**Sistemas de ecuaciones lineales – Resolución directa**

SEL | Resol directa: sin error de truncamiento. Gauss, Kramer, Jordan.
Resol iterativa: con error de truncamiento. Jacobi, Gauss-Seidel, SOR.

Problema 8) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.22 \\ -3.56 \\ -0.972 \end{bmatrix}$$

Utilizar eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Hallar la descomposición $LU$ de la matriz de coeficientes y utilizarla para hallar una estimación del error de redondeo, refinando la solución. Utilizar aritmética de punto flotante con 3 dígitos.

Vamos a resolverlo 1° sin pivoteo, 2° con pivoteo parcial, 3° con pivoteo total.

Llamamos: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$, quiero factorizar a $A$ en $L$ (triang inf) y $U$ (triang sup).

**1° sin pivoteo**

Sistema a resolver: $\left[\begin{array}{ccc:c} 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 & -0.972 \end{array}\right]$

| Operación | Matriz | Cálculo alternativo |
|---|---|---|
| $f_2 \leftarrow f_2 - m_{21} f_1$ con $m_{21} = \frac{a21}{a11}$ <br> $f_3 \leftarrow f_3 - m_{31} f_1$ con $m_{31} = \frac{a31}{a11}$ | $\left[\begin{array}{ccc:c} 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ [-1.92] & 0.516 & -2.18 & -1.22 \\ [0.470] & 1.31 & -2.64 & -1.55 \end{array}\right]$ | $E_1 \cdot A$ con: <br> $E1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.92 & 1 & 0 \\ -0.470 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $f_3 \leftarrow f_3 - m_{32} f_2$ con $m_{32} = \frac{a32}{a22}$ | $\left[\begin{array}{ccc:c} 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ [-1.92] & 0.516 & -2.18 & -1.22 \\ [0.470] & [2.54] & 2.90 & 1.55 \end{array}\right]$ | $E_2 \cdot E_1 \cdot A$ con: <br> $E2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2.54 & 1 \end{bmatrix}$ |

Por Gauss $E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \quad ; \quad E_2 \cdot E_1 \cdot b = y$

Paso de término $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot U = L \cdot U$ (factoricé) ; $b = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot y = L \cdot y$

Tenía SEL $A \cdot x = b$

Reemplazo $L \cdot U \cdot x = b$

Resolvemos $L \cdot y = b$ sustit directa

$U \cdot x = y$ sustit inversa

¿Cómo quedan estas matrices?

$$U = \begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ 0 & 0.516 & -2.18 \\ 0 & 0 & 2.90 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.92 & 1 & 0 \\ 0.470 & 2.54 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1.22 \\ -1.22 \\ 1.55 \end{bmatrix}$$

$L \cdot y = b$: (si ya factoricé con $A$ extendida, no hace falta calcular $y$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.92 & 1 & 0 \\ 0.470 & 2.54 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.22 \\ -3.56 \\ -0.972 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 1.22 \\ y_2 = -3.56 + 1.92 * y_1 = -1.22 \\ y_3 = -0.972 - 0.470 * y_1 - 2.54 * y_2 = 1.55 \end{cases}$$

$U \cdot x = y:$

$$\begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ 0 & 0.516 & -2.18 \\ 0 & 0 & 2.90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.22 \\ -1.22 \\ 1.55 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = (1.22 + 0.924 * x_2 + 1.29 * x_3) / 2.15 = 0.841 \\ x_2 = (-1.22 + 2.18 * x_3) / 0.516 = -0.108 \\ x_3 = 1.55 / 2.90 = 0.534 \end{cases}$$

Solución sin pivoteo: $\begin{cases} x_1 = 0.841 \\ x_2 = -0.108 \\ x_3 = 0.534 \end{cases}$

## 2° con pivoteo parcial: permutación de filas

Multiplicador: $m_{ij} = a_{ij} / a_{jj}$ . Si el denominador (pivote) es pequeño → cancelación de términos. Busco pivotes lo más grandes posibles intercambiando filas → permuta el término indep.

