Problemas de valores de contorno

Clase práctica

Ejercicio 9 de la guía

Sea el siguiente problema:

$0.1\,u'' + u' + u = 0$; $0 \leq x \leq 1$; $u(0) = 0$; $u(1) = 1$

[Qué lo hace PVC y no PVI?]

[Qué otras condiciones de borde se podrían imponer?]

a) Hallar la solución numérica por un método directo centrado con paso $h = 0.25$. Resolver el sistema resultante y graficar la solución obtenida.

b) Resolver nuevamente por el método de “upwinding” con igual paso. Graficar la solución obtenida.

c) Siendo la solución analítica $u(\mathrm{x}) = 3.08777\,(e^{-1.12702\,x} - e^{-8.87298\,x})$, comparar y comentar sobre los resultados obtenidos.

Análisis de la ecuación diferencial

Ecuación diferencial de 2do orden:

[Es PVC o PVI?]

$0.1\, u'' + u' + u = 0 \; ; \; 0 \leq x \leq 1 \; ; \; u(0) = 0 \; ; \; u(1) = 1$

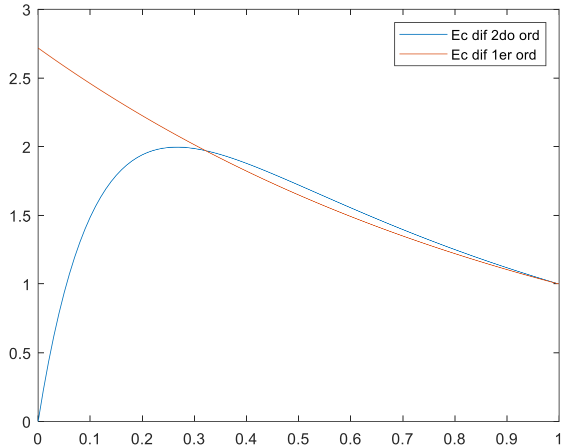
Solución: $u(x) = 3.08777\,(e^{-1.12702\,x} - e^{-8.87298\,x})$

Ecuación diferencial de 1er orden:

[Es PVC o PVI?]

$u' + u = 0 \; ; \; 0 \leq x \leq 1 \; ; \; u(1) = 1$

Solución: $u(x) = e^{1-x}$



Si el factor que acompaña a u'' es mucho menor al que acompaña a u', el término que contiene a u'' prácticamente desaparece, pero la ecuación diferencial debe seguir cumpliendo la condición de contorno extra $u(0) = 0$. Esto produce una variación brusca de la función cerca de $x = 0$, también conocido como fenómeno de “capa límite”. El método numérico puede presentar dificultades para resolver la ecuación en cercanía de la capa límite.

Resolución

Reescribo la ecuación diferencial: $\alpha\, u'' + \beta\, u' + u = 0$ con $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.0$

Tenemos un problema de capa límite cuando $\alpha << \beta$. *[Ejemplos en ingeniería?]*

a) **Método centrado** *[Orden?]*

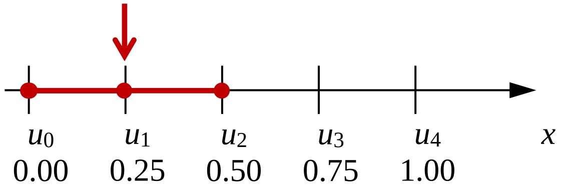
$$u'' \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \qquad u' \approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} \qquad u \approx u_n$$

Reemplazando en la ecuación diferencial: $\alpha \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \beta \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + u_n = 0$

Reordenando: $u_{n-1}\left(\dfrac{\alpha}{h^2} - \dfrac{\beta}{2h}\right) + u_n\left(-\dfrac{2\alpha}{h^2} + 1\right) + u_{n+1}\left(\dfrac{\alpha}{h^2} + \dfrac{\beta}{2h}\right) = 0$ (ec. en diferencias)

Para h = 0.25, el dominio queda:

[Cantidad de ecuaciones y de incógnitas?]



