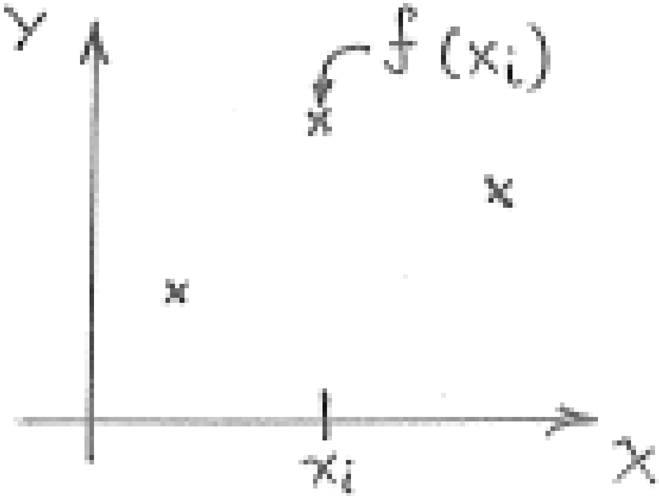
Análisis Numérico

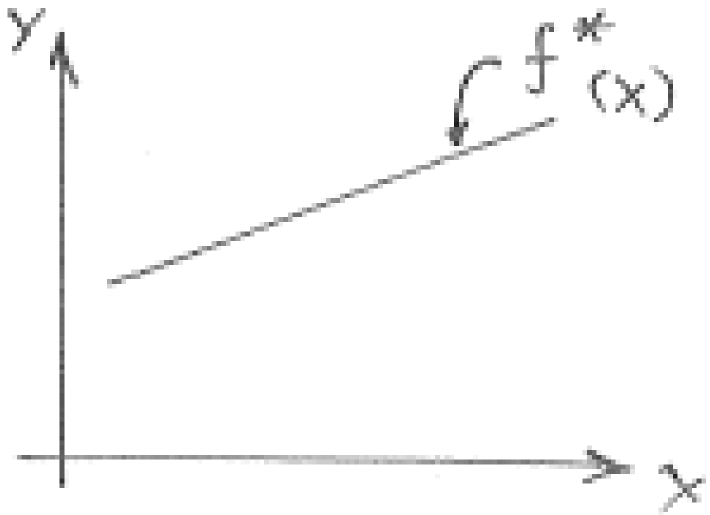
Aproximación de funciones

Ajuste por cuadrados mínimos

Clase: Aproximación de funciones

Problema general:





$m+1$ datos

x_i	
$f(x_i)$	

ó $f(x)$ analítica

$m+1$ incógnitas

$$f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \, \varphi_j(x)$$

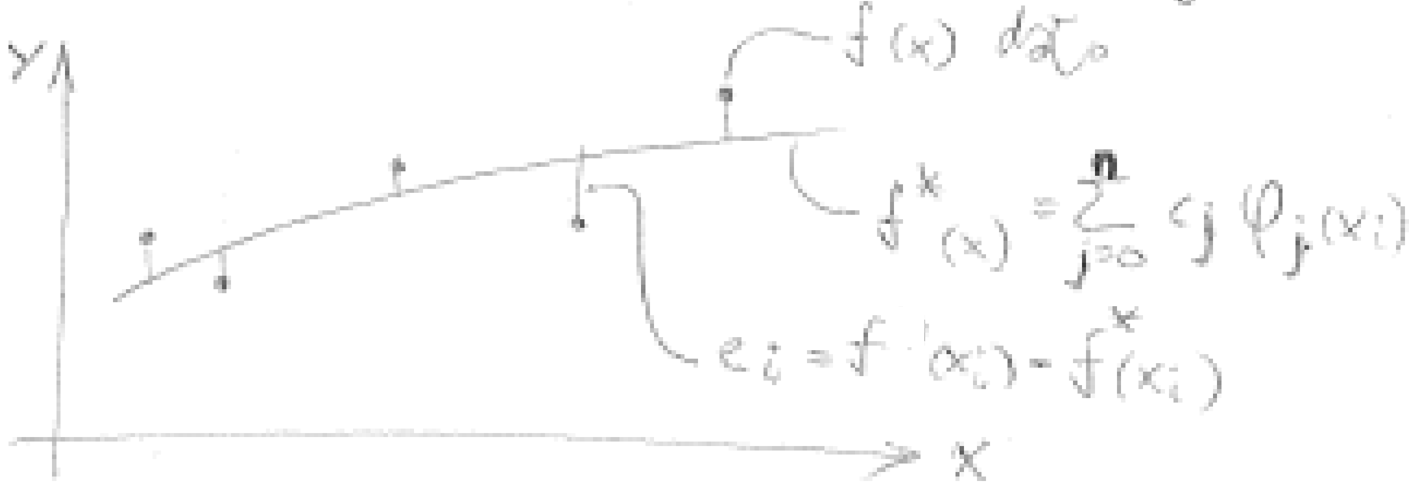
funciones definidas

coef. incógnita

si $m = n$ — solución única	si $m > n$ — sobredeterminado
INTERPOLACIÓN	AJUSTE
$f^*(x)$ pasa por los puntos	$f^*(x)$ no pasa por los puntos
$f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ (polinomios)	$f^*(x)$ puede ser cualquier función
Obtengo la misma $f^*(x)$ usando distintos métodos.	Es necesario establecer un criterio: cuadrados mínimos.

Ajuste $m > n$

Problema sobredeterminado. Impongo criterio de ajuste: cuad. mínimos



$$\underset{\text{error cuadrático}}{e} = \sum_{i=0}^{m} \left(f(x_i) - f^*(x_i)\right)^2$$

Cuadrados mínimos: $\dfrac{\partial e}{\partial c_j} = 0 \quad \forall\, j = 0, 1, \dots, n$

(Ec. normales : $\sum_{j=0}^{n} c_j (\varphi_j \cdot \varphi_k) = f(x_i) \cdot \varphi_k$)

es un SEL $\left[\varphi_j \cdot \varphi_k \right] \left[c_j \right] = \left[f \cdot \varphi_k \right]$

$\exists$ sol. única si:

Condic: φ_j l.i: cuando $\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j = 0$ implica $c_j = 0 \ \forall j$

Si son ortog, mat. diag — Si son ortonorm, mat ident.

cuando $\varphi_j \cdot \varphi_k = 0 \ \forall j \neq k$

$\neq 0 \ \forall j = k$

DEDUCCIÓN ECUACIONES NORMALES

$$e = \sum_{i=0}^{m} \left(f(x_i) - f^*(x_i)\right) \quad \text{con } f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)$$

Cuadrados mínimos: $\dfrac{\partial e}{\partial c_k} = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$

$$\frac{\partial e}{\partial c_k} = \frac{\partial}{\partial c_k} \sum_{i=0}^{m} \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x_i)\right)^2 = 2\left[\sum_{i=0}^{m} \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x_i)\right) \cdot \underbrace{\left(-\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial c_j}{\partial c_k} \varphi_j(x_i)\right)}_{= -\varphi_k(x_i)}\right] = -2\left[\sum_{i=0}^{m} \left(f(x_i)\varphi_k(x_i)\right) - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \left(c_j \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i)\right)\right]$$

pero todo esto $= 0$

Por ende: $\sum_{i=0}^{m}\left(f(x_i)\varphi_k(x_i)\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(c_j\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right)$

O también: $\begin{bmatrix}\varphi_j \cdot \varphi_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f \cdot \varphi_k\end{bmatrix}$ ec. normales

Sol. única si φ_j son l.i.: $\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j = 0 \iff c_j = 0 \ \forall j$

Mat. diagonal si φ ortogonales: $\varphi_j \cdot \varphi_k = 0$ si $j \neq k$

$\neq 0$ si $j = k$

Mat. identidad si φ ortonorm.: $\varphi_j \cdot \varphi_k = 1$ si $j = k$

Apéndice:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial c_k^2} = -2\frac{\partial}{\partial c_k}\left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_k(x_i) - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right) =$$

