# Problemas de valores iniciales conservativos

Análisis numérico (75.12/95.04/95.12)

Facultad de ingeniería – Universidad de Buenos Aires

# Oscilador armónico

$$u'' + \omega^2 u = 0$$

Método de Newmark

$$u_{n+1} = u_n + h * u'_n + \frac{h^2}{4}(u''_n + u''_{n+1})$$

$$u'_{n+1} = u'_n + \frac{h}{2}(u''_n + u''_{n+1})$$

Explícito o implícito?
Paso simple o múltiple?

Discretización del problema

$$u_{n+1} = u_n + h * u'_n - \frac{h^2}{4}(\omega^2 u_n + \omega^2 u_{n+1})$$

$$u'_{n+1} = u'_n - \frac{h}{2}(\omega^2 u_n + \omega^2 u_{n+1})$$

EDO lineal o no lineal?

# Oscilador armónico

$$\boldsymbol{u}'' + \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{u} = 0$$

Como la ecuación diferencial es lineal, se puede transformar en un esquema explícito

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{n+1} &= [\,\boldsymbol{u}_n\left(1-\frac{\boldsymbol{h}^2\boldsymbol{\omega}^2}{4}\right)+\boldsymbol{u}'_n] * \left(1+\frac{\boldsymbol{h}^2\boldsymbol{\omega}^2}{4}\right)^{-1} \\ \boldsymbol{u}'_{n+1} &= \boldsymbol{u}'_n - \frac{\boldsymbol{h}}{2}(\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{u}_{n+1}) \end{aligned}}$$

Resuelvo con $u_0$, $u'_0$

Estabilidad?
Que paso h elijo?

# Otro ejemplo de oscilador armónico

$$\boldsymbol{u}'' + 40\,\boldsymbol{u} = 10 \quad , \qquad \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{u}(0) = 0\ ;\ \boldsymbol{u}'(0) = 0$$

Método de Newmark

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{u}'_n + \frac{\boldsymbol{h}^2}{4}(\boldsymbol{u}''_n + \boldsymbol{u}''_{n+1})$$

$$\boldsymbol{u}'_{n+1} = \boldsymbol{u}'_n + \frac{\boldsymbol{h}}{2}(\boldsymbol{u}''_n + \boldsymbol{u}''_{n+1})$$

Discretización del problema

EDO lineal o no lineal?

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{u}'_n + \frac{\boldsymbol{h}^2}{4}(10 - 40\boldsymbol{u}_n + 10 - 40\boldsymbol{u}_{n+1})$$

$$\boldsymbol{u}'_{n+1} = \boldsymbol{u}'_n + \frac{\boldsymbol{h}}{2}(10 - 40\boldsymbol{u}_n + 10 - 40\boldsymbol{u}_{n+1})$$

# Otro ejemplo de oscilador armónico

$$\boldsymbol{u}'' + 40\,\boldsymbol{u} = 10 \quad , \qquad \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{u}(0) = 0\,;\ \boldsymbol{u}'(0) = 0$$

Como la ecuación diferencial es lineal, se puede transformar en un esquema explícito

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{u}_n(1 - 10\,\boldsymbol{h}^2) + \boldsymbol{h}\,\boldsymbol{u'}_n + 5\,\boldsymbol{h}^2}{1 + 10\,\boldsymbol{h}^2}$$

$$\boldsymbol{u'}_{n+1} = \boldsymbol{u'}_n - 20\,\boldsymbol{h}\,\boldsymbol{u}_n - 20\,\boldsymbol{h}\,\boldsymbol{u}_{n+1} + 10\boldsymbol{h}$$

