Ecuaciones diferenciales

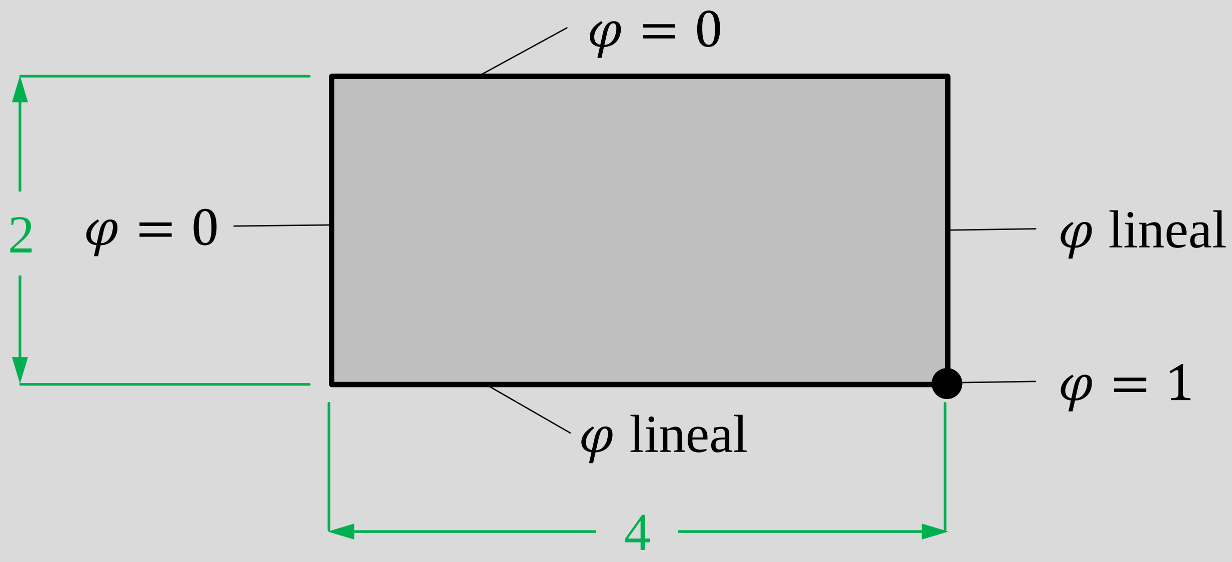
Problemas de valores de contorno en 2D

Ecuaciones elípticas

La ecuación de Laplace en 2D:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

se cumple en el siguiente dominio rectangular, con las condiciones de contorno especificadas a continuación (Dirichlet):



a) Discretizar el problema en diferencias finitas utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 1$.

b) Analizar el sistema de ecuaciones lineales resultante. Qué propiedades tiene la matriz de coeficientes?

c) Resolver el sistema de ecuaciones lineales utilizando un método adecuado.

d) Graficar la solución utilizando isolineas de φ.

a) Discretizar el problema en diferencias finitas utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 1$.

[Cuántas incógnitas hay?]

Variables independientes:

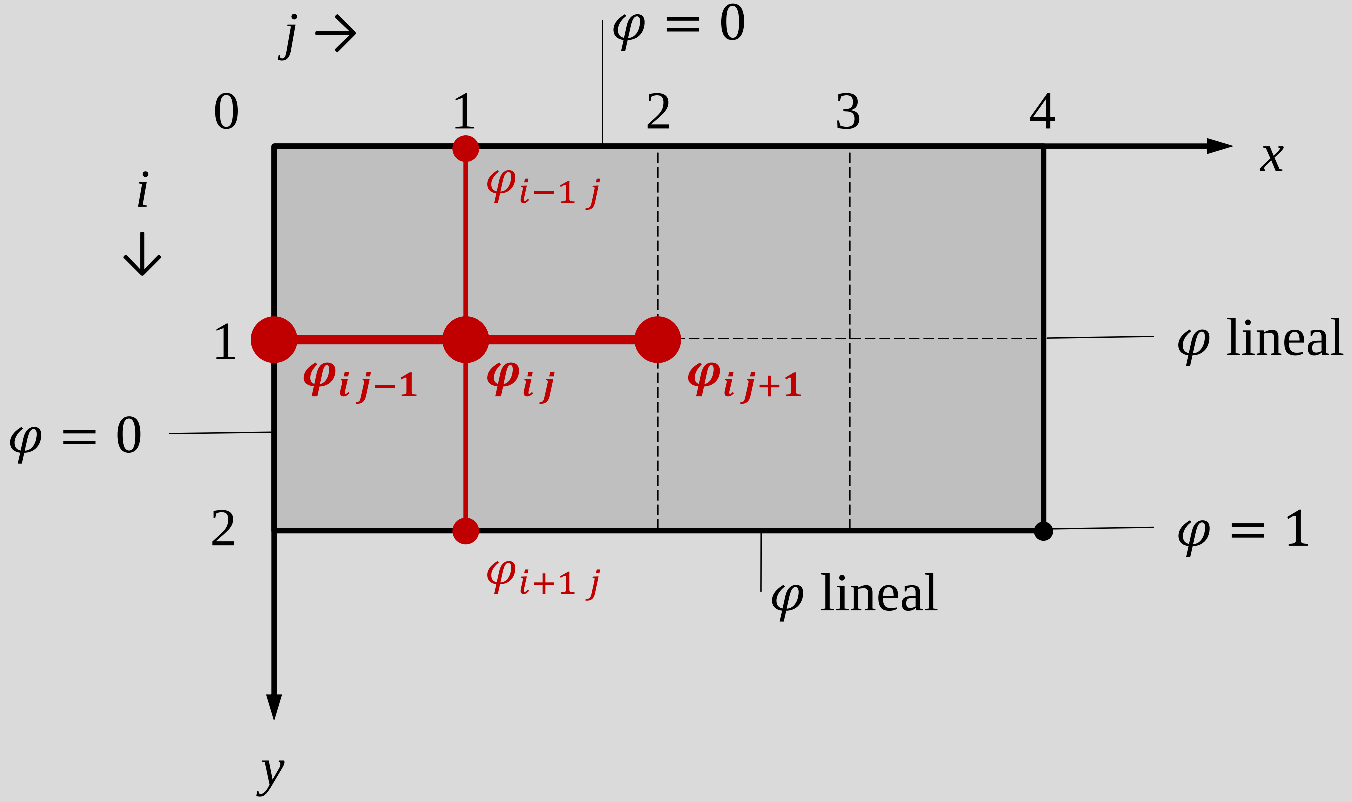
$x = x_0 + j\Delta x$

$y = y_0 + i\Delta y$

Derivadas segundas:

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cong \frac{\varphi_{i\,j-1} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i\,j+1}}{\Delta x^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cong \frac{\varphi_{i-1\,j} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i+1\,j}}{\Delta y^2}$$



a) Discretizar el problema en diferencias finitas utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 1$.

[*Cuántas incógnitas hay?*]

Variables independientes:

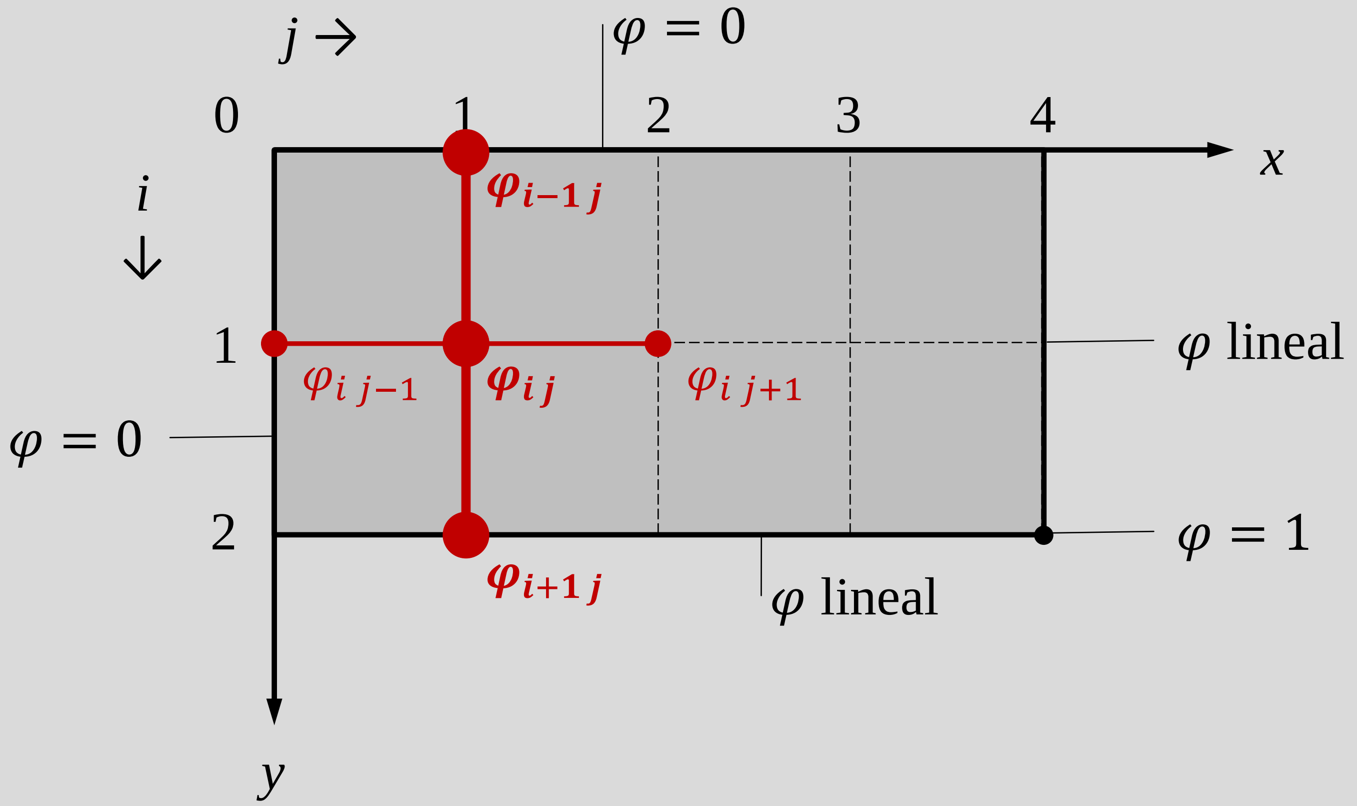
$$x = x_0 + j\Delta x$$

$$y = y_0 + i\Delta y$$

Derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cong \frac{\varphi_{i\,j-1} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i\,j+1}}{\Delta x^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}} \cong \boldsymbol{\frac{\varphi_{i-1\,j} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i+1\,j}}{\Delta y^2}}$$



a) Discretizar el problema en diferencias finitas utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 1$.