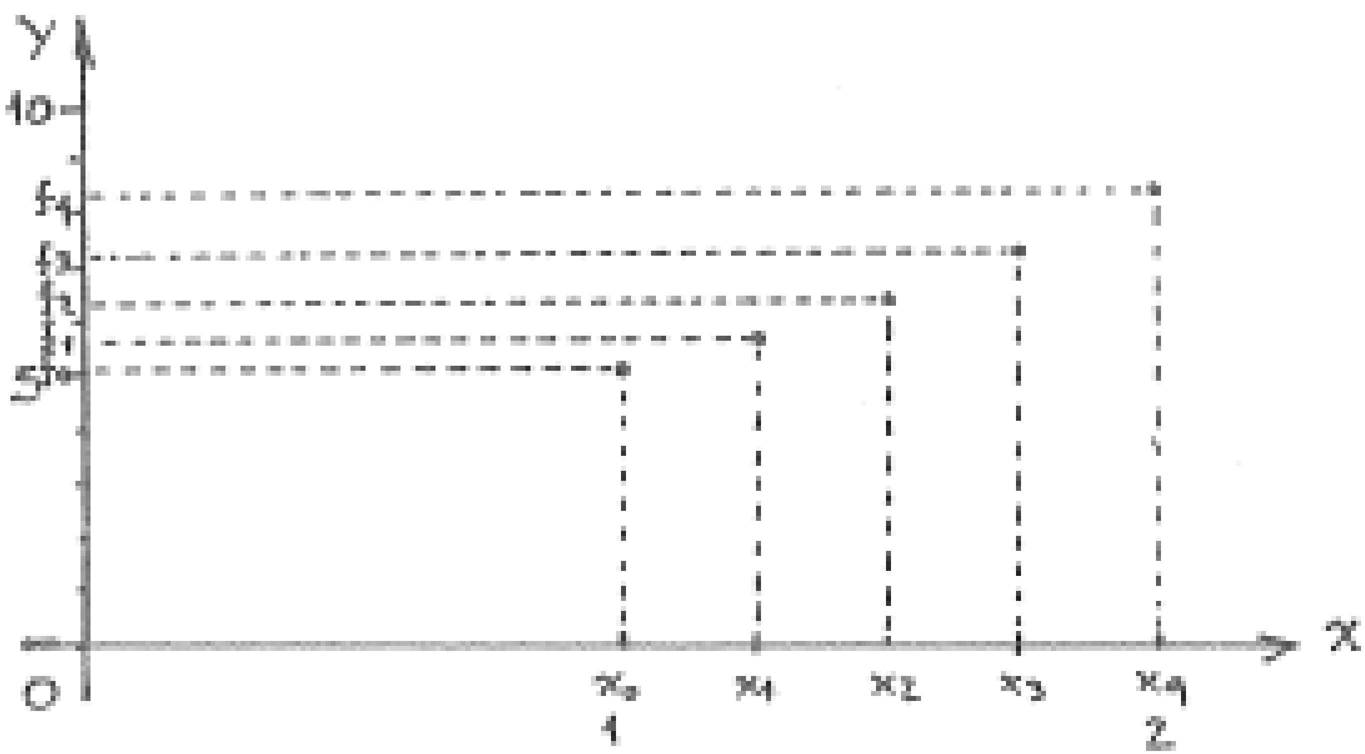
$$= 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial c_j}{\partial c_k}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = 2\sum_{i=0}^{n} \left(\varphi_k(x_i)\right)^2 \geq 0$$

Con lo cual, pedir $\frac{\partial e}{\partial c_k} = 0$ es equivalente a minimizar e.

ej 5) Elegir curva aprox. $(f^*(x))$ y analizar el error

x_i	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
$f(x_i)$	5,10	5,79	6,53	7,45	8,46

$n=4$



5a) Propongo parábola: $f^*(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

$n = 2$

a_j: coef. incóg.