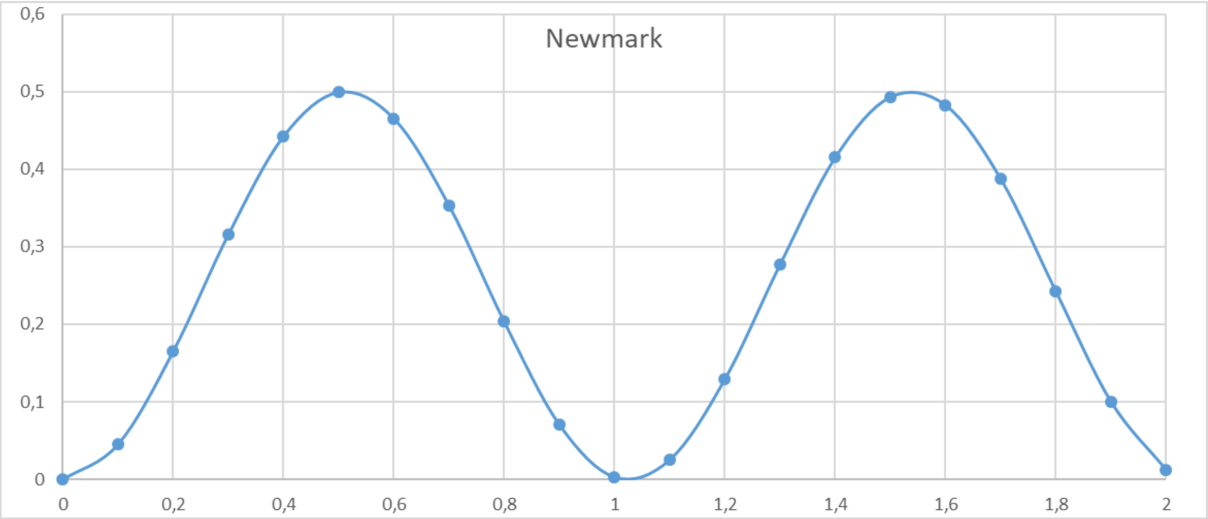
Resuelvo con $u_{0} = 0$, $u'_{0} = 0$

# Otro ejemplo de oscilador armónico

Newmark

$$u'' + 40\,u = 10 \quad , \qquad con\; u(0) = 0\;;\; u'(0) = 0$$

| n | tn | un | u'n |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,1 | 0,045455 | 0,909091 |
| 2 | 0,2 | 0,165289 | 1,487603 |
| 3 | 0,3 | 0,315928 | 1,525169 |
| 4 | 0,4 | 0,442593 | 1,008128 |
| 5 | 0,5 | 0,499224 | 0,124495 |
| 6 | 0,6 | 0,465228 | -0,804409 |
| 7 | 0,7 | 0,352968 | -1,440801 |
| 8 | 0,8 | 0,203264 | -1,553265 |
| 9 | 0,9 | 0,070556 | -1,100905 |
| 10 | 1 | 0,003100 | -0,248216 |
| 11 | 1,1 | 0,025426 | 0,694733 |
| 12 | 1,2 | 0,129415 | 1,385052 |
| 13 | 1,3 | 0,277253 | 1,571716 |
| 14 | 1,4 | 0,415181 | 1,186847 |
| 15 | 1,5 | 0,493044 | 0,370397 |
| 16 | 1,6 | 0,482526 | -0,580743 |
| 17 | 1,7 | 0,387454 | -1,320703 |
| 18 | 1,8 | 0,242398 | -1,580408 |
| 19 | 1,9 | 0,100107 | -1,265419 |
| 20 | 2 | 0,012322 | -0,490278 |




La amplitud se conserva

# Otro ejemplo de oscilador armónico

$$\boldsymbol{u}'' + 40\,\boldsymbol{u} = 10 \quad , \qquad \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{u}(0) = 0\ ;\ \boldsymbol{u}'(0) = 0$$

Método de Nystrom

$$\frac{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}+1} - 2\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}-1}}{\boldsymbol{h}^2} + 40\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}} = 10$$

Explícito o implícito?
Paso simple o múltiple?

$$\boxed{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}+1} = 10\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}(2 - 40\boldsymbol{h}^2) - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}-1}}$$

Con $\boldsymbol{u}(0) = 0\ ;\ \boldsymbol{u}'(0) = 0$
Puedo arrancar?