$$\frac{\varphi_{i\,j-1} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i\,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i-1\,j} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i+1\,j}}{\Delta y^2} = 0$$

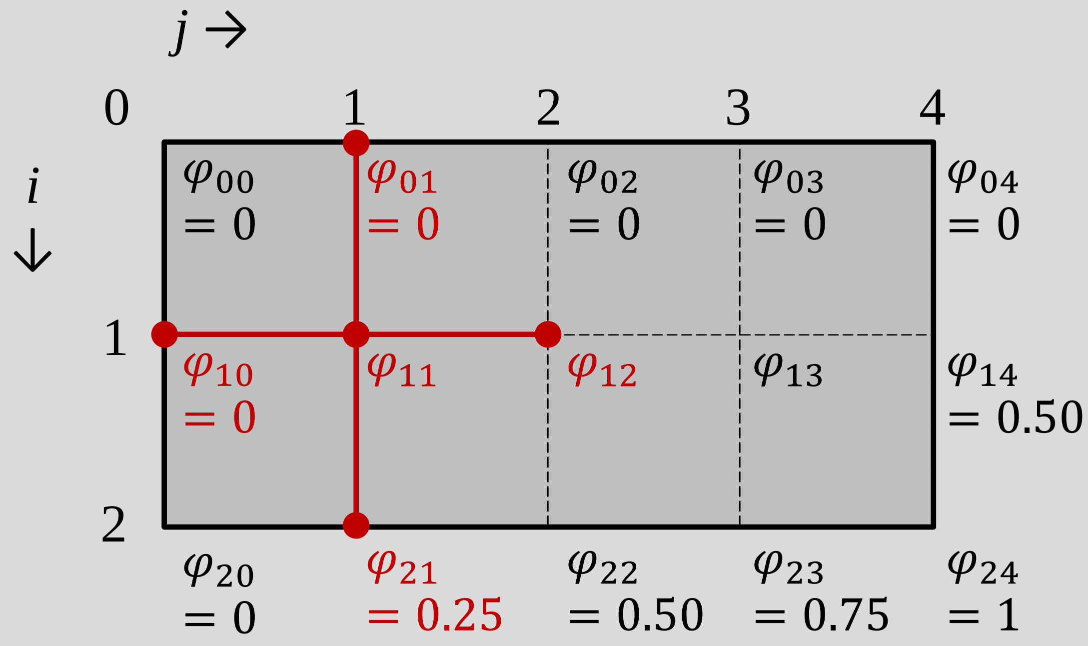
En este problema $\Delta x = \Delta y$, luego

$$\varphi_{i\,j-1} + \varphi_{i\,j+1} + \varphi_{i-1\,j} + \varphi_{i+1\,j} - 4\varphi_{i\,j} = 0$$

$\boldsymbol{i = 1, j = 1)\ \varphi_{10} + \varphi_{12} + \varphi_{01} + \varphi_{21} - 4\varphi_{11} = 0}$

$i = 1, j = 2)\ \varphi_{11} + \varphi_{13} + \varphi_{02} + \varphi_{22} - 4\varphi_{12} = 0$

$i = 1, j = 3)\ \varphi_{12} + \varphi_{14} + \varphi_{03} + \varphi_{23} - 4\varphi_{13} = 0$



a) Discretizar el problema en diferencias finitas utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 1$.

$$\frac{\varphi_{i\,j-1} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i\,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i-1\,j} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i+1\,j}}{\Delta y^2} = 0$$

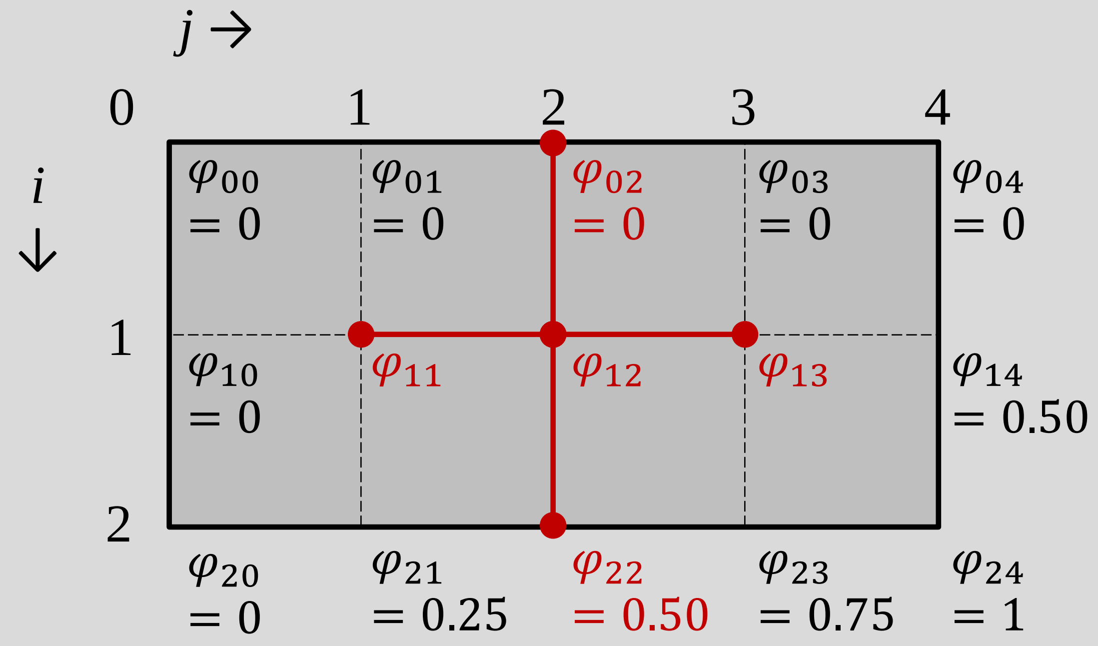
En este problema $\Delta x = \Delta y$, luego

$$\varphi_{i\,j-1} + \varphi_{i\,j+1} + \varphi_{i-1\,j} + \varphi_{i+1\,j} - 4\varphi_{i\,j} = 0$$

$i = 1, j = 1)\ \varphi_{10} + \varphi_{12} + \varphi_{01} + \varphi_{21} - 4\varphi_{11} = 0$

$\boldsymbol{i = 1, j = 2)\ \varphi_{11} + \varphi_{13} + \varphi_{02} + \varphi_{22} - 4\varphi_{12} = 0}$

$i = 1, j = 3)\ \varphi_{12} + \varphi_{14} + \varphi_{03} + \varphi_{23} - 4\varphi_{13} = 0$



a) Discretizar el problema en diferencias finitas utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 1$.

$$\frac{\varphi_{i\,j-1} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i\,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i-1\,j} - 2\varphi_{i\,j} + \varphi_{i+1\,j}}{\Delta y^2} = 0$$

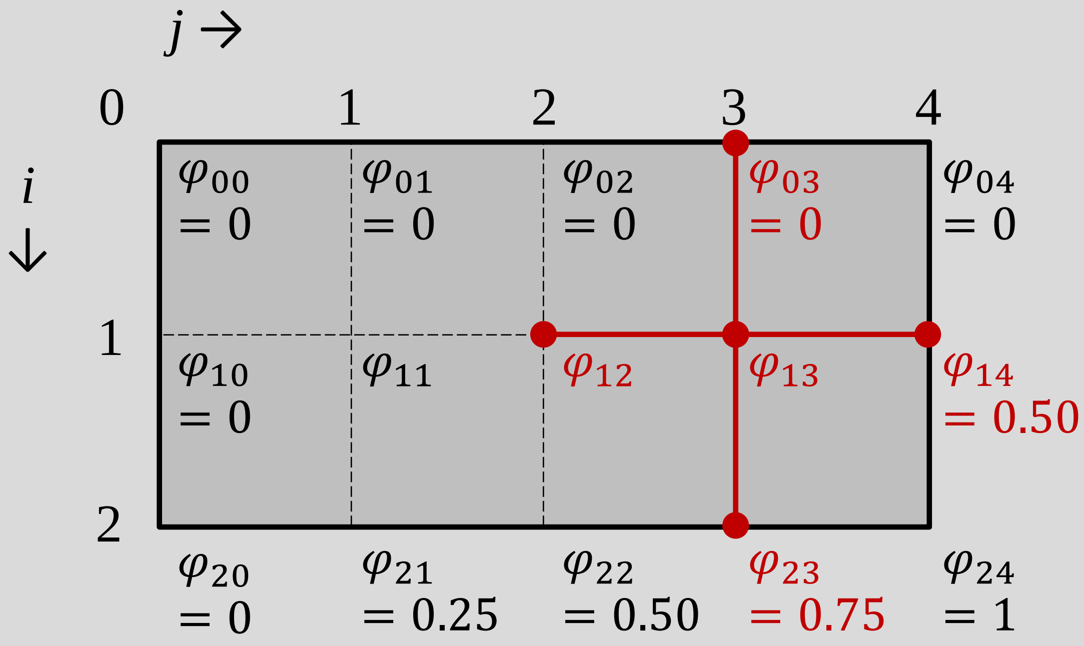
En este problema $\Delta x = \Delta y$, luego

$$\varphi_{i\,j-1} + \varphi_{i\,j+1} + \varphi_{i-1\,j} + \varphi_{i+1\,j} - 4\varphi_{i\,j} = 0$$

