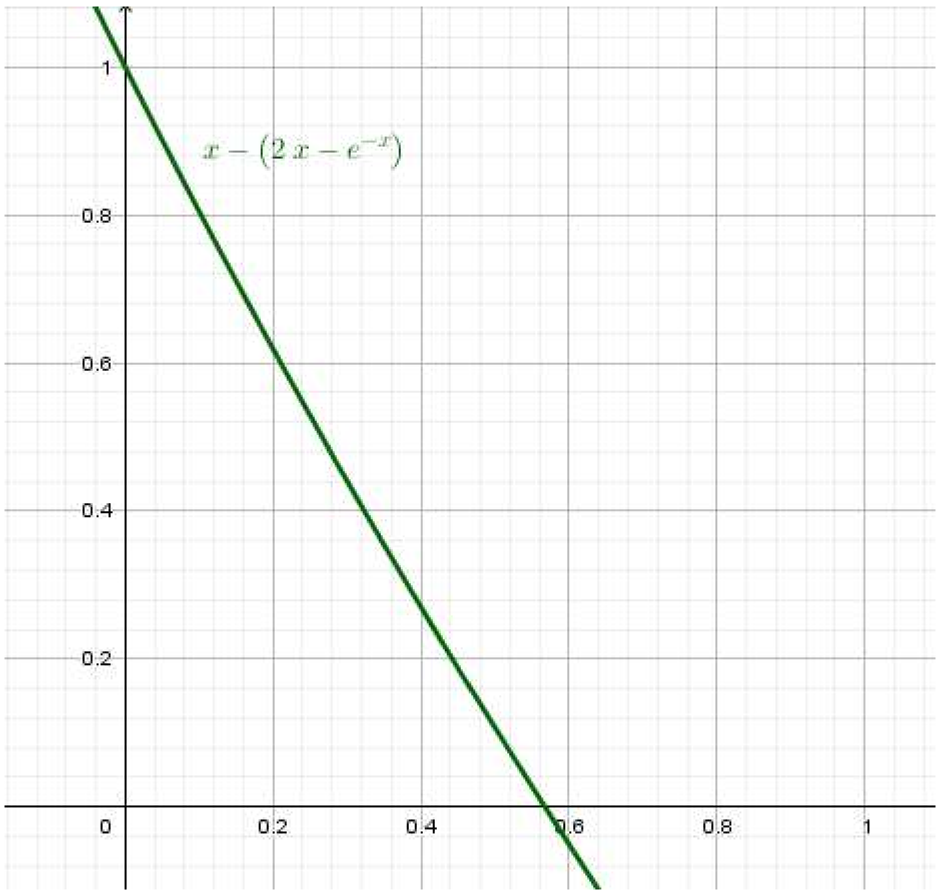

FIGURA 3 – Gráfica de g en el intervalo $I = [0; 1]$

Como se puede visualizar, no se cumple que $g(I) \subset I$. Notar que, por ejemplo, $f(0,6)$ es un valor negativo. ¿Y si achicamos el intervalo? Por ejemplo, a $[0,25;\ 0,5]$, ya que sabemos por el método de bisección que la raíz se encuentra en este intervalo. Pero evaluando en $0,25$ tenemos que $f(0,25) = 0,5288 \ldots$ Conclusión: En ninguno de estos intervalos podemos asegurar la condición de existencia del punto fijo. Esto no implica que no exista un punto fijo, sino que no podemos asegurarlo. Por este motivo, propongo que trabajemos con otro ejemplo.

El ejemplo para repasar los distintos métodos iterativos será:

Hallar la raíz de $f(x) = \frac{x^2}{4} - sen(x)$ en el intervalo [1,5; 2] con un error absoluto menor a 0,02.

a. PUNTO FIJO:

Como vimos antes se define la función $g(x) = x - f(x)$ y se reemplaza la ecuación original $f(x) = 0$ por $g(x) = x$ de manera tal que la solución sea la misma en ambos casos. Por lo cual, el problema se reduce a encontrar puntos fijos de la función g, es decir los valores r tal que $g(r) = r$. Se elije un x_0 conveniente, y luego se toma:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Para el problema planteado, conviene probar las condiciones para la función definida como:

$$g(x) = x - \frac{x^2}{4} + sen(x)$$

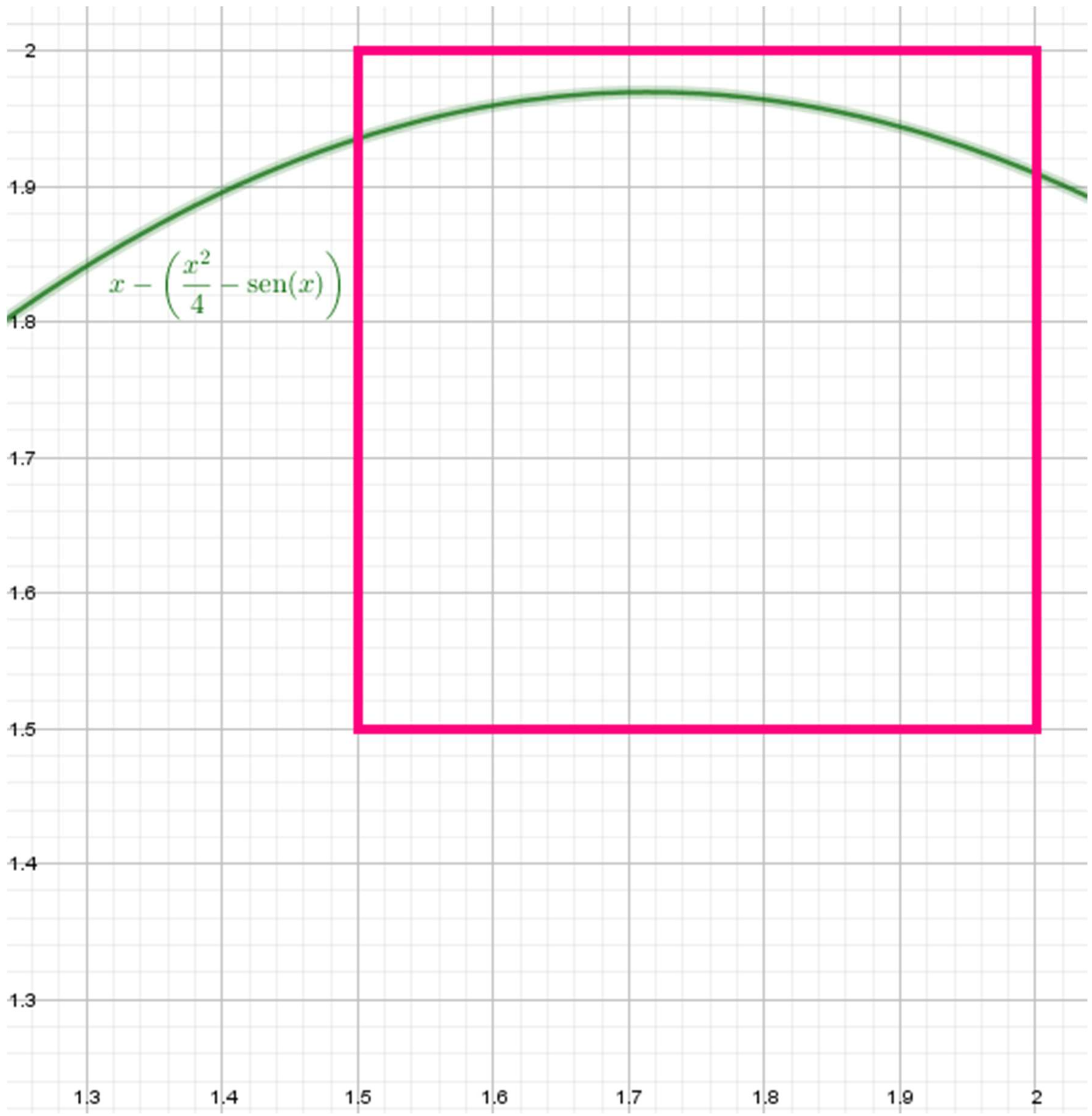

FIGURA 3 – Gráfica de g en el intervalo I = [1,5; 2]

¿Se ve que $g(I) \subset I$, siendo $I = [1{,}5;\ 2]$? Esto está representado en el cuadrado rosa. Por lo tanto, la existencia está probada. ¿Y la unicidad? Hagamos algunos cálculos y análisis.

Tenemos que la derivada de g es $g'(x) = 1 - \frac{x}{2} + cos(x)$, decreciente en el intervalo I. Por lo cual el máximo de $|g'(x)|$ se encuentra en uno de los extremos de I

$$|g'(1{,}5)| \cong 0{,}3207 < 1$$

$$|g'(2)| \cong |-0{,}4161| = 0{,}4161 < 1$$

Luego, se cumple la condición de unicidad del punto fijo en el intervalo $I = [1{,}5;\ 2]$.

La parte iterativa la puedo empezar en cualquier punto del intervalo anterior. Por lo tanto, elijo empezar con $x_0 = 1{,}75$. Y la mecánica es la siguiente: definido x_0, calculo $x_1 = g(x_0)$, luego $x_2 = g(x_1)$, y así hasta cumplir la restricción marcada por el error absoluto, que también se calcula como la diferencia en módulo entre dos iteraciones sucesivas. La tabla iterativa en este caso será:

n	x_n	x_{n+1}	ε_n
0	1,75	1,96831	0,21831
1	1,96831	1,92178	0,04653
2	1,92178	1,93751	0,01573

Expresión de la raíz de la función:

$$\boldsymbol{x = 1,94 \ \pm 0,02}$$

3. ÓRDENES DE CONVERGENCIA (Parte 1):

En general, se puede definir que un método posee un orden de convergencia p si cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^P} = \lambda$$

Donde λ es la constante asintótica del error, ε_{n+1} y ε_n son los errores absolutos en las iteraciones $n+1$ y n, respectivamente. También se puede escribir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^P} = \lambda$$

Tomando valores de n muy grandes y a partir de las ecuaciones anteriores:

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^P} = \lambda = \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^P}$$

Aplicando logaritmos en ambos lados de la igualdad anterior se puede encontrar la siguiente expresión para el orden de convergencia de un método numérico:

$$\boldsymbol{p = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right)}{\ln\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right)}}$$

Para cada uno de los métodos anteriores se encuentran los siguientes valores de p:

Método	Orden de convergencia
BISECCIÓN	Lineal ($p = 1$)
REGULA FALSI	Lineal ($p = 1$)
PUNTO FIJO	Lineal ($p = 1$)

Esta última tabla muestra valores teóricos obtenidos a partir del límite. Con los resultados de los ejercicios anteriores, se los pueden calcular de manera experimental. Para bisección, utilizamos los errores en las últimas 3 iteraciones:

$$p = \frac{\ln\left(\frac{0{,}015625}{0{,}03125}\right)}{\ln\left(\frac{0{,}03125}{0{,}0625}\right)}$$

$$p = 1$$

Coincide con el experimental. ¿Esto ocurrirá en todos los casos? Les propongo calcular el resto de los órdenes de convergencia (Regula Falsi y Punto Fijo), y los vamos a comparar con el resto de los métodos en la segunda parte. También propongo calcular las constantes asintóticas del error