FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Análisis Numérico / Métodos Matemáticos y Numéricos (75.12/95.04/95.13)

Aproximación de funciones

Interpolación

si $m=n$ — solución única

INTERPOLACIÓN

$f^*(x)$ pasa por los puntos

$f^*(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ (polinomios)

Obtengo la misma $f^*(x)$ usando distintos métodos.

Métodos :

→Lagrange
→Newton
→Hermite
→Tchebychef

si $m>n$ — sobredeterminado

AJUSTE

$f^*(x)$ no pasa por los puntos

$f^*(x)$ puede ser cualquier función

Es necesario establecer un criterio: cuadrados mínimos.

Interpolación de Lagrange

n+1 → nodos
n → grado del polinomio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x)$$

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$P_n(x) = f(x_0)\, L_0(x) + f(x_1)\, L_1(x) + \ldots + f(x_n)\ \ L_n(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}$$

Interpolación de Lagrange

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando la fórmula de Lagrange para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4

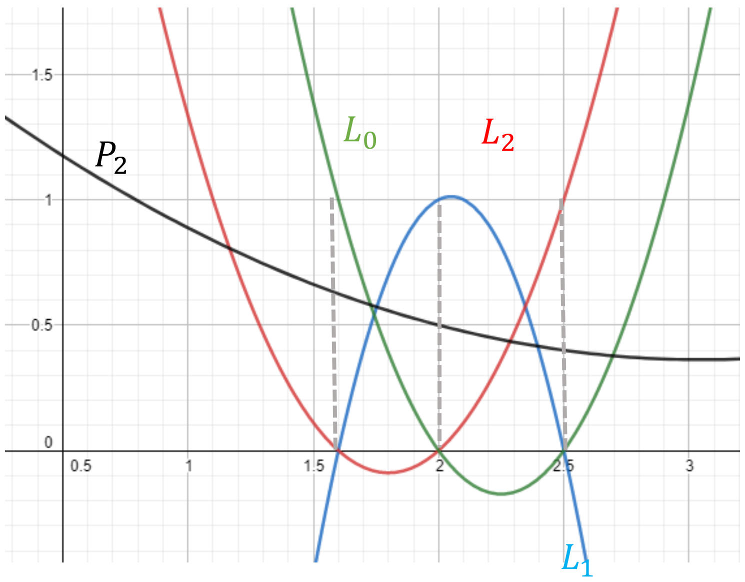
→3 datos
n=2

$$P_2(x) = f(x_0)\,L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x) + f(x_2)\,L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)\,(x-2{,}5)}{(1{,}6-2)\,(1{,}6-2{,}5)} = \frac{x^2-4{,}5x+5}{0{,}36}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} = \frac{(x-1{,}6)\,(x-2{,}5)}{(2-1{,}6)\,(2-2{,}5)} = \frac{x^2-4{,}1x+4}{-0{,}2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)} = \frac{(x-1{,}6)\,(x-2)}{(2{,}5-1{,}6)\,(2{,}5-2)} = \frac{x^2-3{,}6x+3{,}2}{0{,}45}$$



$$P_2(x) = 0{,}625\,\frac{x^2-4{,}5x+5}{0{,}36} + 0{,}5\,\frac{x^2-4{,}1x+4}{-0{,}2} + 0{,}4\,\frac{x^2-3{,}6x+3{,}2}{0{,}45}$$

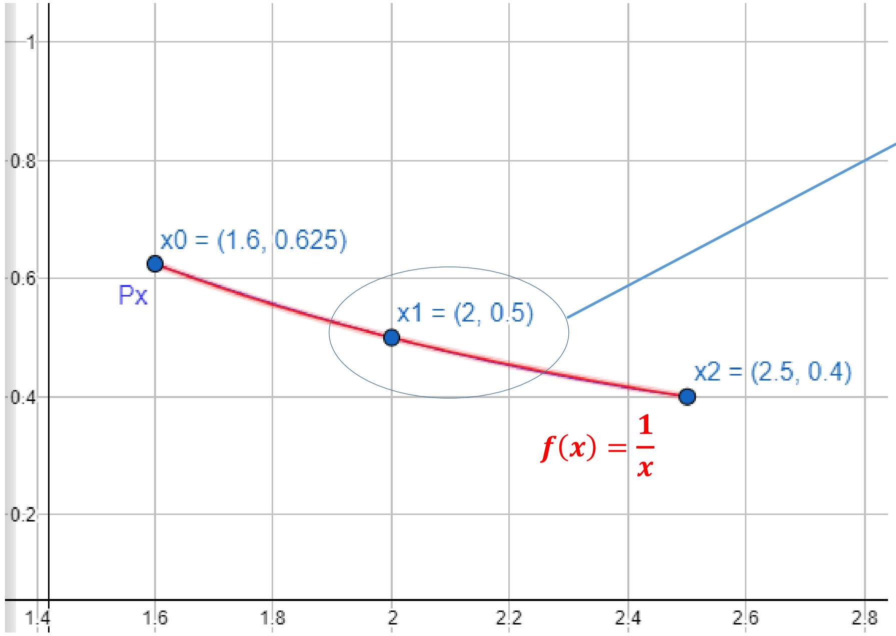
$$\boxed{P_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{61}{80}x + \frac{61}{40}}$$