$i = 1, j = 1)$ $\varphi_{10} + \varphi_{12} + \varphi_{01} + \varphi_{21} - 4\varphi_{11} = 0$

$i = 1, j = 2)$ $\varphi_{11} + \varphi_{13} + \varphi_{02} + \varphi_{22} - 4\varphi_{12} = 0$

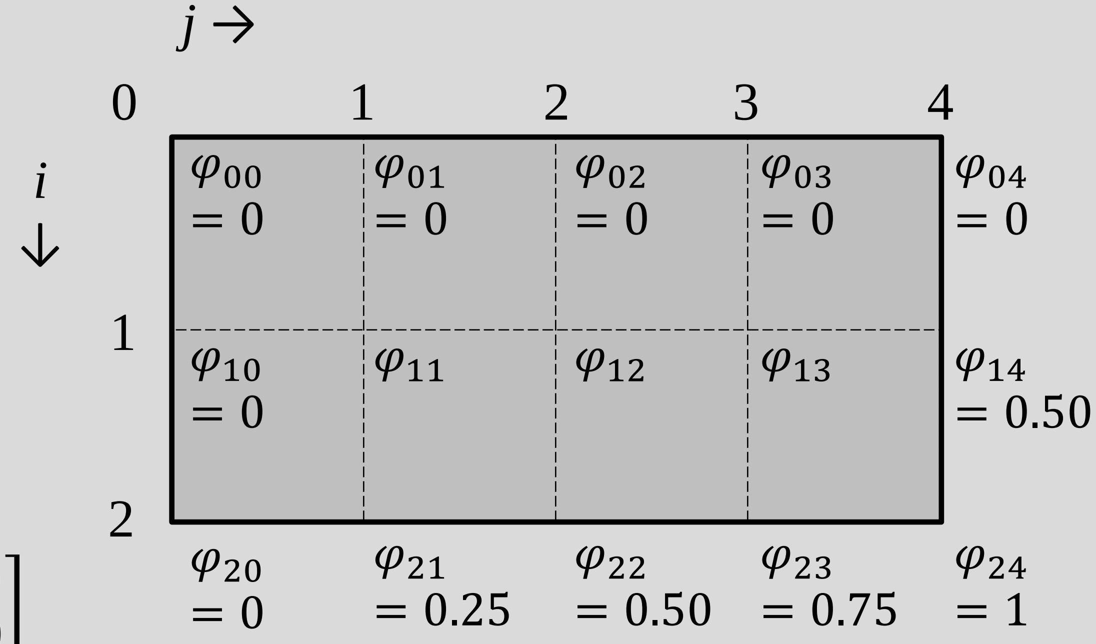
$\boldsymbol{i = 1, j = 3)}$ $\boldsymbol{\varphi_{12} + \varphi_{14} + \varphi_{03} + \varphi_{23} - 4\varphi_{13} = 0}$



a) Discretizar el problema en diferencias finitas utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 1$.

Incógnitas: $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}$

$$-4\varphi_{11} + \varphi_{12} = -\varphi_{10} - \varphi_{01} - \varphi_{21}$$
$$\varphi_{11} - 4\varphi_{12} + \varphi_{13} = -\varphi_{02} - \varphi_{22}$$
$$\varphi_{12} - 4\varphi_{13} = -\varphi_{14} - \varphi_{03} - \varphi_{23}$$

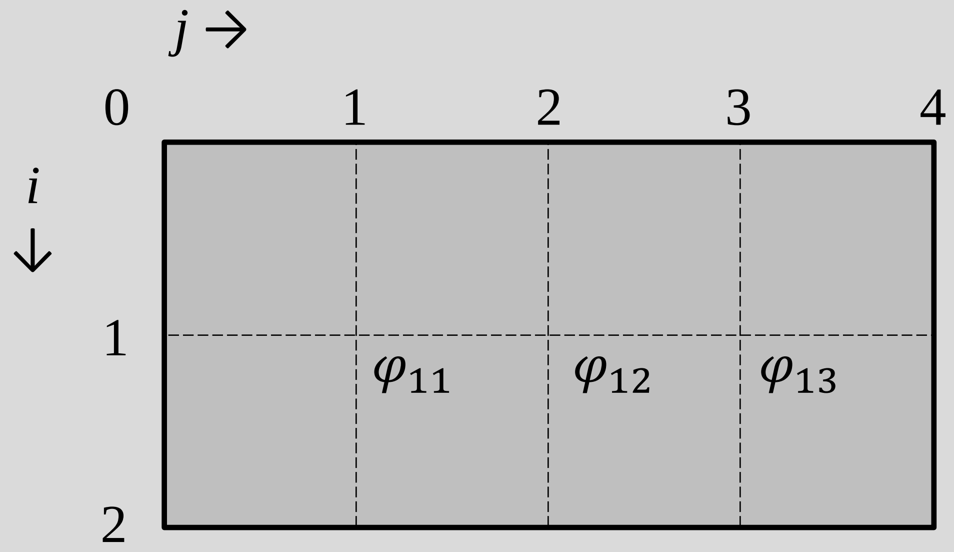


Multiplicando por -1 y ordenando:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{10} + \varphi_{01} + \varphi_{21} \\ \varphi_{02} + \varphi_{22} \\ \varphi_{14} + \varphi_{03} + \varphi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.50 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

b) Analizar el sistema de ecuaciones lineales resultante. Qué propiedades tiene la matriz de coeficientes?

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.50 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

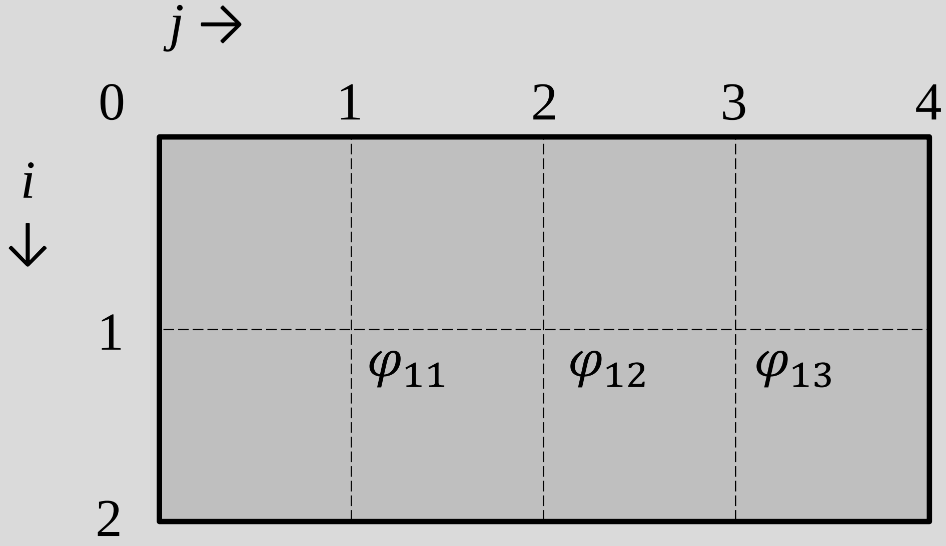


La matriz A es simétrica, diagonal dominante, definida positiva y tridiagonal.

[*Qué significa?*]

b) Analizar el sistema de ecuaciones lineales resultante. Qué propiedades tiene la matriz de coeficientes?

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.50 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$



La matriz A es simétrica, diagonal dominante, definida positiva y tridiagonal.

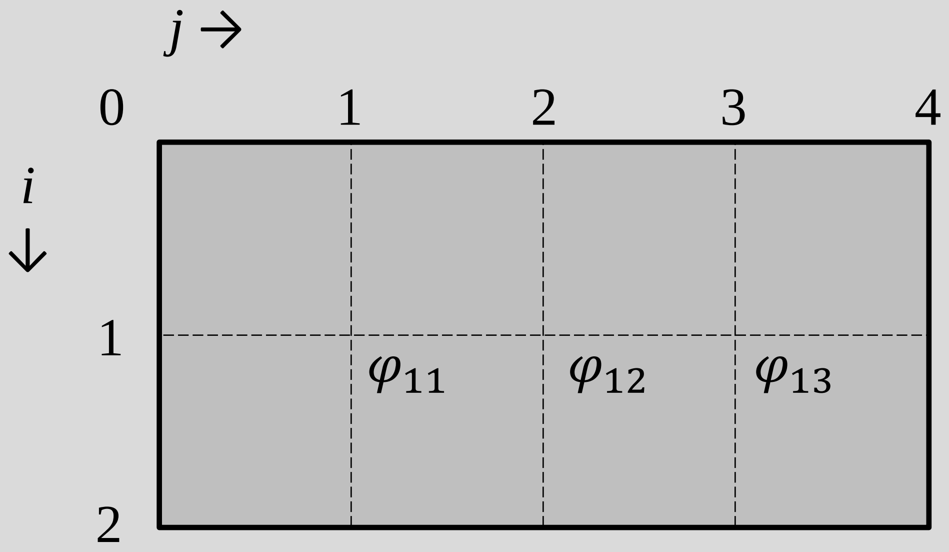
Todos los métodos iterativos convergen.
Además, se puede calcular el $\omega_{óptimo}$ para SOR.

c) Resolver el sistema de ecuaciones lineales utilizando un método adecuado.

