PROBLEMAS DE VALORES INICIALES (Tercera parte)

ANÁLISIS NUMÉRICO/MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS

(75.12/95.04/95.13)

CURSO TARELA

Ejemplo – paso simple

2) Dada la ecuación diferencial $y' = (t-2)y^2$, con condición inicial $y(1) = 1$, hallar una aproximación a $y(2)$ empleando el método de Euler implícito con paso de cálculo $h = 0{,}2$.

Solución analítica:

$$y(t) = \frac{-2}{t^2 - 4t + 1}$$

Particularidad: es una EDO no lineal y el método de discretización es implícito.

Problema: no vamos a poder despejar $u^{(n)}$.

Solución: trabajar con métodos de resolución de ENL.

- Bisección
- Newton Raphson
- Punto fijo

$$y' = f(y(t), t) = (t-2)y^2$$

Ejemplo – paso simple

Discretizo:

$$t^{(n)} \to 1 + nh$$
$$y(t^{(n)}) \to u^{(n)}$$

$$\left(t^{(n)} - 2\right) y(t^{(n)})^2 \to (1 + nh - 2){u^{(n)}}^2$$

$$u^{(0)} = 1$$

En el método de trabajo:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[(1 + (n+1)h - 2)\left(u^{(n+1)}\right)^2\right]$$

Ejemplo – paso simple

$n = 0$:

$$-0{,}16\left(u^{(1)}\right)^2 - u^{(1)} + u^{(0)} = 0$$

¿Qué solución elijo?

¿Y si trabajo con una expresión cúbica?

¿Y si no tengo la solución analítica?

De la discretización puedo definir una función de punto fijo:

$$u^{(n+1)}{}_{(k+1)} = u^{(n)} + h * \left[(1 + (n+1)h - 2)\left(u^{(n+1)}{}_{(k)}\right)^2\right]$$

$$u^{(1)}{}_{(k+1)} = 1 - 0{,}16\left(u^{(1)}{}_{(k)}\right)^2$$

¿Semilla? $\boldsymbol{u^{(0)}}$

Ejemplo – paso simple

k	$u^{(1)}{}_{k}$	$u^{(1)}{}_{k+1}$	ε
0	1	0,84	0,16
1	0,84	0,887104	0,047104
2	0,887104	0,874087439	0,01301656
3	**0,87408744**	**0,877755384**	**0,00366794**
4	0,87775538	0,876727278	0,00102811
5	0,87672728	0,877015885	0,00028861

$$\varepsilon = \left|u^{(1)}{}_{k+1} - u^{(1)}{}_{k}\right| < 0{,}01$$

Ejemplo – paso simple

$n = 1$:

$$u^{(2)}{}_{(k+1)} = 0{,}877755384 - 0{,}12\left(u^{(2)}{}_{(k)}\right)^2$$

k	$u^{(2)}{}_{k}$	$u^{(2)}{}_{k+1}$	ε
0	0,87775538	0,75448266	0,12327272
1	0,75448266	0,78667633	0,03219367
2	**0,78667633**	**0,77873784**	**0,00793849**
3	0,77873784	0,78072616	0,00198832
4	0,78072616	0,78023005	0,00049612
5	0,78023005	0,78035396	0,00012391

Ejemplo – paso simple

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$y(t^{(n)})$	ε
0	1	1	1	0
1	1,2	0,87775538	0,84745763	0,03029776
2	1,4	0,77873784	0,75757576	0,02116208
3	1,6	0,71671438	0,70422535	0,01248902
4	1,8	0,66448146	0,67567568	-0,01119422
5	2	0,68086874	0,66666667	0,01420208

Métodos multipaso

Considerando la siguiente ecuación diferencial ordinaria con condición inicial:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Hallar por medio de los métodos de Adams-Bashforth y de Adams-Moulton de orden 3 el valor de $y(2)$ *con paso de cálculo* $h = 0{,}1$*, consiguiendo los primeros puntos por medio de los métodos de paso simple de Euler implícito, Punto Medio y Runge Kutta de orden 4.*