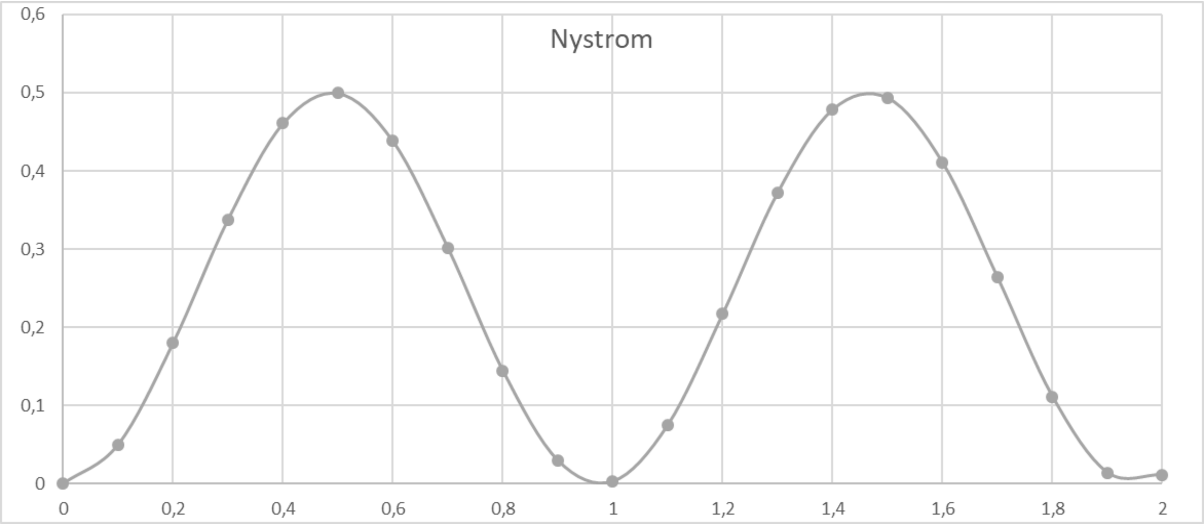
Estabilidad?
Que paso h elijo?