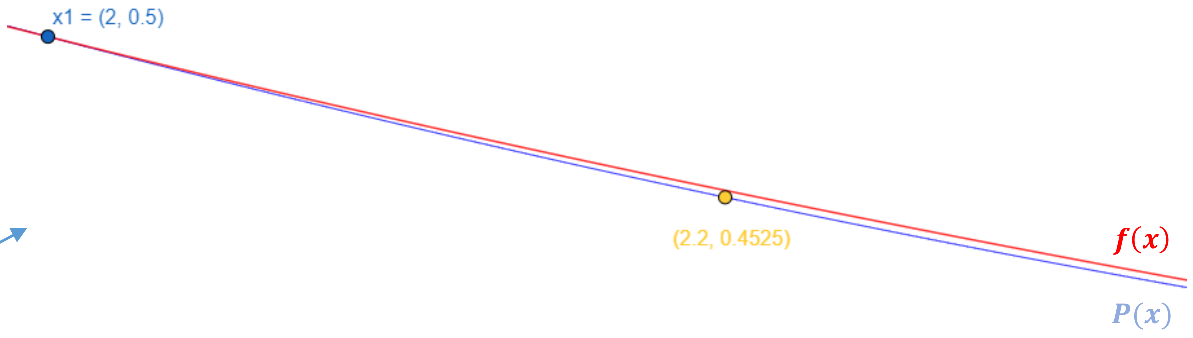
Interpolación de Lagrange

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando la fórmula de Lagrange para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

$$x = 2{,}2 \qquad \rightarrow \qquad P_2(2{,}2) = \frac{1}{8}2{,}2^2 - 2{,}2 + \frac{61}{40}$$

$$\boxed{P_2(2{,}2) = 0{,}4525}$$





$$f(2{,}2) = 0{,}45\overline{45}$$

$$P_2(2{,}2) = 0{,}4525$$

$$|f(2{,}2) - P_2(2{,}2)| = 0{,}002$$

Interpolación de Lagrange

Error de truncamiento:

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}_{e_T} \qquad \gamma \in [x_0, x_n] \text{ desconocido}$$

$$|f(x) - P_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right| \leq \underbrace{\max\left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right| \, |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}_{\text{Cota del error de truncamiento}} \qquad 1{,}6 \leq x \leq 2{,}5$$

Para el ejercicio:

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \max\left|\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right| \, |(x-1{,}6)(x-2)(x-2{,}5)| \qquad con \quad f^{(3)}(x) = -6\frac{1}{x^4}$$

$$\boxed{|f(x) - P_2(x)| \leq \left|\frac{-6}{3!\,1{,}6^4}\right| \, |(x-1{,}6)(x-2)(x-2{,}5)|}$$

Cota del e_T

$$|f(2{,}2) - P_2(2{,}2)| \leq 0{,}006$$

Interpolación de Lagrange

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando la fórmula de Lagrange para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4
$x_3 = 4$	0,25

→4 datos
grado del polinomio n=3

$$P_3(x) = f(x_0)\,L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x) + f(x_2)\,L_2(x) + \boldsymbol{f(x_3)\,L_3(x)}$$

$$L_{,0}(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)\,(x-2{,}5)(x-4)}{(1{,}6-2)\,(1{,}6-2{,}5)(1{,}6-4)} = \frac{x^3-8{,}5x^2+23x-20}{-0{,}864}$$

Recalcular!