Métodos multipaso

Adams-Bashforth:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{12} * \left[23f\left(u^{(n)}, t^{(n)}\right) - 16f\left(u^{(n-1)}, t^{(n-1)}\right) + 35f\left(u^{(n-2)}, t^{(n-2)}\right)\right]$$

Adams-Moulton:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{12} * \left[5f\left(u^{(n+1)}, t^{(n+1)}\right) + 8f\left(u^{(n)}, t^{(n)}\right) - f\left(u^{(n-1)}, t^{(n-1)}\right)\right]$$

	Euler Implícito	Punto medio	Runge Kutta O(4)
$u^{(0)}$	2	2	2
$u^{(1)}$	2,2222	2,21	2,2103
$u^{(2)}$	2,4691	2,4421	2,4428

Métodos multipaso

Si aplicamos Adams-Bashforth:

$$u^{(3)} = u^{(2)} + \frac{h}{12} * \left[23f\left(u^{(2)}, t^{(2)}\right) - 16f\left(u^{(1)}, t^{(1)}\right) + 35f\left(u^{(0)}, t^{(0)}\right)\right]$$

$$u^{(4)} = u^{(3)} + \frac{h}{12} * \left[23f\left(u^{(3)}, t^{(3)}\right) - 16f\left(u^{(2)}, t^{(2)}\right) + 35f\left(u^{(1)}, t^{(1)}\right)\right]$$

$$\ldots$$

Si aplicamos Adams-Moulton, debemos transformar a expresión explícita:

$$u^{(n+1)} = \frac{u^{(n)} + \frac{h}{12} * \left[8u^{(n)} - u^{(n-1)}\right]}{1 - \frac{5}{12}h}$$

Métodos multipaso

$\mathbf{u}^{(10)} \sim y(2)$	Adams-Bashforth	Adams - Moulton
Euler implícito	5,49420117	5,46619171
Punto Medio	5,4334065	5,43591325
Runge Kutta O(4)	5,43510125	5,43675967

Análisis de estabilidad

Adams-Bashforth para este ejemplo:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{12} * \left[23u^{(n)} - 16u^{(n-1)} + 35u^{(n-2)}\right]$$

Cambio de variables:

$$v^{(n+1)} = u^{(n)} \implies v^{(n)} = u^{(n-1)}$$
$$w^{(n+1)} = v^{(n)} = u^{(n-1)} \implies w^{(n)} = u^{(n-2)}$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{23}{12}h & -\frac{16}{12}h & \frac{35}{12}h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \\ w^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \\ w^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

Análisis de estabilidad

Aplicamos perturbaciones:

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{23}{12}h & -\frac{16}{12}h & \frac{35}{12}h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{(n)}+\delta u^{(n)} \\ v^{(n)}+\delta v^{(n)} \\ w^{(n)}+\delta w^{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u^{(n+1)}+\delta u^{(n+1)} \\ v^{(n+1)}+\delta v^{(n+1)} \\ w^{(n+1)}+\delta w^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}+\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{h} & -\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{h} & \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{h} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{n})} \\ \boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{n})} \\ \boldsymbol{w}^{(\boldsymbol{n})} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1+\frac{23}{12}h & -\frac{16}{12}h & \frac{35}{12}h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta u^{(n)} \\ \delta v^{(n)} \\ \delta w^{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} \\ \boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} \\ \boldsymbol{w}^{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \delta u^{(n+1)} \\ \delta v^{(n+1)} \\ \delta w^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

Análisis de estabilidad

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{23}{12}h & -\frac{16}{12}h & \frac{35}{12}h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta u^{(n)} \\ \delta v^{(n)} \\ \delta w^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta u^{(n+1)} \\ \delta v^{(n+1)} \\ \delta w^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

MATRÍZ DE AMPLIFICACIÓN

Aseguramos estabilidad si: $|\lambda_i| < 1$

Ejercicio de final:

Considere el siguiente problema matemático:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \beta * \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 * e^{-\frac{y}{\alpha}}$$
$$y(0) = y_0$$
$$y'(0) = 0$$

Con: $g = 9{,}8$, $y_0 = 40000$, $\alpha = 7000$, $\beta = 0{,}005$

- *Discretizar el problema matemático utilizando el método RK2.*
- *Avanzar numéricamente la solución durante 3 pasos, para un paso* $h = 0{,}1$.