$\varphi_j(x)$: funciones dato

$\varphi_0(x) = 1$ — $\varphi_0 = (1; 1; 1; 1; 1)$

$\varphi_1(x) = x$ — $\varphi_1 = (1{,}00; 1{,}25; 1{,}50; 1{,}75; 2{,}00)$

$\varphi_2(x) = x^2$ — $\varphi_2 = (1; 1{,}5625; 2{,}25; 3{,}0625; 4)$

$f(x)$: dato — $f = (5{,}10; 5{,}79; 6{,}53; 7{,}45; 8{,}46)$

$\varphi_0 \cdot \varphi_0 = 5$

$\varphi_0 \cdot \varphi_1 = 7{,}5 = \varphi_1 \cdot \varphi_0$

$\varphi_0 \cdot \varphi_2 = \varphi_2 \cdot \varphi_0 = 11{,}875$

$\varphi_1 \cdot \varphi_1 = 11{,}875$

$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \varphi_2 \cdot \varphi_1 = 19{,}688$

$\varphi_2 \cdot \varphi_2 = 33{,}883$

$f \cdot \varphi_0 = 33{,}33$

$f \cdot \varphi_1 = 52{,}09$

$f \cdot \varphi_2 = 85{,}50$

Armo SEL:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} \varphi_0 \cdot \varphi_0 & \varphi_1 \cdot \varphi_0 & \varphi_2 \cdot \varphi_0 & f \cdot \varphi_0 \\ \varphi_1 \cdot \varphi_0 & \varphi_1 \cdot \varphi_1 & \varphi_1 \cdot \varphi_2 & f \cdot \varphi_1 \\ \varphi_2 \cdot \varphi_0 & \varphi_1 \cdot \varphi_2 & \varphi_2 \cdot \varphi_2 & f \cdot \varphi_2 \end{array}\right]$$

Y resuelvo:
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}6294 \\ 0{,}54057 \\ 0{,}93714 \end{bmatrix}$$

Reemplazo: $f^*(x) = 3{,}6249 + 0{,}54057\, x + 0{,}93714\, x^2$

Evalúo el error: $e = \sum_{i=0}^{m} \Big(\underbrace{f(x_i)}_{\text{dato}} - \underbrace{f^*(x_i)}_{\text{evalúo}} \Big)^2 = 0{,}0009$

5b) Propongo exponencial: $f^*(x) = a_0 e^{a_1 x}$

No queda expresada como combinación lineal de funciones.

Si puedo, transformo. Sino, derivo nuevas ec. normales.

Prop. log: $\ln a + \ln b = \ln(ab)$; $\ln a^b = b \ln a$

Entonces: $f^*(x) = a_0 e^{a_1 x}$

$$\ln(f^*(x)) = \ln(a_0 e^{a_1 x})$$

$$\underbrace{\ln(f^*(x))} = \underbrace{\ln a_0} + \underbrace{a_1} x$$

Nuevo problema: $g^*(x) = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot x$ con: $\begin{cases} b_0 = \ln a_0 \longrightarrow a_0 = e^{b_0} \\ b_1 = a_1 \\ g^*(x) = \ln(f^*(x)) \end{cases}$

$n = 1$

$\varphi_0(x) = 1$ —— $\varphi_0 = (1; 1; 1; 1; 1)$

$\varphi_1(x) = x$ —— $\varphi_1 = (1{,}00; 1{,}25; 1{,}50; 1{,}75; 2{,}00)$

$\gamma(x) = \ln(f(x))$ —— $\gamma = (1{,}62924; 1{,}75613; 1{,}87641; 2{,}00821; 2{,}13535)$

$\varphi_0 \cdot \varphi_0 = 5$

$\varphi_0 \cdot \varphi_1 = \varphi_1 \cdot \varphi_0 = 7{,}5$ $\qquad \gamma \cdot \varphi_0 = 9{,}40534$

$\varphi_1 \cdot \varphi_1 = 11{,}875$ $\qquad \gamma \cdot \varphi_1 = 14{,}4241$