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1{,}6)\,(x-2{,}5)(x-4)}{(2-1{,}6)\,(2-2{,}5)(2-4)} = \frac{x^3-8{,}1x^2+20{,}4x-16}{0{,}4}$$

$$L_{,2}(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1{,}6)\,(x-2)(x-4)}{(2{,}5-1{,}6)\,(2{,}5-2)(2{,}5-4)} = \frac{x^3-7{,}6x^2+17{,}6x-12{,}8}{-0{,}675}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)\,(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1{,}6)\,(x-2)(x-2{,}5)}{(4-1{,}6)\,(4-2)(4-2{,}5)} = \frac{x^3-6{,}1x^2+12{,}2x-8}{7{,}2}$$

$$\boxed{P_3(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{101}{320}x^2 - \frac{183}{160}x + \frac{71}{40}}$$

Interpolación de Lagrange

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando la fórmula de Lagrange para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

$$P_3(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{101}{320}x^2 - \frac{183}{160}x + \frac{71}{40} \qquad x = 2,2 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{P_3(2,2) = 0,4536}$$

$$f(2,2) = 0,45\overline{45} \qquad |f(2,2) - P_3(2,2)| = 0,0009$$

$$P_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{61}{80}x + \frac{61}{40} \qquad x = 2,2 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{P_2(2,2) = 0,4525}$$

$$f(2,2) = 0,45\overline{45} \qquad |f(2,2) - P_2(2,2)| = 0,002$$

¿Siempre a mayor grado del P(x), mejor es la aproximación de f(x)?

Interpolación de Newton

n+1 → nodos
n → grado del polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k]\,(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n\,(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$ Familia triangular

Interpolación de Newton

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Newton para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4
$x_3 = 4$	0,25

→4 datos, grado P(x) , n=3

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f[x, x]}$	$\boldsymbol{f[x, x, x]}$	$\boldsymbol{f[x, x, x, x]}$
x_0	0,625			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$		
			$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
x_1	0,5			
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	0,4			
			$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$		
x_3	0,25			

Interpolación de Newton

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Newton para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4
$x_3 = 4$	0,25

→4 datos, grado P(x) , n=3

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1]\,(x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\,(x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f[x,x]}$	$\boldsymbol{f[x,x,x]}$	$\boldsymbol{f[x,x,x,x]}$
$x_0 = 1{,}6$	0,625			
		$f[x_0,x_1] = \frac{0{,}5-0{,}625}{2-1{,}6} = -0{,}3125$		
$x_1 = 2$	0,5		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{-0{,}2-(-0{,}3125)}{2{,}5-1{,}6} = 0{,}125$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{0{,}4-0{,}5}{2{,}5-2} = -0{,}2$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{0{,}05-0{,}125}{4-1{,}6} = -0{,}03125$
$x_2 = 2{,}5$	0,4		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{-0{,}1-(-0{,}2)}{4-2} = 0{,}05$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{0{,}25-0{,}4}{4-2{,}5} = -0{,}1$		
$x_3 = 4$	0,25			

Interpolación de Newton

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Newton para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4
$x_3 = 4$	0,25

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1]\,(x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\,(x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P_3(x) = 0{,}625 - 0{,}3125\,(x-1{,}6) + 0{,}125\,(x-1{,}6)(x-2) - 0{,}03125\,(x-1{,}6)(x-2)(x-2{,}5)$$

$$\boxed{P_3(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{101}{320}x^2 - \frac{183}{160}x + \frac{71}{40}}$$

x	$f(x)$	$f[x,x]$	$f[x,x,x]$	$f[x,x,x,x]$
$x_0 = 1{,}6$	0,625			
		$f[x_0,x_1] = \frac{0{,}5-0{,}625}{2-1{,}6} = -0{,}3125$		
$x_1 = 2$	0,5		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{-0{,}2-(-0{,}3125)}{2{,}5-1{,}6} = 0{,}125$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{0{,}4-0{,}5}{2{,}5-2} = -0{,}2$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{0{,}05-0{,}125}{4-1{,}6} = -0{,}03125$
$x_2 = 2{,}5$	0,4		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{-0{,}1-(-0{,}2)}{4-2} = 0{,}05$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{0{,}25-0{,}4}{4-2{,}5} = -0{,}1$		
$x_3 = 4$	0,2			

Interpolación de Newton

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Newton para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

$$P_3(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{101}{320}x^2 - \frac{183}{160}x + \frac{71}{40} \qquad x = 2{,}2 \quad \rightarrow \quad \boxed{P_3(2{,}2) = 0{,}4536} \quad \equiv \text{Lagrange}$$

$$f(2{,}2) = 0{,}45\overline{45} \qquad |f(2{,}2) - P_3(2{,}2)| = 0{,}0009$$

Siempre van a ser iguales?