RK2:

$$u^{(n+1)}{}_{*} = u^{(n)} + hf\left(u^{(n)}, t^{(n)}\right)$$
$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{2}\left[f\left(u^{(n)}, t^{(n)}\right) + f\left(u^{(n+1)}{}_{*}, t^{(n+1)}\right)\right]$$

Ejercicio de final:

TIPO DE EDO:	LINEAL	NO LINEAL
GRADO DE EDO:	PRIMER GRADO	SEGUNDO GRADO O MÁS
TIPO DE MÉTODO:	IMPLÍCITO	EXPLÍCITO
	PASO SIMPLE	MULTIPASO

Ejercicio de final:

Cambio de variables:

$$\begin{cases} y' = z = f(y,z,t) \\ z' = -g + \beta * z^2 * e^{-\frac{y}{\alpha}} = F(y,z,t) \end{cases}$$

Discretización:

$$t^{(n)} \to t_0 + nh$$

$$y(t^{(n)}) \to u^{(n)}$$
$$z(t^{(n)}) \to v^{(n)}$$

$$u^{(0)} = 40000$$
$$v^{(0)} = 0$$

Ejercicio de final:

En el método:

$$u^{(n+1)}{}_{*} = u^{(n)} + hf\left(u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)}\right)$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{2}\left[f\left(u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)}\right) + f\left(u^{(n+1)}{}_{*}, v^{(n+1)}{}_{*}, t^{(n+1)}\right)\right]$$

$$v^{(n+1)}{}_{*} = v^{(n)} + hF\left(u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)}\right)$$

$$v^{(n+1)} = v^{(n)} + \frac{h}{2}\left[F\left(u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)}\right) + F\left(u^{(n+1)}{}_{*}, v^{(n+1)}{}_{*}, t^{(n+1)}\right)\right]$$

Ejercicio de final:

En el método:

$$\boldsymbol{u^{(n+1)}}_* = \boldsymbol{u^{(n)}} + \boldsymbol{hv^{(n)}}$$

$$\boldsymbol{u^{(n+1)}} = \boldsymbol{u^{(n)}} + \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}\left[\boldsymbol{v^{(n)}} + \boldsymbol{v^{(n+1)}}_*\right]$$

$$\boldsymbol{v^{(n+1)}}_* = \boldsymbol{v^{(n)}} + \boldsymbol{h}\left[-\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\beta}{\boldsymbol{v^{(n)}}}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{u^{(n)}}}{\boldsymbol{\alpha}}}\right]$$

$$\boldsymbol{v^{(n+1)}} = \boldsymbol{v^{(n)}} + \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}\left[\left(-\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\beta}{\boldsymbol{v^{(n)}}}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{u^{(n)}}}{\boldsymbol{\alpha}}}\right) + \left(-\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\beta}{\boldsymbol{v^{(n+1)}}_*}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{u^{(n+1)}}_*}{\boldsymbol{\alpha}}}\right)\right]$$

Ejercicio de final:

n	$f(\bar{X})$	$F(\bar{X})$	$u^{(n+1)}{}_{*}$	$v^{(n+1)}{}_{*}$	$f(\bar{Y})$	$F(\bar{Y})$	$u^{(n+1)}$	$v^{(n+1)}$
0	0	-9,8	40000	-0,98	-0,98	-9,79998416	39999,951	-0,97999921
1	-0,97999921	-9,79998416	39999,853	-1,95999762	-1,95999762	-9,79993664	39999,804	-1,95999525
2	-1,95999525	-9,79993664	39999,608	-2,93998891	-2,93998891	-9,79985744	39999,559	-2,93998495

¡MUCHAS GRACIAS!