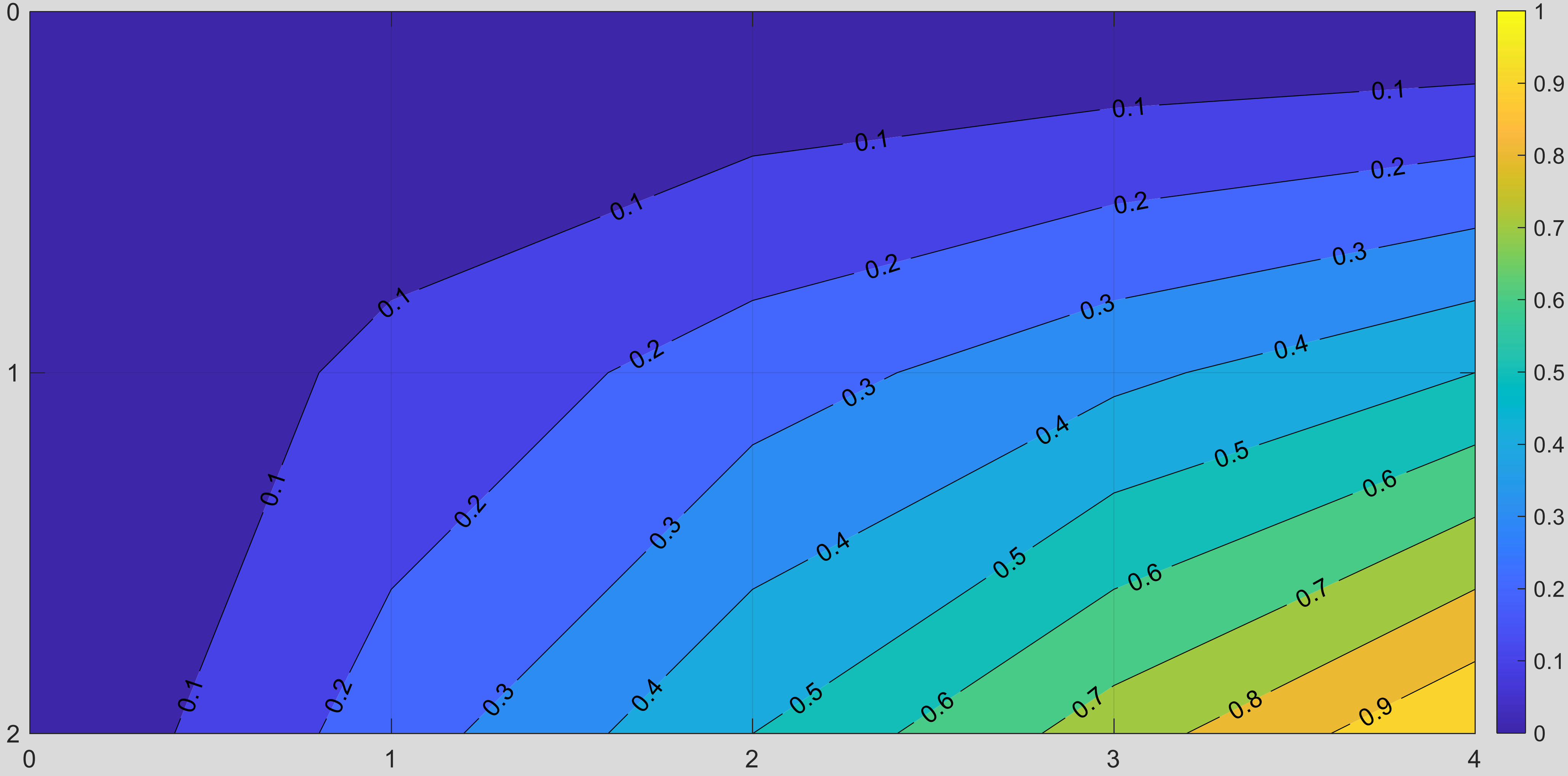
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}50 \\ 1{,}25 \end{bmatrix}$$

Resolvemos usando SOR:

$$\begin{cases} \varphi_{11} = 0.125 \\ \varphi_{12} = 0.250 \\ \varphi_{13} = 0.375 \end{cases}$$



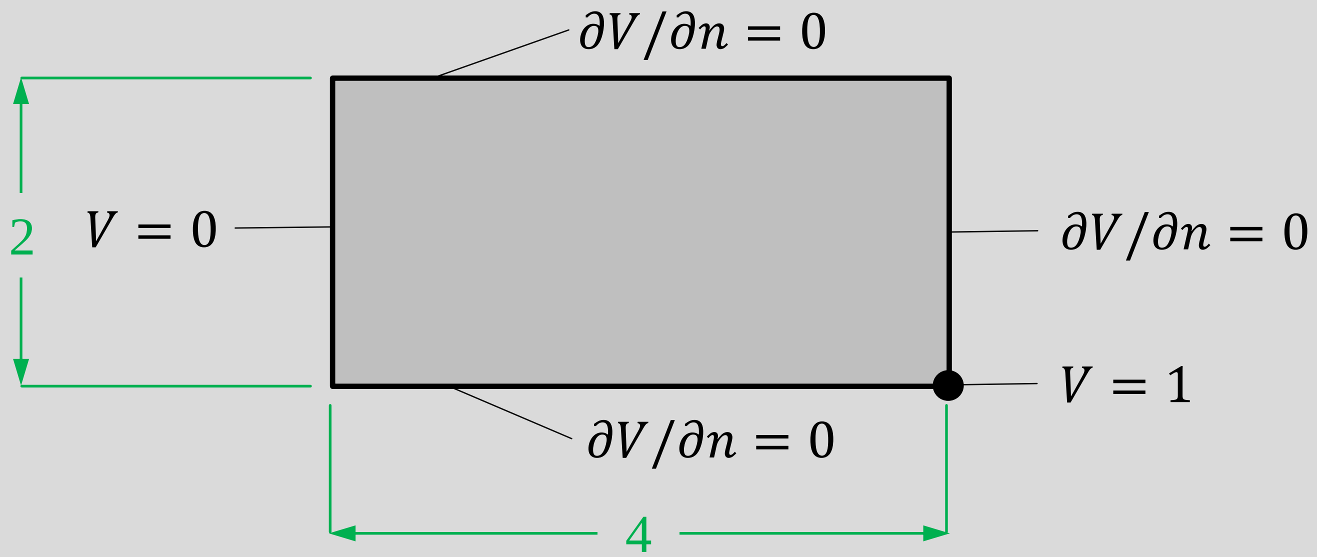
d) Graficar la solución utilizando isolineas de φ.



El potencial electrostático puede expresarse con la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Considerar el siguiente dominio rectangular con las condiciones de contorno especificadas a continuación (Dirichlet y Neumann):



a) Discretizar el problema en diferencias finitas para $\rho = 0$ utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 2$.

b) Resolver el sistema de ecuaciones resultante y graficar la solución obtenida.

c) Programar un código computacional que permita discretizar el dominio en pasos más chicos, por ejemplo $\Delta x = \Delta y = 0.05$.

d) Volver a resolver el problema acercando progresivamente la carga V=1 hacia el borde izquierdo y graficar los resultados obtenidos en cada caso.

a) Discretizar el problema en diferencias finitas para $\rho = 0$ utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 2$.

[*Cuántas incógnitas hay?*]

Variables independientes:

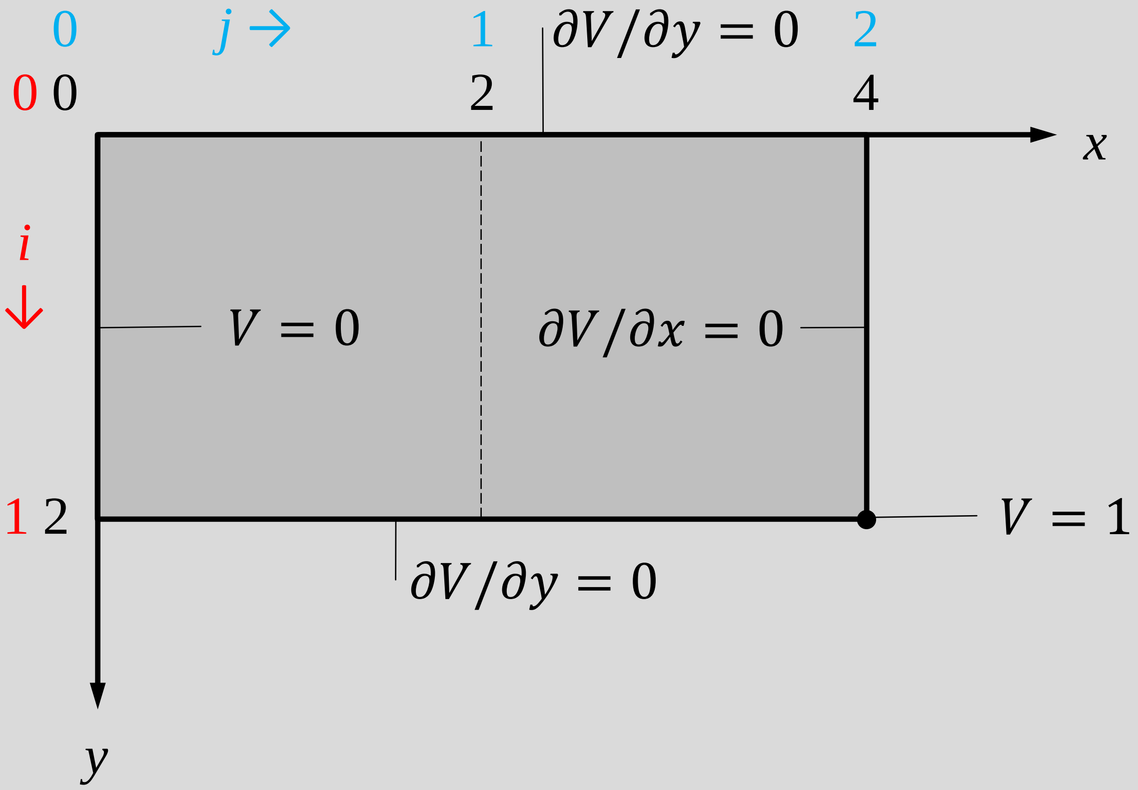
$x = x_0 + j\Delta x$

$y = y_0 + i\Delta y$

Derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cong \frac{V_{i\ j-1} - 2V_{i\ j} + V_{i\ j+1}}{\Delta x^2}$$