y la ecuación en diferencias (con $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.0$):

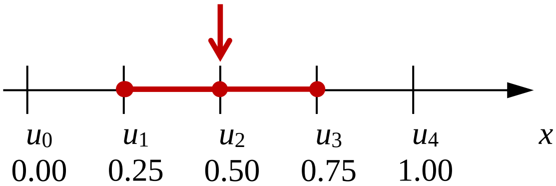
$$-0.4\,u_{n-1} - 2.2\,u_n + 3.6\,u_{n+1} = 0$$

Reemplazo n para cada nodo:

$n = 0$)	$u_0 = 0$
$n = 1$)	$-0.4\,u_0 - 2.2\,u_1 + 3.6\,u_2 = 0$
$n = 2$)	$-0.4\,u_1 - 2.2\,u_2 + 3.6\,u_3 = 0$
$n = 3$)	$-0.4\,u_2 - 2.2\,u_3 + 3.6\,u_4 = 0$
$n = 4$)	$u_4 = 1$

Para h = 0.25, el dominio queda:

[Cantidad de ecuaciones y de incógnitas?]



y la ecuación en diferencias (con $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.0$):

$$-0.4\,u_{n-1} - 2.2\,u_n + 3.6\,u_{n+1} = 0$$

Reemplazo n para cada nodo:

$n = 0$) $\quad u_0 = 0$

$n = 1$) $\quad -0.4\,u_0 - 2.2\,u_1 + 3.6\,u_2 = 0$

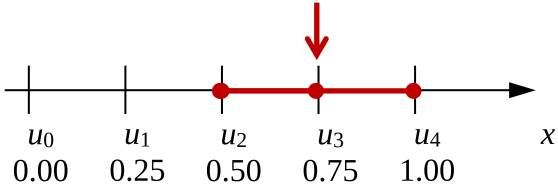
$n = 2$) $\quad -0.4\,u_1 - 2.2\,u_2 + 3.6\,u_3 = 0$

$n = 3$) $\quad -0.4\,u_2 - 2.2\,u_3 + 3.6\,u_4 = 0$

$n = 4$) $\quad u_4 = 1$

Para h = 0.25, el dominio queda:

[Cantidad de ecuaciones y de incógnitas?]



y la ecuación en diferencias (con α = 0.1, β = 1.0):

$$-0.4\,u_{n-1} - 2.2\,u_n + 3.6\,u_{n+1} = 0$$

Reemplazo n para cada nodo:

$n = 0$)	$u_0 = 0$
$n = 1$)	$-0.4\,u_0 - 2.2\,u_1 + 3.6\,u_2 = 0$
$n = 2$)	$-0.4\,u_1 - 2.2\,u_2 + 3.6\,u_3 = 0$
$n = 3$)	$-0.4\,u_2 - 2.2\,u_3 + 3.6\,u_4 = 0$
$n = 4$)	$u_4 = 1$

Puedo resolver el sistema de ecuaciones de dos maneras:

1) Construyendo un SEL de 3x3 con las incógnitas u_1, u_2, u_3 y despejando (más fácil para resolver a mano)

$$\begin{bmatrix} -2.2 & 3.6 & 0 \\ -0.4 & -2.2 & 3.6 \\ 0 & -0.4 & -2.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4*0 \\ 0 \\ -3.6*1 \end{bmatrix} \xrightarrow{resuelvo} \begin{cases} u_1 = 2.7471 \\ u_2 = 1.6788 \\ u_3 = 1.3311 \end{cases}$$

2) Construyendo un SEL de 5x5 que incluya a las condiciones de borde (más fácil para programar)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & -2.2 & 3.6 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & -2.2 & 3.6 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & -2.2 & 3.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{resuelvo} \begin{cases} u_0 = 0.0000 \\ u_1 = 2.7471 \\ u_2 = 1.6788 \\ u_3 = 1.3311 \\ u_4 = 1.0000 \end{cases}$$

b) Upwinding *[Orden?]*

$$u'' \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \qquad u' \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{h} \qquad u \approx u_n$$