# Otro ejemplo de oscilador armónico

Nystrom

$$u'' + 40\,u = 10 \quad , \qquad con\; u(0) = 0\;;\; u'(0) = 0$$

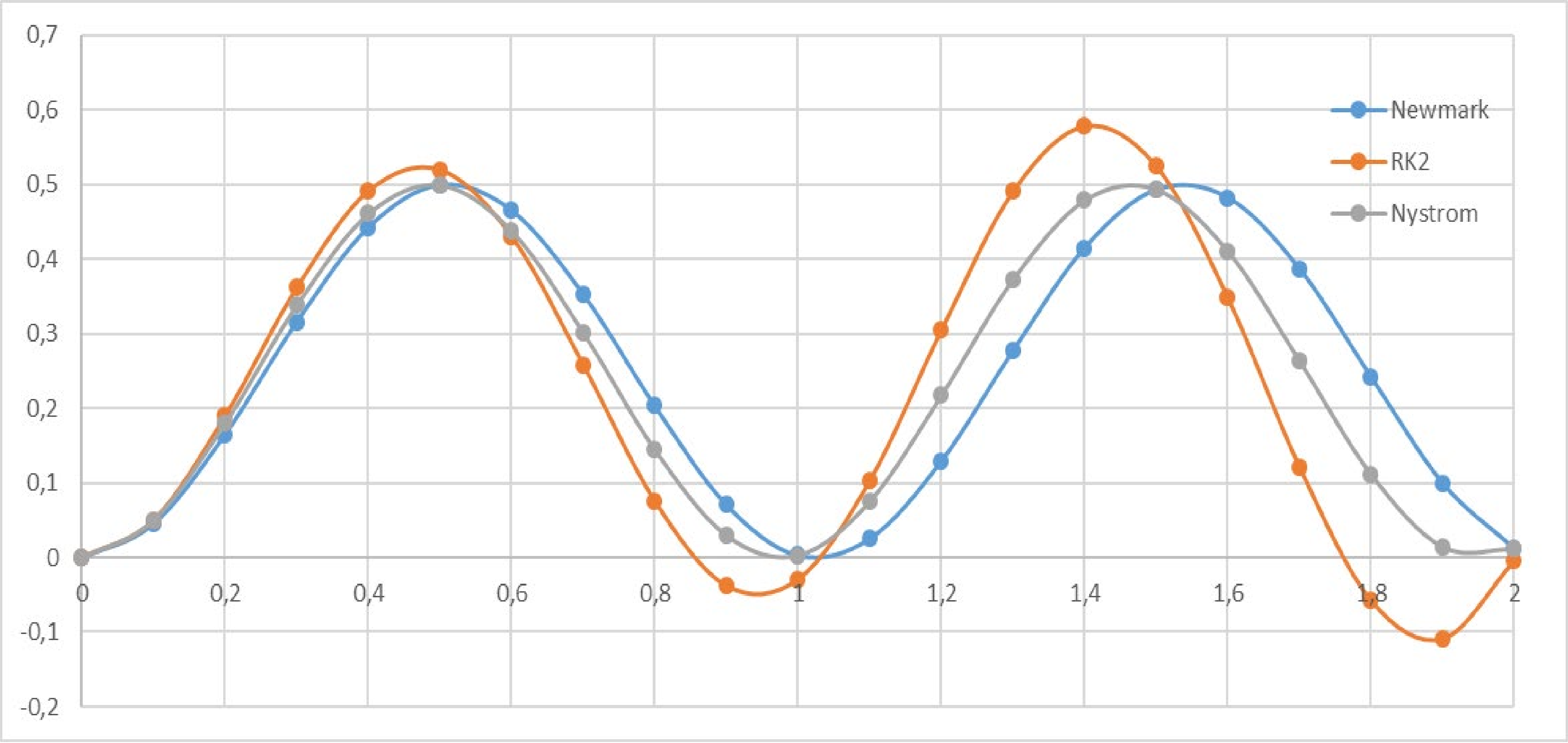
| n | tn | un | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0,1 | 0,050000 | Arranque con RK2 |
| 2 | 0,2 | 0,180000 | |
| 3 | 0,3 | 0,338000 | |
| 4 | 0,4 | 0,460800 | |
| 5 | 0,5 | 0,499280 | |
| 6 | 0,6 | 0,438048 | |
| 7 | 0,7 | 0,301597 | |
| 8 | 0,8 | 0,144507 | |
| 9 | 0,9 | 0,029614 | |
| 10 | 1 | 0,002876 | |
| 11 | 1,1 | 0,074987 | |
| 12 | 1,2 | 0,217104 | |
| 13 | 1,3 | 0,372379 | |
| 14 | 1,4 | 0,478702 | |
| 15 | 1,5 | 0,493545 | |
| 16 | 1,6 | 0,410970 | |
| 17 | 1,7 | 0,264007 | |
| 18 | 1,8 | 0,111441 | |
| 19 | 1,9 | 0,014299 | |
| 20 | 2 | 0,011437 | |




La amplitud se conserva

# Otro ejemplo de oscilador armónico

$$\boldsymbol{u}'' + 40\,\boldsymbol{u} = 10 \quad , \qquad \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{u}(0) = 0\ ;\ \boldsymbol{u}'(0) = 0$$




Que ocurre con el error de truncamiento en cada caso?

# Otro ejemplo de oscilador armónico

$$\boldsymbol{u}'' + 40\,\boldsymbol{u} = 10 \quad , \qquad \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{u}(0) = 0\ ;\ \boldsymbol{u}'(0) = 0$$