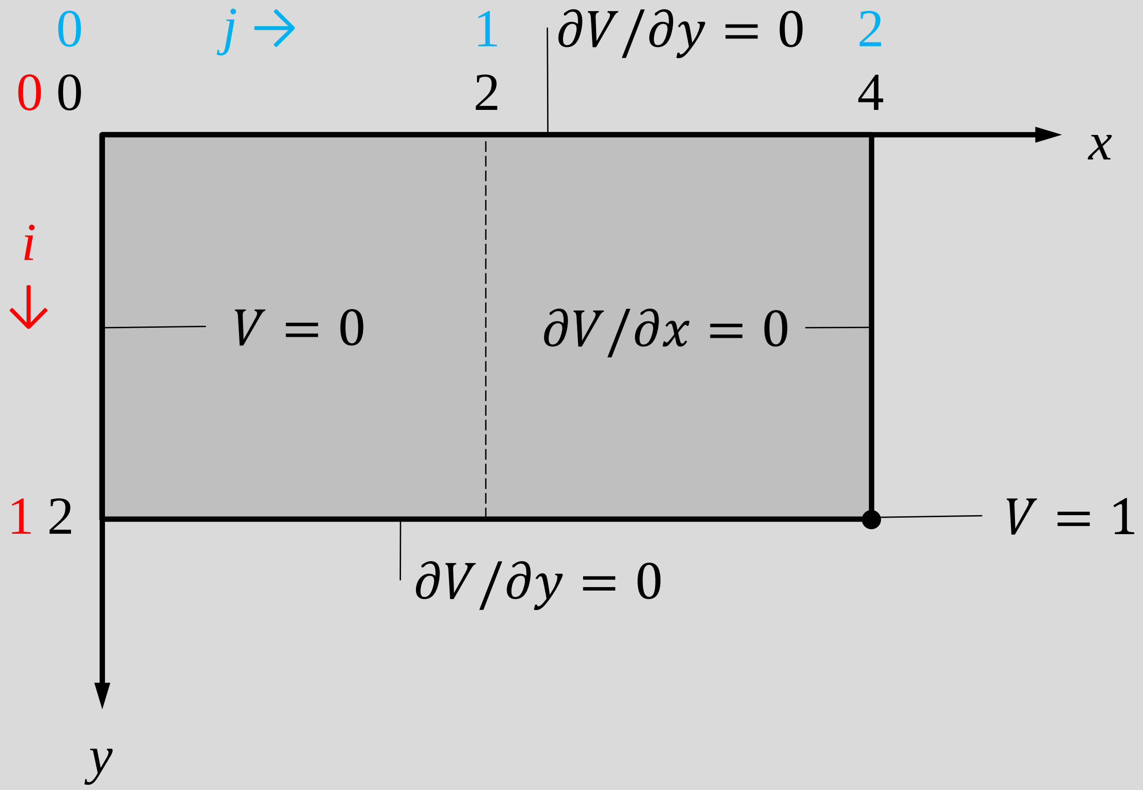
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cong \frac{V_{i-1\ j} - 2V_{i\ j} + V_{i+1\ j}}{\Delta y^2}$$



a) Discretizar el problema en diferencias finitas para $\rho = 0$ utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 2$.

En este problema $\Delta x = \Delta y$, luego

$$V_{i\ j-1} + V_{i\ j+1} + V_{i-1\ j} + V_{i+1\ j} - 4\varphi_{i\ j} = 0$$



Derivadas primeras igualadas a 0:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cong \frac{V_{i\ j-1} - V_{i\ j+1}}{2\Delta x} = 0 \rightarrow V_{i\ j-1} = V_{i\ j+1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \cong \frac{V_{i-1\ j} - V_{i+1\ j}}{2\Delta y} = 0 \rightarrow V_{i-1\ j} = V_{i+1\ j}$$

Esto permite deshacerse de los nodos fantasma.

a) Discretizar el problema en diferencias finitas para $\rho = 0$ utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 2$.

$i = 0, j = 1$) $V_{00} + V_{02} + V_{-11} + V_{11} - 4V_{01} = 0$

Cond. borde: $V_{-11} = V_{11}$

Reemplazo: $V_{00} + V_{02} + 2V_{11} - 4V_{01} = 0$

$i = 0, j = 2$) $V_{01} + V_{03} + V_{-12} + V_{12} - 4V_{02} = 0$

Cond. borde: $V_{-12} = V_{12}$; $V_{01} = V_{03}$

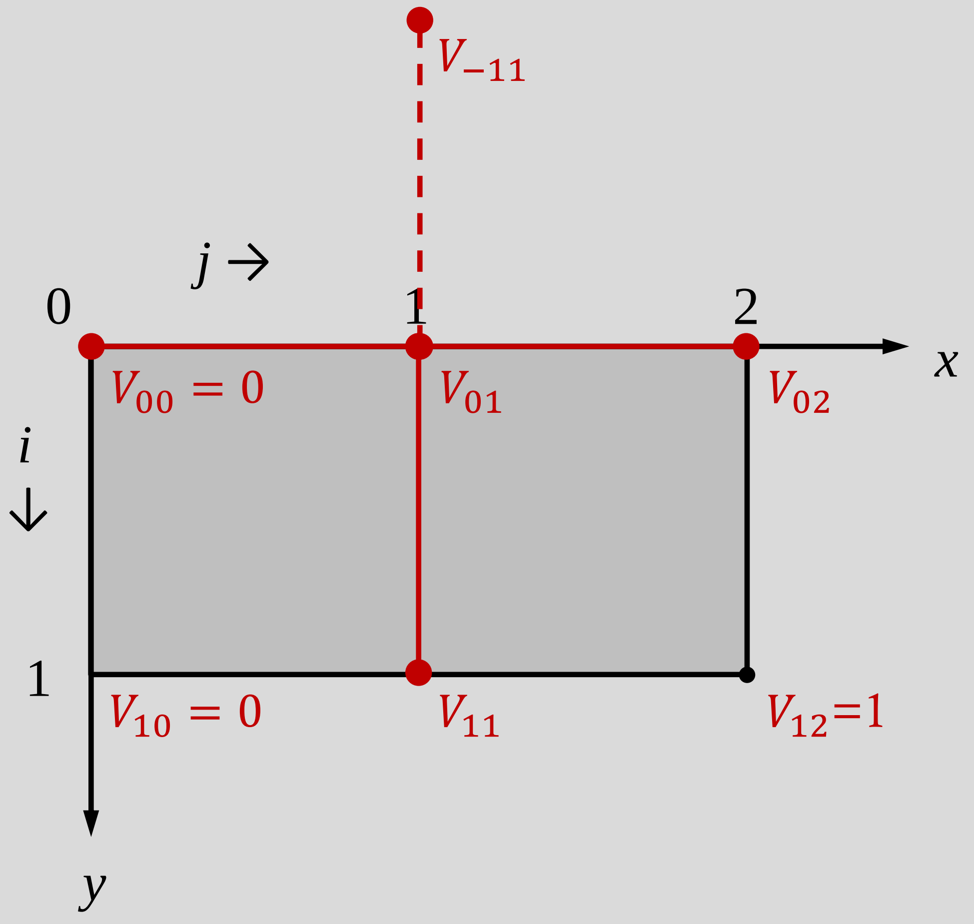
Reemplazo: $2V_{01} + 2V_{12} - 4V_{02} = 0$

$i = 1, j = 1$)

Ec. dif: $V_{10} + V_{12} + V_{01} + V_{21} - 4V_{11} = 0$

Cond. borde: $V_{01} = V_{21}$

Reemplazo: $V_{10} + V_{12} + 2V_{21} - 4V_{11} = 0$



a) Discretizar el problema en diferencias finitas para $\rho = 0$ utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 2$.

$i = 0, j = 1)$ $V_{00} + V_{02} + V_{-11} + V_{11} - 4V_{01} = 0$

Cond. borde: $V_{-11} = V_{11}$

Reemplazo: $V_{00} + V_{02} + 2V_{11} - 4V_{01} = 0$

$\boldsymbol{i = 0, j = 2)}$ $\boldsymbol{V_{01} + V_{03} + V_{-12} + V_{12} - 4V_{02} = 0}$

Cond. borde: $\boldsymbol{V_{-12} = V_{12}\,;\, V_{01} = V_{03}}$

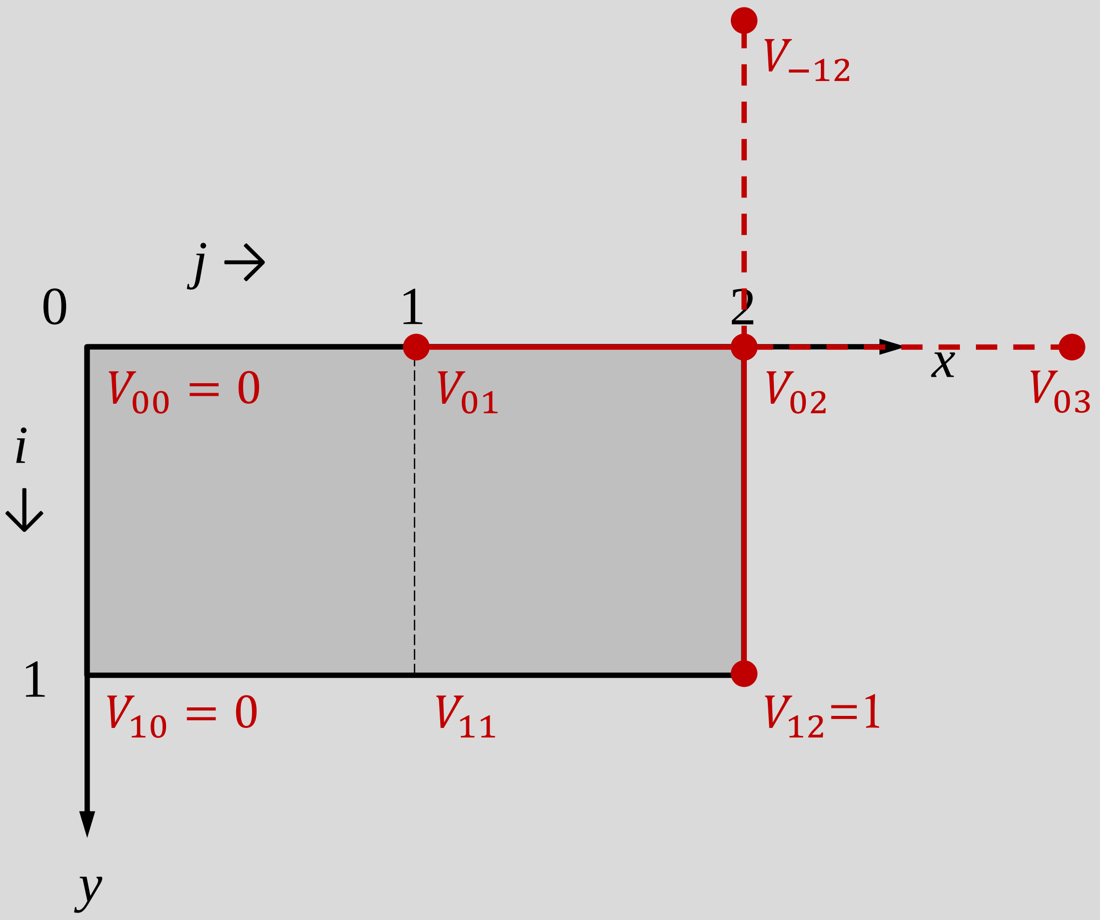
Reemplazo: $\boldsymbol{2V_{01} + 2V_{12} - 4V_{02} = 0}$

