

Resolución de ecuaciones no lineales: Método de Newton-Raphson

Análisis Numérico I / Métodos Matemáticos y Numéricos / Modelación Numérica

(75.12/95.04/95.13/CB051)

Problema a resolver

Un vehículo que se desplaza a 100km/h frena hasta detenerse. La velocidad de frenado está dada por la siguiente ecuación:

$$v(t) = v_0 e^{-k \cdot t} - \frac{F_{roz}}{m} t$$

- Encontrar el tiempo de frenado del vehículo utilizando el método de Newton Raphson.
- Analizar condiciones de convergencia del método.
- Alcanzar una solución con un error absoluto menor a 0,01s.

Problema a resolver: ecuación no lineal

$$v(t) = v_0 e^{-k \cdot t} - \frac{F_{roz}}{m} t$$

$$m = 1000kg \quad F_{roz} = 7840N$$

$$k = 0,1 \quad v_0 = 100 \frac{km}{h} \approx 27.8 \frac{m}{s}$$

$$v(t_f) = 0$$

$$27,8 \cdot e^{-0,1 \cdot t_f} - 7,840 \cdot t_f = 0$$

1 Método de Newton Raphson:

Esquema de iteración

Encontrar el tiempo de frenado de un vehículo utilizando el método de Newton Raphson.

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \rightarrow g(x) = x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)}$$

$$f(x) = 27,8 \cdot e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -2,78 \cdot e^{-0,1 \cdot x} - 7,840$$

$$g(x) = x - \frac{27,8e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x}{-2,78 \cdot e^{-0,1 \cdot x} - 7,840}$$

1.2 Método de Newton Raphson: Convergencia de $g(x)$

- Analizar condiciones de convergencia del método.

$$g(x) = x - \frac{27,8e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x}{-2,78 \cdot e^{-0,1 \cdot x} - 7,840}$$

$g(x) \in (a, b) \quad \forall x \in (a, b) \implies$ Existe al menos un PF

$\left| \frac{dg(x)}{dx} \right| < 1 \quad \forall x \in (a, b) \implies$ El PF es unico

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\exists f''(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

1.2 Método de Newton Raphson: Existencia de punto fijo

- Analizar condiciones de convergencia del método.

$$g(x) = x - \frac{27,8e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x}{-2,78 \cdot e^{-0,1 \cdot x} - 7,840}$$