Interpolación de Newton

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Newton para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4
$x_3 = 4$	0,25

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f[x\,,x\,]}$	$\boldsymbol{f[x\,,x\,,x]}$	$\boldsymbol{f[x\,,x\,,x,x]}$
$x_0 = 1{,}6$	0,625			
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{0{,}5-0{,}625}{2-1{,}6} = -0{,}3125$		
$x_1 = 2$	0,5		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{-0{,}2-(-0{,}3125)}{2{,}5-1{,}6} = 0{,}125$	
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{0{,}4-0{,}5}{2{,}5-2} = -0{,}2$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{0{,}05-0{,}125}{4-1{,}6} = -0{,}03125$
$x_2 = 2{,}5$	0,4		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{-0{,}1-(-0{,}2)}{4-2} = 0{,}05$	
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{0{,}25-0{,}4}{4-2{,}5} = -0{,}1$		
$x_3 = 4$	0,25			

Interpolación de Newton

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Newton para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4
$x_3 = 4$	0,25

$$P_3(x) = f(x_3) + f[x_2, x_3]\,(x - x_3) + f[x_1, x_2, x_3]\,(x - x_3)(x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$

$$\boxed{P_3(2{,}2) = 0{,}4536}$$

x	$f(x)$	$f[x,x]$	$f[x,x,x]$	$f[x,x,x,x]$
$x_0 = 1{,}6$	0,625			
		$f[x_0,x_1] = \frac{0{,}5 - 0{,}625}{2 - 1{,}6} = -0{,}3125$		
$x_1 = 2$	0,5		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{-0{,}2 - (-0{,}3125)}{2{,}5 - 1{,}6} = 0{,}125$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{0{,}4 - 0{,}5}{2{,}5 - 2} = -0{,}2$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{0{,}05 - 0{,}125}{4 - 1{,}6} = -0{,}03125$
$x_2 = 2{,}5$	0,4		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{-0{,}1 - (-0{,}2)}{4 - 2} = 0{,}05$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{0{,}25 - 0{,}4}{4 - 2{,}5} = -0{,}1$		
$x_3 = 4$	0,25			

Interpolación de Newton

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Newton para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4
$x_3 = 4$	0,25

$\Rightarrow$

X	f(x)
$x_0 = 2{,}5$	0,4
$x_1 = 1{,}6$	0,625
$x_2 = 4$	0,25
$x_3 = 2$	0,5

Y si altero el orden de las xi?

$$\boxed{P_3(2{,}2) = 0{,}4536}$$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f[x\,,x\,]}$	$\boldsymbol{f[x\,,x\,,x]}$	$\boldsymbol{f[x\,,x\,,x,x]}$
$x_0 = 2{,}5$	0,4			
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$		
			$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$	
$x_1 = 1{,}6$	0,625			
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]}{x_3 - x_0}$
$x_2 = 4$	0,25			
			$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$		
$x_3 = 2$	0,5			

Interpolación de Newton

Error de truncamiento:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x^*_{n+1}](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$\gamma \in [x_0, x_n]$ desconocido

Aproximo el error agregando un nodo x_{n+1} $\Rightarrow \approx f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

$$P_4(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{P_3(x)} + \underbrace{\boldsymbol{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}_{\text{Aproximación de } \boldsymbol{e_T}}$$

(no es cota!)

Interpolación de Newton

x	$f(x)$	$f[x,x]$	$f[x,x,x]$	$f[x,x,x,x]$	$f[x,x,x,x,x]$
x_0=1,6	0,625	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
$x_1 = 2$	0,5	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
$x_2 = 2{,}5$	0,4	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4,]$		
$x_3 = 4$	0,25	$f[x_3,x_4]$			
$x_4 = 3{,}2$	0,3125				

No hace falta recalcular todo

Aproximación del $\boldsymbol{e_T}$ del Polinomio $P_3(x)$ del Eje. $\Rightarrow$ $f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Interpolación de Hermite (a partir de diferencias divididas)

Al polinomio interpolante le pedimos:

- $P(\,x_k) = f(\,x_k)$ con $\mathrm{k}= 0{,}1 \ldots, n$
- $P'(\,x_k) = f'(\,x_k)$

En la tabla repetiremos filas donde exista el dato de la derivada

Método para Interpolar: Lagrange (Teórica), Dif. Divididas (Práctica)

Interpolación de Hermite (a partir de diferencias divididas)

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Hermite con Dif. Divididas, para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)	f'(x)
$x_0 = 2$	0,5	-0,25
$x_1 = 2,5$	0,4	-0,16

→4 datos, grado P(x) , n=3

	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f[x,x]}$	$\boldsymbol{f[x,x,x]}$	$\boldsymbol{f[x,x,x,x]}$
	x_0=2	0,5			
			$f[x_0,x_0] = f'(x_0) = -0,25$		
Duplico la entrada →	$x_0 = 2$	0,5		$f[x_0,x_0,x_1] = 0,1$	
			$f[x_0,x_1] = -0,5$		$f[x_0,x_0,x_1,x_1] = -0,4$
	$x_1 = 2,5$	0,4		$f[x_0,x_1,x_1] = 0,08$	
			$f[x_1,x_1] = f'(x_1) = -0,16$		
Duplico la entrada →	$x_1 = 2,5$	0,4			

$$f[x_0,x_0] = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x_0 - x_0} \rightarrow \ ind$$

$$\lim_{x \to x_0} f[x_0,x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Interpolación de Hermite (a partir de diferencias divididas)

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Hermite con Dif. Divididas, para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x)	f'(x)
$x_0 = 2$	0,5	-0,25
$x_1 = 2,5$	0,4	-0,16

→4 datos, grado P(x) , n=3

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f[x,x]}$	$\boldsymbol{f[x,x,x]}$	$\boldsymbol{f[x,x,x,x]}$
x_0=2	0,5			
		$f[x_0,x_0] = f'(x_0) = -0,25$		
			$f[x_0,x_0,x_1] = 0,1$	
$x_0 = 2$	0,5			
		$f[x_0,x_1] = -0,5$		$f[x_0,x_0,x_1,x_1] = -0,4$
$x_1 = 2,5$	0,4			
			$f[x_0,x_1,x_1] = 0,08$	
		$f[x_1,x_1] = f'(x_1) = -0,16$		
$x_1 = 2,5$	0,4			

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_0]\,(x - x_0) + f[x_0,x_0,x_1]\,(x - x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x - x_0)^2(x - x_1)$$

$$P_3(x) = 0,5 + (-0,25)\,(x - 2) + 0,1\,(x - 2)^2 + (-0,4)(x - 2)^2(x - 2,5)$$

$$\boxed{P_3(2,2) = 0,4548}$$

$$|f(2,2) - P_3(2,2)| \leq 0,00025$$

Interpolación de Hermite (a partir de diferencias divididas)

Eje. Encontrar el polinomio interpolante utilizando el método de Hermite con Dif. Divididas, para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

¿Aproximación del error?

x	$f(x)$	$f[x,x]$	$f[x,x,x]$	$f[x,x,x,x]$	
$x_0 = 2$	0,5				
		$f[x_0,x_0] = f'(x_0) = -0{,}25$			
$x_0 = 2$	0,5		$f[x_0,x_0,x_1] = 0{,}1$		
		$f[x_0,x_1] = -0{,}5$		$f[x_0,x_0,x_1,x_1] = -0{,}4$	
$x_1 = 2{,}5$	0,4		$f[x_0,x_1,x_1] = 0{,}08$		$f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2]$
		$f[x_1,x_1] = f'(x_1) = -0{,}16$		$f[x_0,x_1,x_1,x_2]$	
$x_1 = 2{,}5$	0,4		$f[x_1,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$			
$x_2 = 4$	0,25				

Aproximación del e_T del Polinomio $P_3(x)$ $\Rightarrow$ $f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2](x-x_0)^2(x-x_1)^2$