$i = 1, j = 1)$

Ec. dif: $V_{10} + V_{12} + V_{01} + V_{21} - 4V_{11} = 0$

Cond. borde: $V_{01} = V_{21}$

Reemplazo: $V_{10} + V_{12} + 2V_{21} - 4V_{11} = 0$



a) Discretizar el problema en diferencias finitas para $\rho = 0$ utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 2$.

$i = 0, j = 1)$ $V_{00} + V_{02} + V_{-11} + V_{11} - 4V_{01} = 0$

Cond. borde: $V_{-11} = V_{11}$

Reemplazo: $V_{00} + V_{02} + 2V_{11} - 4V_{01} = 0$

$i = 0, j = 2)$ $V_{01} + V_{03} + V_{-12} + V_{12} - 4V_{02} = 0$

Cond. borde: $V_{-12} = V_{12}$; $V_{01} = V_{03}$

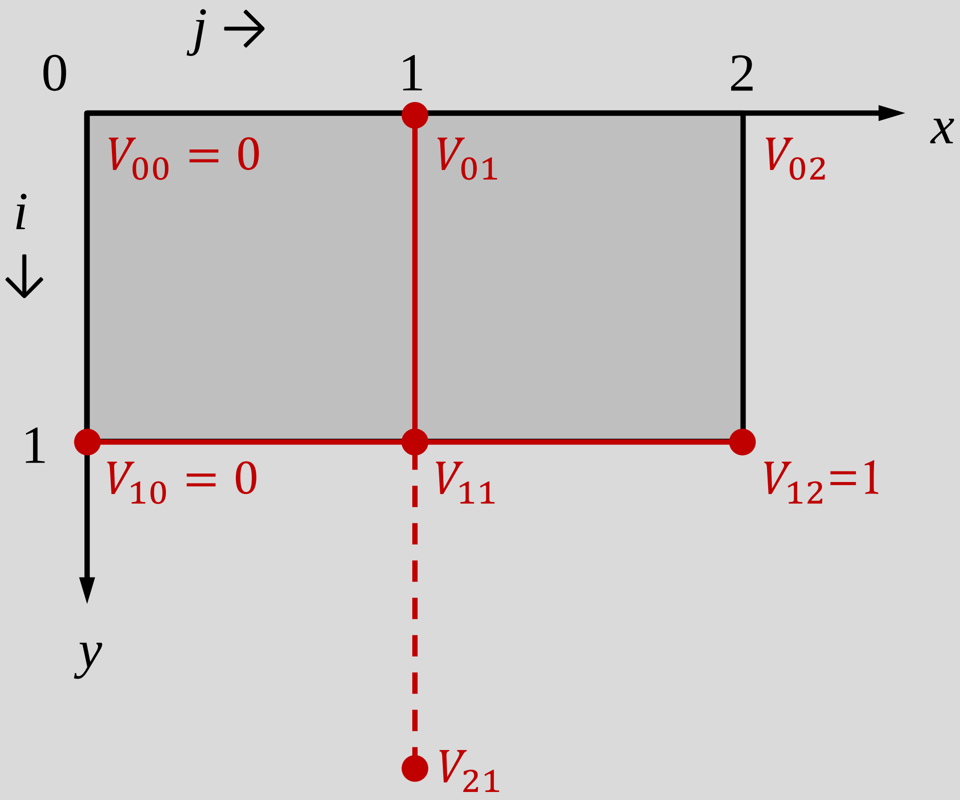
Reemplazo: $2V_{01} + 2V_{12} - 4V_{02} = 0$

$\boldsymbol{i = 1, j = 1)}$

Ec. dif: $\boldsymbol{V_{10} + V_{12} + V_{01} + V_{21} - 4V_{11} = 0}$

Cond. borde: $\boldsymbol{V_{01} = V_{21}}$

Reemplazo: $\boldsymbol{V_{10} + V_{12} + 2V_{01} - 4V_{11} = 0}$



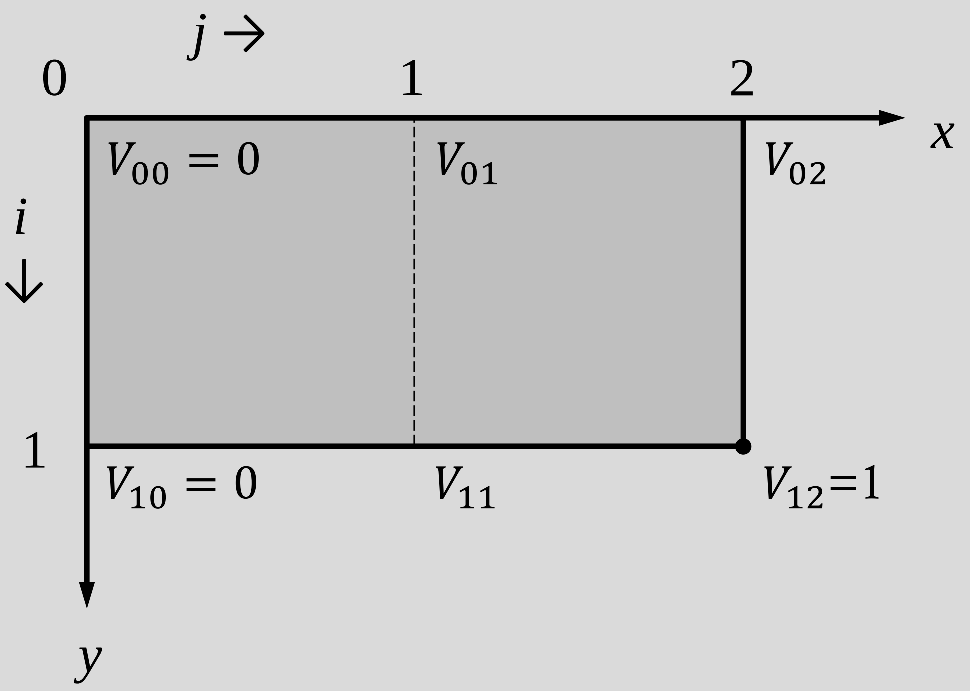
a) Discretizar el problema en diferencias finitas para $\rho = 0$ utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 2$.

Incógnitas V_{01}, V_{02}, V_{11}

$$-4V_{01} + V_{02} + 2V_{11} = -V_{00}$$
$$2V_{01} - 4V_{02} = -2V_{12}$$
$$2V_{01} - 4V_{11} = -V_{10} - V_{12}$$

Multiplicando por -1 y ordenando:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \\ V_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{00} \\ 2V_{12} \\ V_{10} + V_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

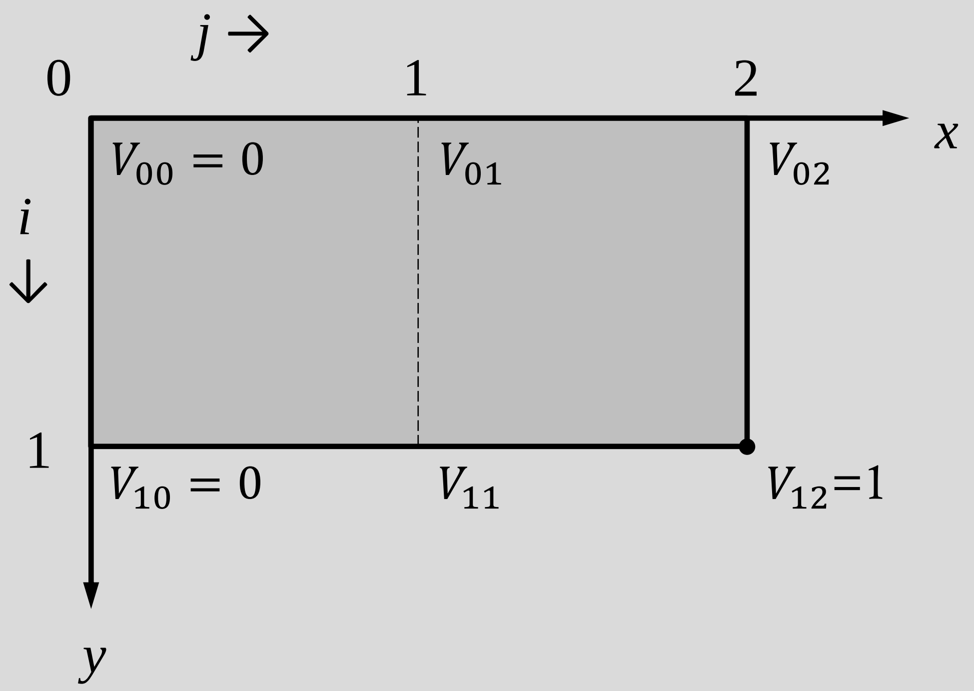


b) Resolver el sistema de ecuaciones resultante y graficar la solución obtenida.