Reemplazando en la ecuación diferencial: $\alpha \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \beta \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} + u_n = 0$

Reordenando: $u_{n-1}\left(\dfrac{\alpha}{h^2}\right) + u_n\left(-\dfrac{2\alpha}{h^2} - \dfrac{\beta}{h} + 1\right) + u_{n+1}\left(\dfrac{\alpha}{h^2} + \dfrac{\beta}{h}\right) = 0$ (ec. en diferencias)

Para h = 0.25, α = 0.1, β = 1.0: $1.6\,u_{n-1} - 6.2\,u_n + 5.6\,u_{n+1} = 0$

Reemplazo *n* para cada nodo:

$n = 0$) $\quad u_0 = 0$

$n = 1$) $\quad 1.6u_0 - 6.2u_1 + 5.6u_2 = 0$

$n = 2$) $\quad 1.6u_1 - 6.2u_2 + 5.6u_3 = 0$

$n = 3$) $\quad 1.6u_2 - 6.2u_3 + 5.6u_4 = 0$

$n = 4$) $\quad u_4 = 1$

Construyo el SEL:

$$\begin{bmatrix} -6.2 & 5.6 & 0 \\ 1.6 & -6.2 & 5.6 \\ 0 & 1.6 & -6.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6*0 \\ 0 \\ -5.6*1 \end{bmatrix} \xrightarrow{resuelvo} \begin{cases} u_1 = 1.3804 \\ u_2 = 1.5283 \\ u_3 = 1.2976 \end{cases}$$

c) Solución exacta

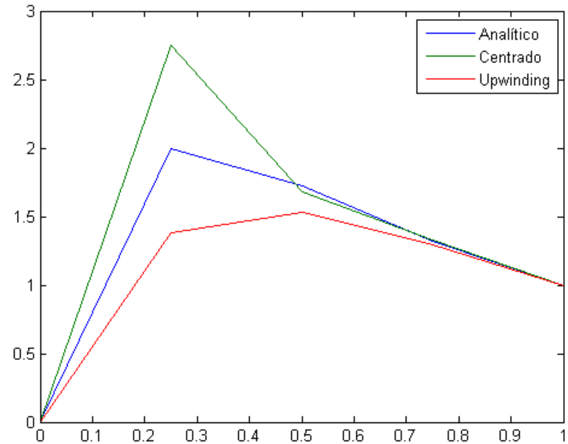
Reescribo la solución analítica: $u(x) = A\left(e^{-Bx} - e^{-Cx}\right)$

con: $A = \dfrac{1}{e^{-B} - e^{-C}}$ $\quad B = \dfrac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2\alpha}$ $\quad C = \dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2\alpha}$

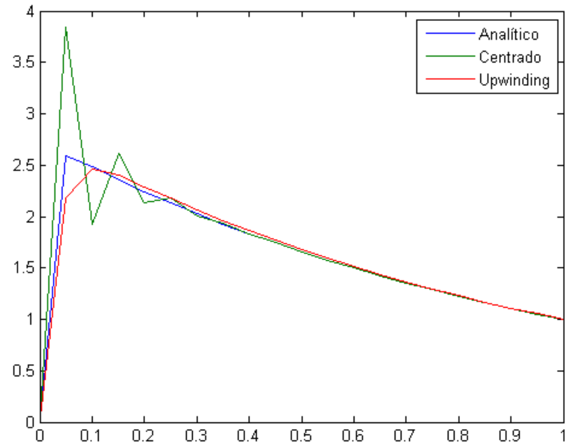
Especializo *u* en las abscisas empleadas antes:

$u_0 = u(x = 0.00) = 0.0000$
$u_1 = u(x = 0.25) = 1.9936$
$u_2 = u(x = 0.50) = 1.7210$
$u_3 = u(x = 0.75) = 1.3220$
$u_4 = u(x = 1.00) = 1.0000$

Grafico las dos soluciones calculadas versus la solución exacta y repito para $h = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 1.00$.