Sistema a resolver: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 & -0.972 \end{array}\right]$

| Operación | Matriz | Cálculo alternativo |
| --- | --- | --- |
| $f_1 \times f_2$ | $\left[\begin{array}{ccc\|c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 & -0.972 \end{array}\right]$ | $P_{12} \cdot A$ con: $P12 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $f_2 \leftarrow f_2 - m_{21} f_1$ con $m_{21} = \frac{a21}{a11}$ <br> $f_3 \leftarrow f_3 - m_{31} f_1$ con $m_{31} = \frac{a31}{a11}$ | $\left[\begin{array}{ccc\|c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ [-0.522] & 0.271 & -1.14 & -0.638 \\ [-0.245] & 1.43 & -3.18 & -1.84 \end{array}\right]$ | $E_1 \cdot P_{12} \cdot A$ con: $E1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.522 & 1 & 0 \\ 0.245 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $f_2 \times f_3$ | $\left[\begin{array}{ccc\|c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ [-0.245] & 1.43 & -3.18 & -1.84 \\ [-0.522] & 0.271 & -1.14 & -0.638 \end{array}\right]$ | $P_{23} \cdot E_1 \cdot P_{12} \cdot A$ con: $P23 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ |

$$f_3 \leftarrow f_3 - m_{32} f_2 \text{ con } m_{32} = \frac{a32}{a22} \quad \left[\begin{array}{cccc} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ [-0.245] & 1.43 & -3.18 & -1.84 \\ [-0.522] & [0.190] & -0.536 & -0.288 \end{array}\right] \quad E_2 \cdot P_{23} \cdot E_1 \cdot P_{12} \cdot A \text{ con: } E2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.190 & 1 \end{bmatrix}$$

Por Gauss $E_2 \cdot P_{23} \cdot E_1 \cdot P_{12} \cdot A = U \;;\; E_2 \cdot P_{23} \cdot E_1 \cdot P_{12} \cdot b = y$

Agrego la identidad $E_2 \cdot P_{23} \cdot E_1 \cdot P_{23} \cdot P_{23}^{-1} \cdot P_{12} \cdot A = U$ pero $P_{23} = P_{23}^{-1}$

con lo cual $E_2 \cdot P_{23} \cdot E_1 \cdot P_{23} \cdot P_{23} \cdot P_{12} \cdot A = U$

Llamo $\tilde{E}_1 = P_{23} \cdot E_1 \cdot P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.245 & 1 & 0 \\ 0.522 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;;\; P_{23} \cdot P_{12} = P_F$

Reemplazo $E_2 \cdot \tilde{E}_1 \cdot P_F \cdot A = U$

Paso de término $P_F \cdot A = \tilde{E}_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot U = L \cdot U$ (factoricé)

Tenía SEL $A \cdot x = b$

Agrego permutac $P_F \cdot A \cdot x = P_F \cdot b = b_{PF}$

Reemplazo $L \cdot U \cdot x = b_{PF}$

Resuelvo $L \cdot y = b_{PF}$ sustit directa (si factoricé con $A$ ampliada, ya me queda $y$)

$U \cdot x = y$ sustit inversa

¿Cómo quedan estas matrices?

$$U = \begin{bmatrix} -4.12 & 2.29 & 0.294 \\ 0 & 1.43 & -3.18 \\ 0 & 0 & -0.536 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.245 & 1 & 0 \\ -0.522 & 0.190 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} -3.56 \\ -1.84 \\ -0.288 \end{bmatrix}$$

$L \cdot y = b_P$: (si ya factoricé con $A$ extendida, no hace falta calcular $y$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.245 & 1 & 0 \\ -0.520 & 0.187 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.56 \\ -0.972 \\ 1.22 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = -3.56 \\ y_2 = -0.972 + 0.245 * y_1 = -1.84 \\ y_3 = 1.22 + 0.520 * y_1 - 0.187 * y_2 = -0.288 \end{cases}$$

$U \cdot x = y$:

$$\begin{bmatrix} -4.12 & 2.29 & 0.294 \\ 0 & 1.43 & -3.18 \\ 0 & 0 & -0.536 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.56 \\ -1.84 \\ -0.288 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = (-3.56 - 2.29 * x_2 - 0.294 * x_3)/(-4.12) = 0.851 \\ x_2 = (-1.84 + 3.18 * x_3)/1.43 = -0.0925 \\ x_3 = -0.288/(-0.536) = 0.537 \end{cases}$$

Solución con pivoteo parcial: $\begin{cases} x_1 = 0.851 \\ x_2 = -0.0925 \\ x_3 = 0.537 \end{cases}$

**3° con pivoteo total: permutación de filas y columnas**

Nuevamente busco pivotes lo más grandes posibles, pero ahora puedo intercambiar también columnas → permuta el orden de incógnitas.