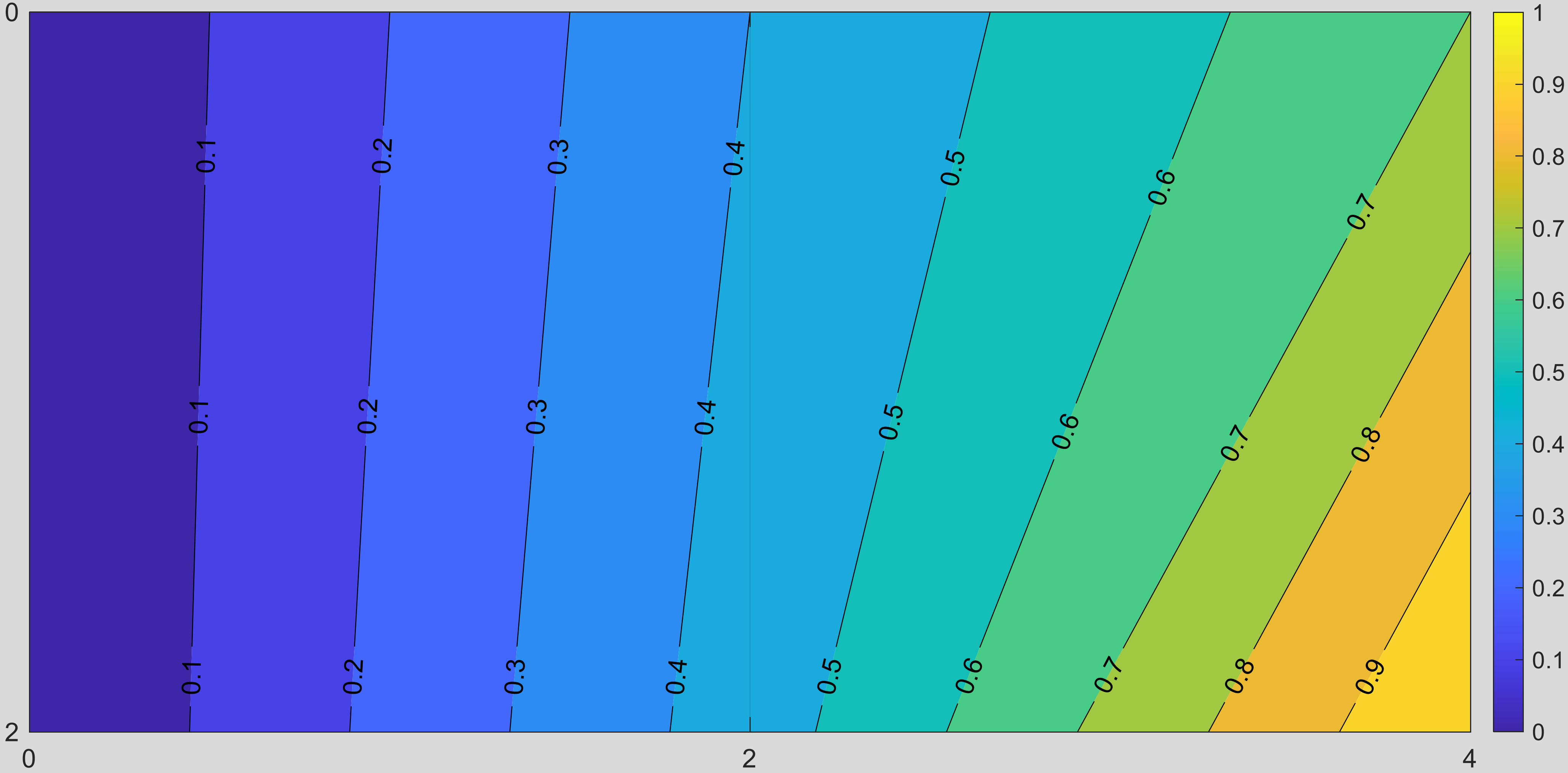
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \\ V_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{00} \\ 2V_{12} \\ V_{10} + V_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{cases} V_{01} = 0.40 \\ V_{02} = 0.70 \\ V_{11} = 0.45 \end{cases}$$

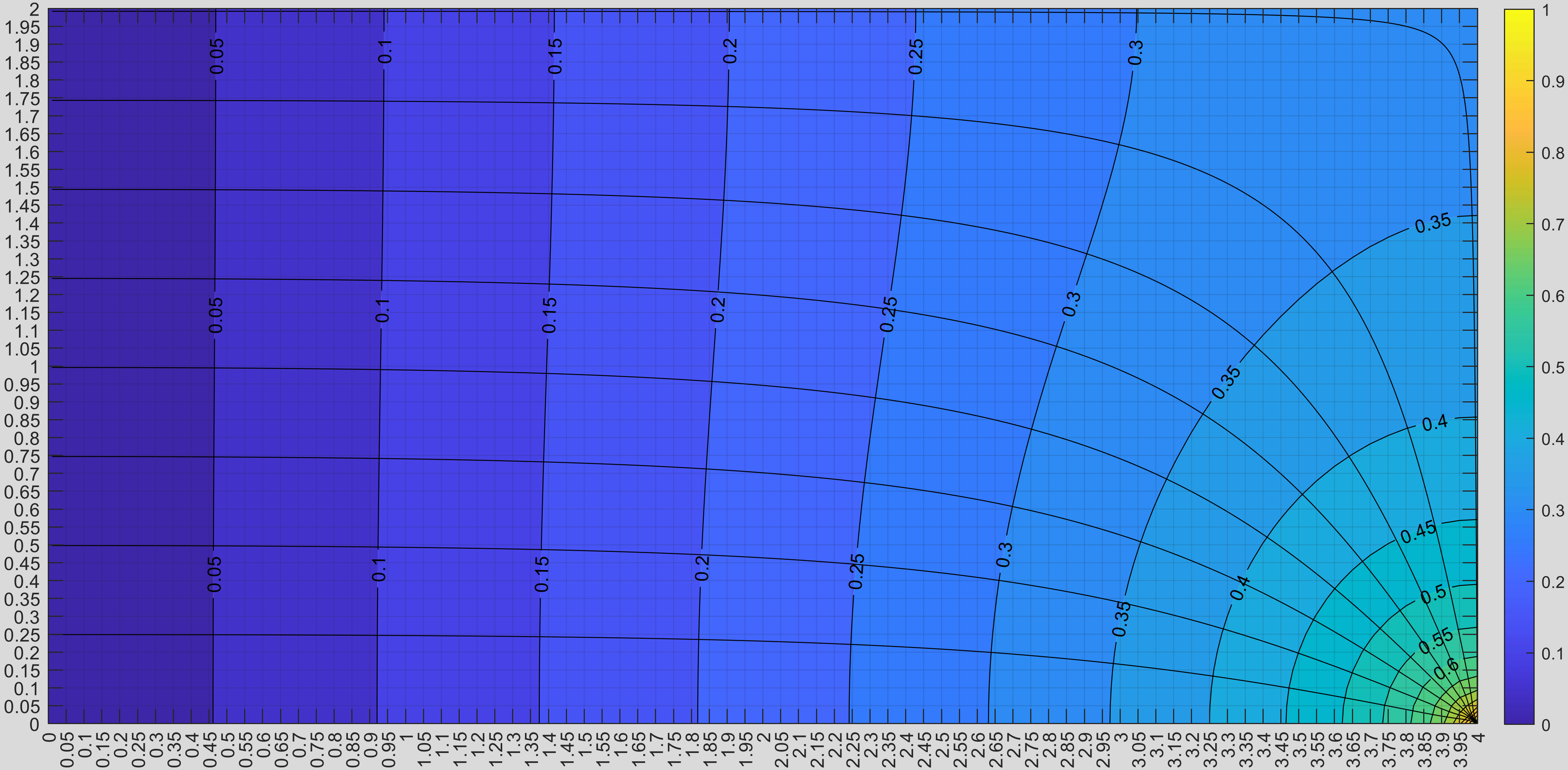


b) Resolver el sistema de ecuaciones resultante y graficar la solución obtenida.