¿ $g(x) \in (a, b) \quad \forall x \in (a, b)$? Propongo $I = (0, 10)$

1.2 Método de Newton Raphson: Existencia de punto fijo

$¿g(x) \in (a, b) \quad \forall x \in (a, b)?$

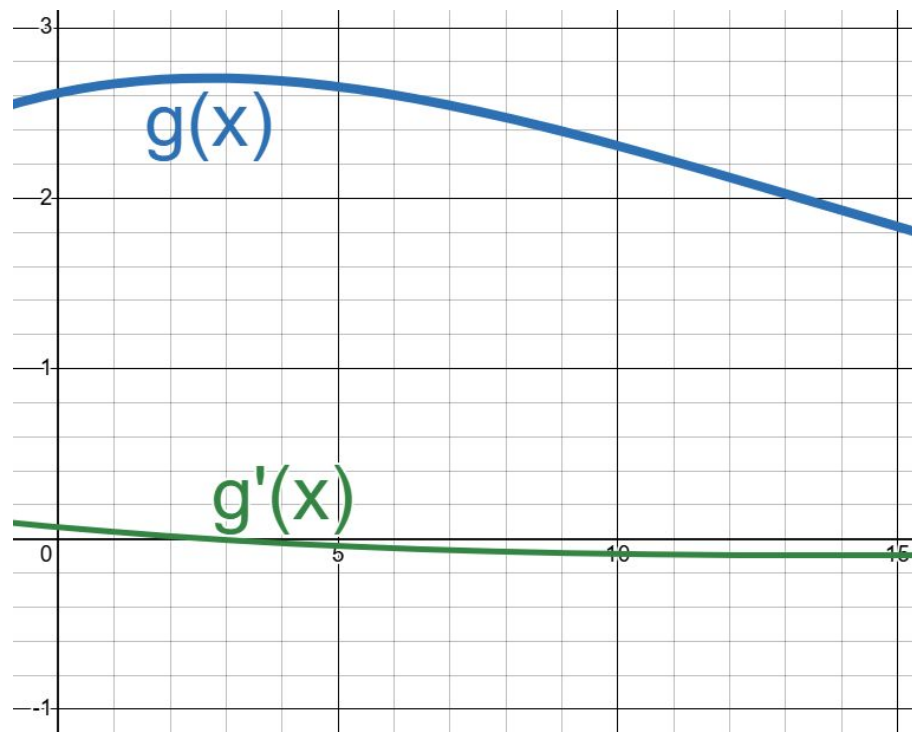
$I = (0, 10)$



1.2 Método de Newton Raphson: Unicidad del punto fijo

$$i \left| \frac{dg(x)}{dx} \right| < 1 \quad \forall x \in (a, b)?$$

$$I = (0, 10)$$



1.2 Método de Newton Raphson: Condiciones sobre $f(x)$

- Analizar condiciones de convergencia del método.

$$g(x) = x - \frac{27,8e^{-0.1 \cdot x} - 7,840 \cdot x}{-2,78 \cdot e^{-0,1 \cdot x} - 7,840}$$

$g(x) \in (a, b) \quad \forall x \in (a, b) \implies$ Existe al menos un PF

$\left| \frac{dg(x)}{dx} \right| < 1 \quad \forall x \in (a, b) \implies$ El PF es unico

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\exists f''(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

1.2 Método de Newton Raphson: Condiciones sobre $f(x)$

- Analizar condiciones de convergencia del método.

$$I = (0, 10)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &\neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \\ \exists f''(x) \quad \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

$$f'(x) = -2,78e^{-0.1 \cdot x} - 7,840$$

$$f''(x) = 0,278e^{-0.1 \cdot x}$$

1.3 Método de Newton Raphson: Primera iteración

- Alcanzar una solución con un error absoluto menor a 0,01s.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{27,8e^{-0,1 \cdot x^{(k)}} - 7,840 \cdot x^{(k)}}{-2,78 \cdot e^{-0,1 \cdot x^{(k)}} - 7,840}$$

$$k = 0 \quad x^{(0)} = 5 \quad t = 7 \quad e_{abs} < 0,01$$

$$x^{(1)} = 5 - \frac{27,8e^{-0,5} - 7,840 \cdot 5}{-2,78 \cdot e^{-0,5} - 7,840} = 2,655004$$

1.3 Método de Newton Raphson: Iteraciones

- Alcanzar una solución con un error absoluto menor a 0,01s.

k	$x^{(k)}$	e_{abs}	p
0	5	—	—
1	2,655040	2,34496	—
2	2,705389	0,050349	—
3	2,705416	$2,7 \times 10^{-05}$	1,96

1.3 Método de Newton Raphson: Orden de convergencia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x^{k+1} - x|}{|x^k - x|^p} = \lambda$$

El orden de convergencia es una medida que indica qué tan rápido converge un método.

$$p = \frac{\ln\left(\frac{\Delta x^{k+1}}{\Delta x^k}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta x^k}{\Delta x^{k-1}}\right)}$$

1.3 Método de Newton Raphson: Orden de convergencia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x^{k+1} - x|}{|x^k - x|^p} = \lambda$$

El orden de convergencia es una medida de qué tan rápido converge un método.

k	$\left \begin{array}{l} x^n - x \approx \lambda x^{n-1} - x ^p \\ x^{n+1} - x \approx \lambda x^n - x ^p = \lambda (\lambda x^{n-1} - x ^p) ^p \end{array} \right.$
n	
$n + 1$	

1.3 Método de Newton Raphson: Orden de convergencia

k	$x^{(k)}$	e_{abs}	p
0	5	—	—
1	2,655040	2,34496	—
2	2,705389	0,050349	—
3	2,705416	$2,7 \times 10^{-05}$	1,96

$$p = \frac{\ln\left(\frac{\Delta x^{k+1}}{\Delta x^k}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta x^k}{\Delta x^{k-1}}\right)}$$

$$p = \frac{\ln\left(\frac{2,7 \times 10^{-5}}{0,050}\right)}{\ln\left(\frac{0,050}{2,3}\right)} = 1,96$$