Sistema a resolver: $\left[\begin{array}{ccc:c} 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 & -0.972 \end{array}\right]$

| Operación | Matriz | Cálculo alternativo |
|---|---|---|
| $f_1 \times f_2$ | $\left[\begin{array}{ccc:c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 & -0.972 \end{array}\right]$ | $P_{12} \cdot A$ con: $P12 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $f_2 \leftarrow f_2 - m_{21} f_1$ con $m_{21} = \frac{a21}{a11}$<br>$f_3 \leftarrow f_3 - m_{31} f_1$ con $m_{31} = \frac{a31}{a11}$ | $\left[\begin{array}{ccc:c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ [-0.522] & 0.271 & -1.14 & -0.638 \\ [-0.245] & 1.43 & -3.18 & -1.84 \end{array}\right]$ | $E_1 \cdot P_{12} \cdot A$ con: $E1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.522 & 1 & 0 \\ 0.245 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $f_2 \times f_3$ | $\left[\begin{array}{ccc:c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ [-0.245] & 1.43 & -3.18 & -1.84 \\ [-0.522] & 0.271 & -1.14 & -0.638 \end{array}\right]$ | $P_{23} \cdot E_1 \cdot P_{12} \cdot A$ con: $P23 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $c_2 \times c_3$ | $\left[\begin{array}{ccc:c} -4.12 & 0.294 & 2.29 & -3.56 \\ [-0.245] & \boxed{-3.18} & 1.43 & -1.84 \\ [-0.522] & -1.14 & 0.271 & -0.638 \end{array}\right]$ | $P_{23}\cdot E_1\cdot P_{12}\cdot A\,\boxed{P_{23}}$ con: $P23=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ |
| $f_3 \leftarrow f_3 - m_{32} f_2$ con $m_{32}=\frac{a32}{a22}$ | $\left[\begin{array}{ccc:c} -4.12 & 0.294 & 2.29 & -3.56 \\ [-0.245] & -3.18 & 1.43 & -1.84 \\ [-0.522] & [0.358] & -0.241 & 0.0207 \end{array}\right]$ | $E_2\cdot P_{23}\cdot E_1\cdot P_{12}\cdot A\,\boxed{P_{23}}$ $E2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-0.358&1\end{bmatrix}$ |

Notable: haber intercambiado columnas eligiendo el mayor pivote no garantizó minimizar el multiplicador, dado que se obtiene una relación $a_{32}$ / $a_{22}$ menor si las columnas permaneciesen como estaban. Por ende, optar por pivoteo total en lugar de parcial, en este caso no significó ninguna mejora.

Por Gauss $\quad E_2\cdot P_{23}\cdot E_1\cdot P_{12}\cdot A\,\boxed{P_{23}}=U$

Agrego la identidad $\quad E_2\cdot P_{23}\cdot E_1\cdot P_{23}\cdot P_{23}^{-1}\cdot P_{12}\cdot A\cdot P_{23}=U$ pero $P_{23}^{-1}=P_{23}$

con lo cual $\quad E_2\cdot P_{23}\cdot E_1\cdot P_{23}\cdot P_{23}\cdot P_{12}\cdot A\cdot P_{23}=U$

Llamo $\quad \tilde{E}_1=P_{23}\cdot E_1\cdot P_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.245&1&0\\0.522&0&1\end{bmatrix}$ ; $P_{23}\cdot P_{12}=P_F$ ; $\boxed{P_{23}=P_C}$

Reemplazo $\quad E_2\cdot\tilde{E}_1\cdot P_F\cdot A\,\boxed{P_C}=U$

Paso de término $\quad P_F\cdot A\cdot P_C=\tilde{E}_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot U=L\cdot U$ (factoricé)

Tenía SEL $A \cdot x = b$

Agrego permutac $P_F \cdot A \cdot P_C^{-1} \cdot P_C \cdot x = P_F \cdot b$ pero $P_C^{-1} = P_C$

con lo cual $P_F \cdot A \cdot P_C \cdot P_C \cdot x = P_F \cdot b$

Llamo $P_C \cdot x = x_{PC}$ ; $P_F \cdot b = b_{PF}$

Reemplazo $L \cdot U \cdot x_{PC} = b_{PF}$

Resuelvo $L \cdot y = b_{PF}$ sustit directa (si factoricé con $A$ ampliada, ya me queda $y$)

$U \cdot \boxed{x_{PC}} = y$ sustit inversa

¿Cómo quedan estas matrices?

$$U = \begin{bmatrix} -4.12 & 0.294 & 2.29 \\ 0 & -3.18 & 1.43 \\ 0 & 0 & -0.241 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.245 & 1 & 0 \\ -0.522 & 0.358 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} -3.56 \\ -1.84 \\ 0.0207 \end{bmatrix}$$

$L \cdot y = b_{PF}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.245 & 1 & 0 \\ -0.522 & 0.358 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.56 \\ -0.972 \\ 1.22 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = -3.56 \\ y_2 = -0.972 + 0.245 * y_1 = -1.84 \\ y_3 = 1.22 + 0.522 * y_1 - 0.358 * y_2 = -0.0207 \end{cases}$$