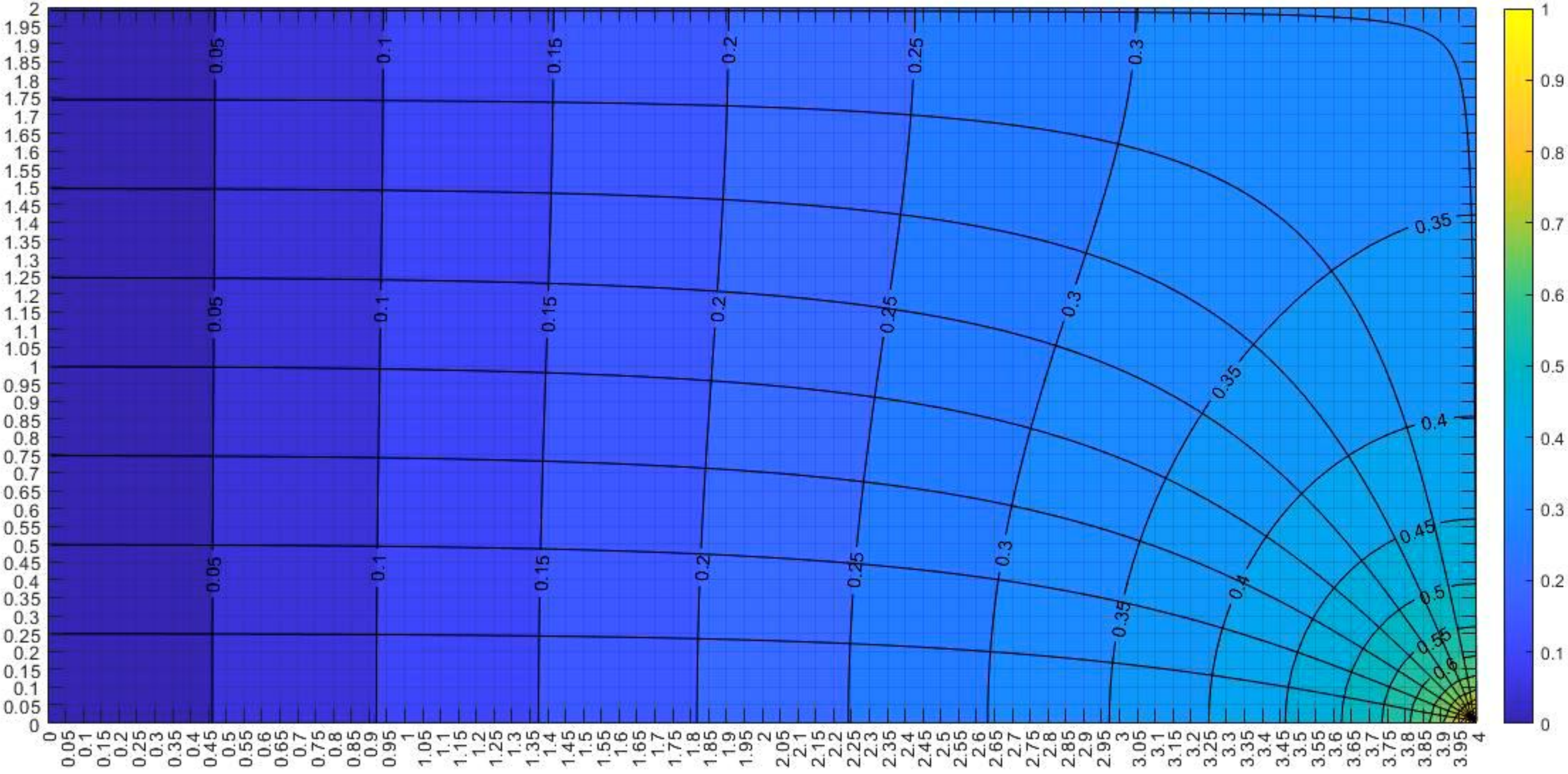


Problemas de valores de contorno en 2D
Ejercicio 2

c) Programar un código computacional que permita discretizar el dominio en pasos más chicos, por ejemplo $\Delta x = \Delta y = 0.05$.



d) Volver a resolver el problema acercando progresivamente la carga V=1 hacia el borde izquierdo y graficar los resultados obtenidos en cada caso.



Sea la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + p = 0$$

con condición de borde $M = 0$ en el contorno definido por $\Omega \equiv [0; L] \times [0; L]$.

a) Discretizar el dominio utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = L/4$ y la ecuación diferencial a orden 2.

b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante para $L = 2$ y $p = 1$. Tenga en cuenta que el problema presenta varios ejes de simetría con lo cual se puede reducir la cantidad de incógnitas, adaptando las condiciones de contorno consecuentemente.

a) Discretizar el dominio utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = L/4$ y la ecuación diferencial a orden 2.

Resolución de derivada cruzada:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{2\Delta y}\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{i+1\ j} - M_{i-1\ j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{i+1\ j}\right) = \frac{1}{2\Delta x}\left(M_{i+1\ j+1} - M_{i+1\ j-1}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{i-1\ j}\right) = \frac{1}{2\Delta x}\left(M_{i-1\ j+1} - M_{i-1\ j-1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\Delta y}\frac{1}{2\Delta x}\left(M_{i+1\ j+1} - M_{i+1\ j-1} - M_{i-1\ j+1} + M_{i-1\ j-1}\right)$$

b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante para $L = 2$ y $p = 1$. Tenga en cuenta que el problema presenta varios ejes de simetría con lo cual se puede reducir la cantidad de incógnitas, adaptando las condiciones de contorno consecuentemente.

Condición de contorno de simetría con respecto a un eje con ángulo arbitrario:

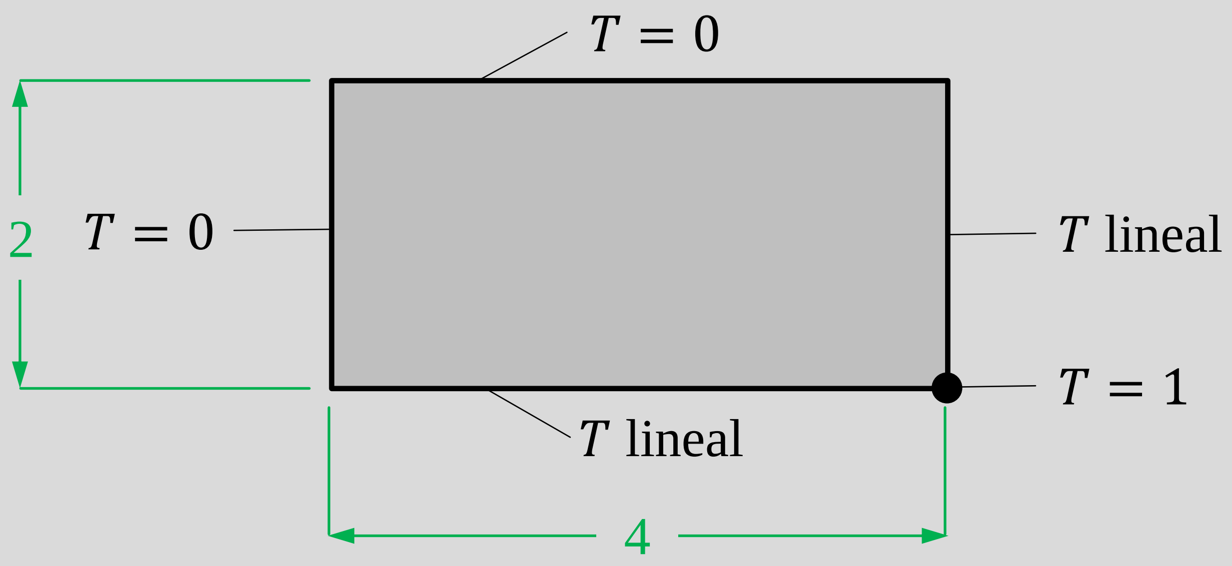
$$\underline{\breve{n}} \cdot \underline{\nabla}\varphi = \begin{bmatrix} a_x & a_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \end{bmatrix} = 0$$

$\underline{\breve{n}}$ versor normal al eje de simetría

Dada la ecuación diferencial de transferencia de calor:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+q_V=0$$

donde T es la temperatura, k la conductividad térmica y q_V el calor volumétrico, con las condiciones de contorno de Dirichlet:



a) Discretizar el problema en diferencias finitas utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 1$ y resolver el sistema de ecuaciones resultante para $k = 1$ y $q_V = 1$.
b) Repetir la resolución utilizando $k = k(x, y) = 1 + x/4$.
c) Repetir la resolución utilizando $k = k(T) = 1 + T$.

a) Discretizar el problema en diferencias finitas utilizando un paso $\Delta x = \Delta y = 1$ y resolver el sistema de ecuaciones resultante para $k = 1$ y $q_V = 1$.

Resolución de derivada segunda con $k = cte$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \underbrace{\frac{\partial k}{\partial x}}_{=0}\frac{\partial T}{\partial x} + k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k\frac{T_{i\ j-1} - 2T_{i\ j} + T_{i\ j+1}}{\Delta x^2}$$

La ecuación en diferencias resultante es lineal.

b) Repetir la resolución utilizando $k = k(x, y) = 1 + x/4$.

Resolución de derivada segunda con $k = k(x, y)$ (dato). Opción 1, discretización directa:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{1}{\Delta x}\left(k_{i\ j+\frac{1}{2}}\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{i\ j+\frac{1}{2}} - k_{i\ j-\frac{1}{2}}\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{i\ j-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\Delta x^2}\left(k_{i\ j+\frac{1}{2}}\left(T_{i\ j+1} - T_{i\ j}\right) - k_{i\ j-\frac{1}{2}}\left(T_{i\ j} - T_{i\ j-1}\right)\right)$$

con $k_{i\ j+\frac{1}{2}} = \left(k_{i\ j+1} + k_{i\ j}\right)/2$; $k_{i\ j-\frac{1}{2}} = \left(k_{i\ j} + k_{i\ j-1}\right)/2$

Opción 2, resolución de la derivada (aparece el término advectivo $\partial k/\partial x$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{k_{i\ j+1} - k_{i\ j-1}}{2\Delta x}\,\frac{T_{i\ j+1} - T_{i\ j-1}}{2\Delta x} + k_{i\ j}\,\frac{T_{i\ j-1} - 2T_{i\ j} + T_{i\ j+1}}{\Delta x^2}$$

La ecuación en diferencias resultante sigue siendo lineal.

c) Repetir la resolución utilizando $k = k(T) = 1 + T$.

Resolución de derivada segunda con $k = k(T)$ (incógnita). Opción 1:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\Delta x^2}\left[\left(k(T_{i\ j+1}) + k(T_{i\ j})\right)\left(T_{i\ j+1} - T_{i\ j}\right) - \left(k(T_{i\ j}) + k(T_{i\ j-1})\right)\left(T_{i\ j} - T_{i\ j-1}\right)\right]$$

Opción 2:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{1}{\Delta x^2}\left[\frac{1}{4}\left(k(T_{i\ j+1}) - k(T_{i\ j-1})\right)\left(T_{i\ j+1} - T_{i\ j-1}\right) + k(T_{i\ j})\left(T_{i\ j-1} - 2T_{i\ j} + T_{i\ j+1}\right)\right]$$

La ecuación en diferencias resultante ahora es **no lineal**.