Armo SEL: $\left[\begin{array}{cc|c} \varphi_0 \cdot \varphi_0 & \varphi_0 \cdot \varphi_1 & g \cdot \varphi_0 \\ \varphi_1 \cdot \varphi_0 & \varphi_1 \cdot \varphi_1 & g \cdot \varphi_1 \end{array}\right]$

Y resuelvo: $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}12245 \\ 0{,}505744 \end{bmatrix}$ Pero ojo: $a_0 = e^{b_0} = 3{,}07237$

$a_1 = b_1 = 0{,}505744$

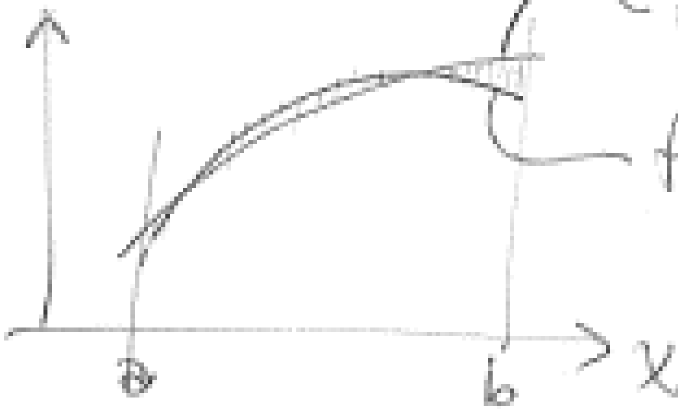
Reemplazo: $f^*(x) = 3{,}07237\, e^{0{,}505744\, x}$

Evalúo el error: $e = \sum_{i=0}^{n} \Big(\underset{\text{dato}}{f(x_i)} - \underset{\text{evalúo}}{f^*(x_i)} \Big)^2 = 0{,}0012$

Conclusión: a nuestra elección de datos la aproximó mejor la parábola que la exponencial.

5c) Propongo sinusoidal: no puedo llevarlo a combinación lineal de fciones.

Ajuste de funciones:



$$f(x)$$

$$f^*(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad ; k=0,1\dots n$$

$$e = \int_a^b [f(x) - f^*(x)]^2 dx = \int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k]^2 dx$$

$$\frac{\partial e}{\partial a_j} = 0 = \frac{\partial}{\partial a_j}\left\{\int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k]^2 dx\right\} \quad ; j=0,1\dots n$$

Derivando: $2\int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k] x^j dx = 0$

Distribuyendo el producto: $\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\int_a^b x^{k+j}\,dx}_{\frac{x^{k+j+1}}{k+j+1}\Big|_a^b = \frac{b^{k+j+1}-a^{k+j+1}}{k+j+1}} = \int_a^b x^j f(x)\,dx \quad \forall j = 0,1,\ldots,n$

Luego: $$\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\frac{b^{k+j+1}-a^{k+j+1}}{k+j+1}}_{H_{j+1\ k+1}} = \int_a^b x^j f(x)\,dx$$

La matriz que se genera a partir de estos coef H es la matriz de Hilbert, que está mal condicionada, es decir que el sistema es sensible a errores inherentes.

ej 9) Ajuste de funciones

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \, H_{j+1\,k+1} = \int_a^b f(x)\, x^j \, dx \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

$$k = 0, 1, \ldots, n$$

$$f^*(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$H_{j+1\,k+1} = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

c) $f(x) = \cos(\pi x)$; $n = 2 \longrightarrow P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Intervalo : $[a, b] = [0, 1]$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \cos(\pi x)\, x^0\, dx \\ \int_0^1 \cos(\pi x)\, x^1\, dx \\ \int_0^1 \cos(\pi x)\, x^2\, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)\right]_0^1 \\ \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 \\ \left[\frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi^2} - \frac{x\cos(\pi x)}{\pi}\right)\right]_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi^2} \\ -\frac{2}{\pi^2} \end{bmatrix}$$

Resuelvo el SEL: $\underline{\underline{H}} \cdot \underline{a} = \underline{\Gamma} \longrightarrow \underline{a} = \begin{bmatrix} 1{,}216 \\ -2{,}432 \\ 0{,}000 \end{bmatrix}$