Fenómeno de Runge – Polinomios de Tchebychef

Fenómeno de Runge

→ n>10
→ nodos equiespaciados
→típico en funciones pares

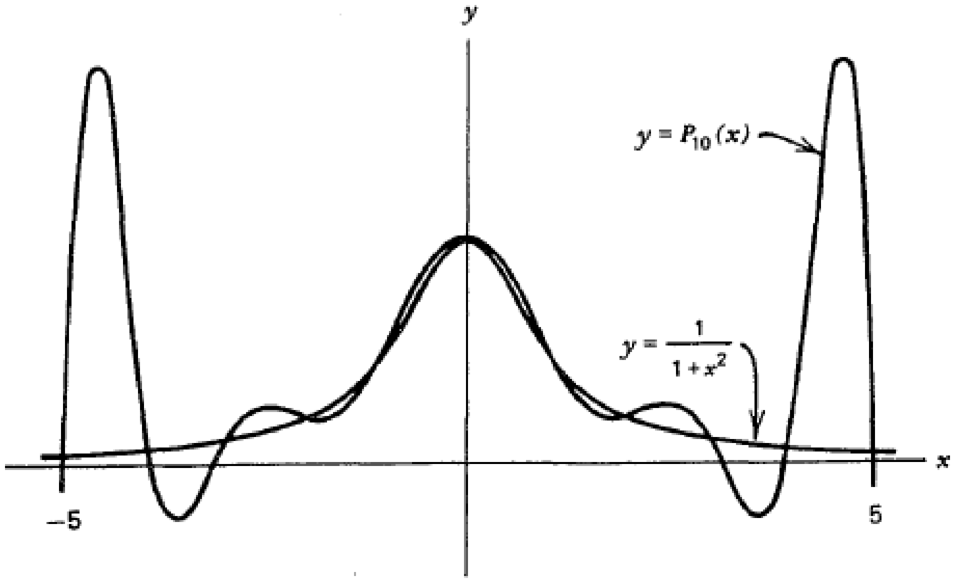


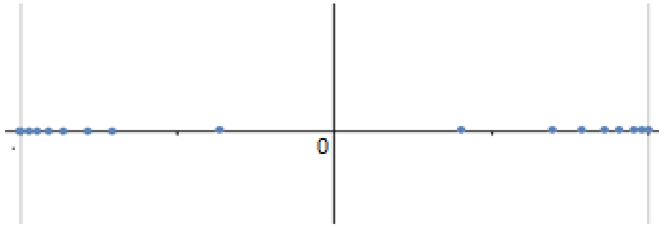
Figure 3.6 Interpolation to $1/(1 + x^2)$.

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}\underbrace{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}_{\text{Busco que sea mínimo}}$$

$\Downarrow$

Absisas de Tchebychef

$$\boxed{t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right) \qquad [-1,1]\ con\ k = 0,..,n}$$



Fenómeno de Runge – Polinomios de Tchebychef

Eje. Encontrar el polinomio interpolante aplicando las absisas de Tchebychef para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x) =1/x
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4

Necesito conocer la f(x)

1→ Calculo las absisas de Tchebychef

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

k	tk
0	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866025$
1	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
2	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}866025$

$$\rightarrow\ t_0 = \cos\left(\frac{2*0+1}{3}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

2→ Transformo las absisas del intervalo [-1,1] al intervalo de trabajo [1,6 , 2,5]

$$\tilde{x}_k = a + \frac{b-a}{2}\,(t_k+1) \qquad [a,b]$$

k	tk	$\tilde{x}_k$
0	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866025$	2,439711
1	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	2,05
2	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}866025$	1,660288

$$\rightarrow\ \tilde{x}_0 = 1{,}6 + \frac{2{,}5-1{,}6}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+1\right)$$

Nuevos nodos de trabajo x0, x1 y x2

Fenómeno de Runge – Polinomios de Tchebychef

Eje. Encontrar el polinomio interpolante aplicando las absisas de Tchebychef para los siguientes datos, y calcular una aproximación de f(x) para x=2,2:

X	f(x) =1/x
$x_0 = 1{,}6$	0,625
$x_1 = 2$	0,5
$x_2 = 2{,}5$	0,4

3→Calculo los valores de $f(\tilde{x}_k)$

k	tk	$\tilde{x}_k$	$f(\tilde{x}_k)$
0	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866025$	2,439711	0,4098845
1	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	2,05	0,487804
2	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}866025$	1,660288	0,602304

$f[x_0, x_1] = -0{,}199947$

$f[x_1, x_2] = -0{,}293796$

$f[x_0, x_1, x_2] = 0{,}120408$

4→Interpolo con alguno de los métodos vistos → Newton

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\,(x - 2{,}439711) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - 2{,}439711)(x - 2{,}05)$$

$$\boxed{P_2(2{,}2) = 0{,}453484}$$

MUCHAS GRACIAS!