1.3 Método de Newton Raphson: Presentación del resultado

- Alcanzar una solución con un error absoluto menor a 0,01s.

k	$x^{(k)}$	e_{abs}	p
0	5	—	—
1	2,655040	2,34496	—
2	2,705389	0,050349	—
3	2,705416	$2,7 \times 10^{-05}$	1,96

$$x_{NR}^{(3)} = 2,70542 \pm 0,00003$$

2 Método de la secante: Esquema de iteración

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \rightarrow g(x) = x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \cdot \left(\frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \right)$$

2.1 Método de la secante: Primera iteración

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \cdot \left(\frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \right)$$

$$k = 1 \quad t = 7 \quad e_{abs} < 0,01$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)}) \cdot \left(\frac{x^{(1)} - x^{(0)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})} \right)$$

2.1 Método de la secante: Primera iteración

$$x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)}) \cdot \left(\frac{x^{(1)} - x^{(0)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})} \right)$$

Bisección
(p=1)

$$\longrightarrow I = (0, 10) \quad x^{(0)} = 5 \quad x^{(1)} = 2,5$$

$$f(x) = 27,8 \cdot e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x$$

$$x^{(2)} = 2,5 - f(2,5) \cdot \left(\frac{2,5 - 5}{f(2,5) - f(5)} \right) \approx 2,710203$$

2.1 Método de la secante: Iteraciones

k	$x^{(k)}$	e_{abs}	p
0	5	—	—
1	2, 5	2, 5	—
2	2, 710203	0, 210203	—
3	2, 705426	0, 004777	1, 528394

$$x_S^{(3)} = 2, 705 \pm 0, 005$$

3 Comparación entre métodos

$$x_S^{(3)} = 2,705 \pm 0,005$$

- $1 < p < 2$
- No calcula $f'(x)$
- No converge incondicionalmente

$$x_{NR}^{(3)} = 2,70542 \pm 0,00003$$

- $p=2$
- Requiere $f'(x)$
- No converge incondicionalmente

1.2 Método de Newton Raphson: Unicidad del punto fijo

$$i \left| \frac{dg(x)}{dx} \right| < 1 \quad \forall x \in (a, b)?$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-(27,8e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x)(0,278e^{-0,1 \cdot x})}{(0,278e^{-0,1 \cdot x} - 7,840)}$$

1.2 Método de Newton Raphson: Unicidad del punto fijo

$$i \left| \frac{dg(x)}{dx} \right| < 1 \quad \forall x \in (a, b)?$$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = -\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$f'(x) = -2,78e^{-0.1 \cdot x} - 7,840 \quad f''(x) = 0,278e^{-0.1 \cdot x}$$

$$g'(x) = \frac{-(27,8e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x)(0,278e^{-0,1 \cdot x})}{(0,278e^{-0,1 \cdot x} - 7,840)}$$

$g'(x)$ es **monotona decreciente** en $(0, 10)$

1.2 Método de Newton Raphson: Unicidad del punto fijo

$$i \left| \frac{dg(x)}{dx} \right| < 1 \quad \forall x \in (a, b)?$$

$$g'(x) = \frac{-(27,8e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x)(0,278e^{-0,1 \cdot x})}{(0,278e^{-0,1 \cdot x} - 7,840)}$$

$g'(x)$ es **monotona decreciente** en $(0, 10)$

$|g'(x)|$ alcanza su valor maximo en los extremos

$$|g'(0)| \approx 0,068 \quad |g'(10)| \approx 0,089$$

1.2 Método de Newton Raphson: Puntos críticos

- Analizar condiciones de convergencia del método.

$$g(x) = x - \frac{27,8e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x}{-2,78 \cdot e^{-0,1 \cdot x} - 7,840} \quad \text{Propongo } I = (0, 10)$$

Analizo la imagen de $g(x)$ optimizando la función en el intervalo propuesto

$$x/g'(x) = 0$$

Puntos críticos

$\rightarrow a$

b

1.2 Método de Newton Raphson: Derivada de $g(x)$

- Analizar condiciones de convergencia del método.

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

1.2 Método de Newton Raphson: Derivada de $g(x)$

- Analizar condiciones de convergencia del método.