$h = 0.25,\ \alpha = 0.10,\ \beta = 1.00$



$h = 0.05,\ \alpha = 0.01,\ \beta = 1.00$

[Qué método aproxima mejor en qué zona?]

Condición de contorno sobre la derivada

$0.1\,u'' + u' + u = 0$; $0 \le x \le 1$; $u(0) = 0$; $u'(1) = -\,0.1$

[Cantidad de incógnitas y de ecuaciones?]

Método centrado: $u'' \approx \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$ $\quad u' \approx \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}$ $\quad u \approx u_n$

Ec en diferencias: $-0.4\,u_{n-1} - 2.2\,u_n + 3.6\,u_{n+1} = 0$

[Qué hago en n = 4?]

Reemplazo n para cada nodo:

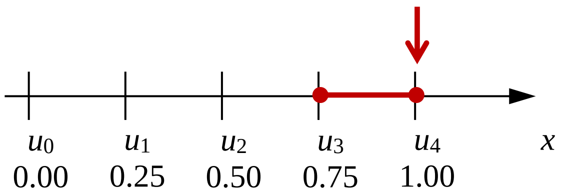
$n = 0$) $u_0 = 0$

$n = 1$) $-0.4u_0 - 2.2u_1 + 3.6u_2 = 0$

$n = 2$) $-0.4u_1 - 2.2u_2 + 3.6u_3 = 0$

$n = 3$) $-0.4u_2 - 2.2u_3 + 3.6u_4 = 0$

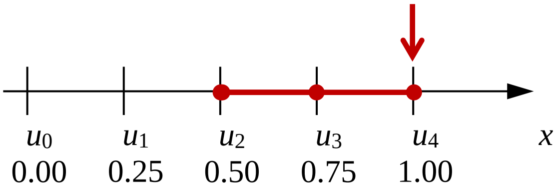
Opción 1: en $n = 4$ impongo la condición de borde derecha, discretizada como una derivada primera en atraso usando 2 puntos: $u_4' = -0.1 \approx \frac{u_4 - u_3}{h}$



$n = 4$) $-u_3 + u_4 = -0.025$

Inconveniente: las discretizaciones usadas en el método son O(2) pero la CB derecha se discretizó con O(1). Método no admisible pues “perdería el orden”.

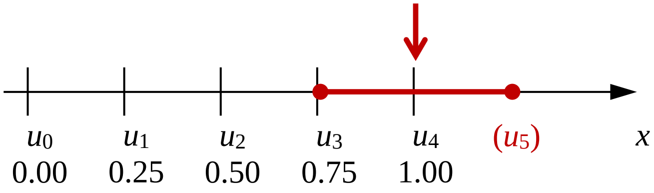
Opción 2: en $n = 4$ impongo la condición de borde derecha, discretizada como una derivada primera en atraso usando 3 puntos: $u_4' = -0.1 \approx \frac{3u_4 - 4u_3 + u_2}{2h}$



$n = 4$) $\quad u_2 - 4u_3 + 3u_4 = -0.05$

Método admisible pues sigue siendo O(2). Desventaja menor: usa discretización de derivada 1ra con 3 puntos.

Opción 3: en $n = 4$ impongo la condición de borde derecha, discretizada como una derivada primera centrada usando 2 puntos: $u_4' = -0.1 \approx \frac{u_5 - u_3}{2h}$. Se generó una nueva incógnita u_5 (nodo fantasma). Debo agregar una nueva ecuación, por ejemplo la ec en diferencias para el nodo 4:



$n = 4$) $\quad -u_3 + u_5 = -0.05 \quad$ discret centrada cond borde derecha

$n = 4$) $\quad -0.4u_3 - 2.2u_4 + 3.6u_5 = 0 \quad$ ec en diferencias

Se puede despejar u_5 de la 1ra y reemplazar en la 2da para eliminar al nodo fantasma del sistema:

$n = 4$) $\quad 3.2u_3 - 2.2u_4 = 0.18$

Método admisible pues sigue siendo O(2). Desventaja menor: se necesita incorporar un nodo fantasma, si bien luego se puede eliminar del sistema.