$U \cdot x_{PC} = y:$

$$\begin{bmatrix} -4.12 & 0.294 & 2.29 \\ 0 & -3.18 & 1.43 \\ 0 & 0 & -0.241 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{PC1} \\ x_{PC2} \\ x_{PC3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.56 \\ -1.84 \\ 0.0207 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_{PC1} = (-3.56 - 0.294 * x_2 - 2.29 * x_3)/(-4.12) = 0.855 \\ x_{PC2} = (-1.84 - 1.43 * x_3)/(-3.18) = 0.540 \\ x_{PC3} = 0.0207/(-0.241) = -0.0859 \end{cases}$$

Solución con pivoteo total: $\begin{cases} x_1 = 0.855 \\ x_2 = -0.0859 \\ x_3 = 0.540 \end{cases}$

**4° solución "exacta" (t=16)**

$$\begin{cases} x_1 = 0.852 \\ x_2 = -0.0910 \\ x_3 = 0.539 \end{cases}$$

| Err rel | Sin piv | Piv parc | Piv total |
|---|---|---|---|
| $Rx_1$ | 1.3% | 0.1% | 0.4% |
| $Rx_2$ | 18.7% | 1.6% | 5.6% |
| $Rx_3$ | 1.0% | 0.4% | 0.1% |

**Refinamiento iterativo (aplico al caso sin pivoteo)**

Tengo el SEL $A \cdot x = b \longrightarrow b - A \cdot x = 0$

Pero $b - A \cdot \tilde{x} = r \neq 0$ (residuo)

Reemplazo $A \cdot x - A \cdot \tilde{x} = A \cdot \left(x - \tilde{x}\right) = A \cdot \delta\tilde{x} = r$ nuevo SEL

No hace falta resolver el SEL: para algo factoricé en $L$ y $U$ antes!

$$r = b - A \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.22 \\ -3.56 \\ -0.972 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.841 \\ -0.108 \\ 0.534 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000918 \\ -0.00476 \\ 0.00827 \end{bmatrix}$$

(calculo $r$ con doble precisión)

$$A \cdot \delta\tilde{x} = L \cdot U \cdot \delta\tilde{x} = r \text{ con } U \cdot \delta\tilde{x} = \delta y$$

$L \cdot \delta y = r$ : sustitución directa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.92 & 1 & 0 \\ 0.470 & 2.54 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \delta y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000918 \\ -0.00476 \\ 0.00827 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \delta y_1 = 0.00918 \\ \delta y_2 = -0.00476 + 1.92 * \delta y_1 = -0.00300 \\ \delta y_3 = 0.00827 - 0.470 * \delta y_1 - 2.54 * \delta y_2 = 0.0155 \end{cases}$$

$U \cdot \delta\tilde{x} = \delta y$ : sustitución inversa

$$\begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ 0 & 0.516 & -2.18 \\ 0 & 0 & 2.90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\tilde{x}_1 \\ \delta\tilde{x}_2 \\ \delta\tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00918 \\ -0.00300 \\ 0.0155 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \delta\tilde{x}_1 = (0.00918 + 0.924 * \delta\tilde{x}_2 + 1.29 * \delta\tilde{x}_3) / 2.15 = 0.0108 \\ \delta\tilde{x}_2 = (-0.00300 + 2.18 * \delta\tilde{x}_3) / 0.516 = 0.0168 \\ \delta\tilde{x}_3 = 0.0155 / 2.90 = 0.0535 \end{cases}$$

Solución refinada: $\begin{cases} \tilde{x}_1^{(1)} = \tilde{x}_1^{(0)} + \delta\tilde{x}_1^{(0)} = 0.852 \\ \tilde{x}_2^{(1)} = \tilde{x}_2^{(0)} + \delta\tilde{x}_2^{(0)} = -0.0914 \\ \tilde{x}_3^{(1)} = \tilde{x}_3^{(0)} + \delta\tilde{x}_3^{(0)} = 0.539 \end{cases}$

Estuvimos trabajando con precisión $t = 3$

Experimentalmente $\quad K(A) = \dfrac{\|\delta\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} 10^t \approx 20$ (se calcula sólo una vez)

Calculo $\quad p = \log_{10}(K(A)) \approx 1.3$

Dígitos de mejora $\quad q = t - p \approx 1.7$

O sea que en cada refinamiento mejoraría 1 ó 2 dígitos. ¿Hasta cuándo? Hasta que el residuo se haga tan chico que se confunda con 0.

Si $q < 0$ no vale la pena refinar.