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = -\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$f'(x) = -2,78e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \quad f''(x) = 0,278e^{-0,1 \cdot x}$$

$$g'(x) = \frac{-(27,8e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x)(0,278e^{-0,1 \cdot x})}{(0,278e^{-0,1 \cdot x} - 7,840)}$$

$$g'(x) = 0 \quad \text{solo para } x_f / f(x_f) = 0$$

1.2 Método de Newton Raphson: Puntos críticos

- Analizar condiciones de convergencia del método.

$$g(x) = x - \frac{27,8e^{-0,1 \cdot x} - 7,840 \cdot x}{-2,78 \cdot e^{-0,1 \cdot x} - 7,840} \quad \text{Propongo } I = (0, 10)$$

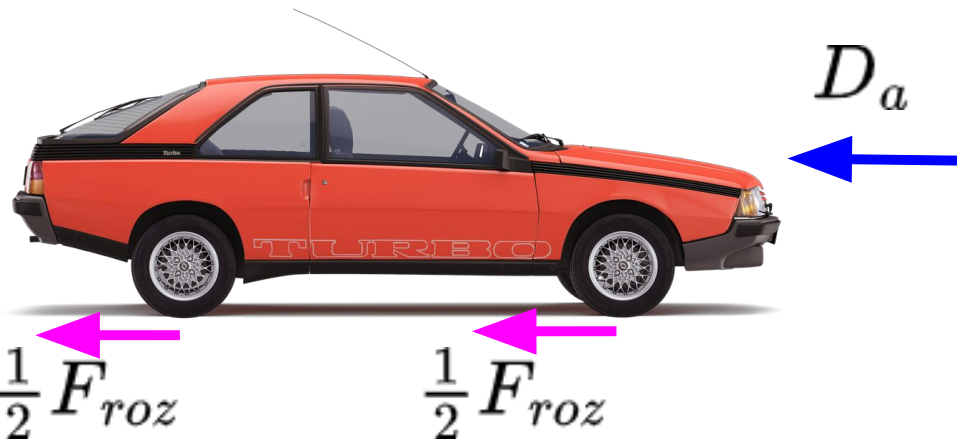
$$x/g'(x) = 0$$

Puntos críticos

→ a

b

Problema a resolver: modelo simplificado



$$\sum F_i = ma = -F_{roz} - D_a \approx -F_{roz} - kv$$

$$v(t) = v_0 e^{-k \cdot t} - \frac{F_{roz}}{m} t$$

Problema a resolver: modelo simplificado

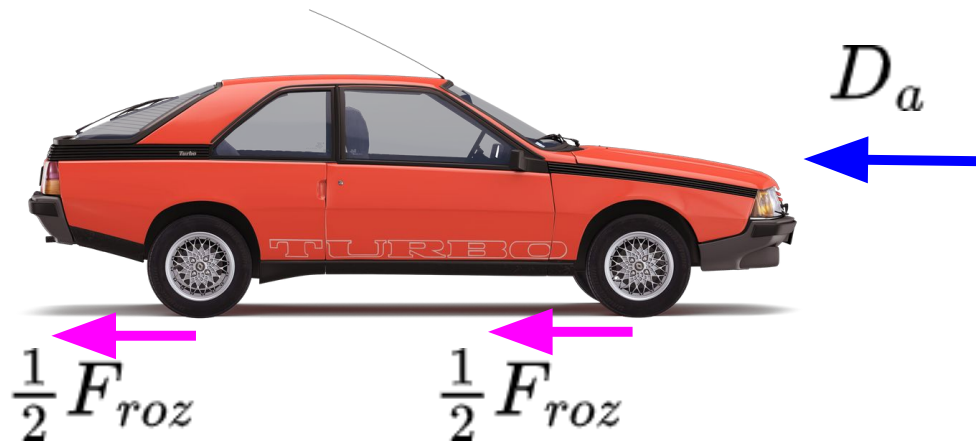
$$m = 1000kg$$

$$F_{roz} = 7840N$$

$$k = 0,1$$

$$v_0 = 100 \frac{km}{h} \approx 27.8 \frac{m}{s}$$

$$v_{t_f} = 0$$



$$v(t) = v_0 e^{-k \cdot t} - \frac{F_{roz}}{m} t$$

$$v(t_f) = 27,8 \cdot e^{-0,1 \cdot t_f} - \frac{7840}{1000} t_f = 0$$

