PROBLEMAS DE VALORES INICIALES (Primera parte)

ANÁLISIS NUMÉRICO/MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS

(75.12/95.04/95.13)

CURSO TARELA

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} y' = -y + t^2 + 2t - 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Resolver el sistema en el intervalo [0, 2] por métodos numéricos (Euler explícito y Euler implícito). Utilizar pasos de cálculo 0,4; 0,2 y 0,1.

Solución analítica: $y(t) = 2e^{-t} + t^2 - 2.$

Resolución

Discretizamos:

- Variable independiente: $t^{(n)} \to nh$
- Ecuación diferencial:

$$y\left(t^{(n)}\right) = y^{(n)} \to u^{(n)}$$

$$y'\left(t^{(n)}\right) = y'^{(n)} \to \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{h}$$

- Condición inicial:

$$y\left(t^{(0)}\right) = y^{(0)} \to u^{(0)}$$

En particular: $u^{(0)} = 0$

Euler explícito

$$y' = f(y(t), t)$$

$$\boxed{\boldsymbol{u}^{(n+1)} = \boldsymbol{u}^{(n)} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^{(n)}, \boldsymbol{t}^{(n)})}$$

En nuestro ejemplo:

$$\boldsymbol{u}^{(n+1)} = \boldsymbol{u}^{(n)} + \boldsymbol{h} * \left[-\boldsymbol{u}^{(n)} + (\boldsymbol{nh})^{2} + \boldsymbol{2nh} - \boldsymbol{2}\right]$$

Euler explícito

Para h = 0,4:

$$u^{(0)} = 0$$

$$\boldsymbol{u^{(1)} = u^{(0)} + 0,4 * \left[-u^{(0)} + (0 * 0,4)^2 + 2 * 0 * 0,4 - 2\right]}$$

$$\boldsymbol{u^{(2)} = u^{(1)} + 0,4 * \left[-u^{(1)} + (1 * 0,4)^2 + 2 * 1 * 0,4 - 2\right]}$$

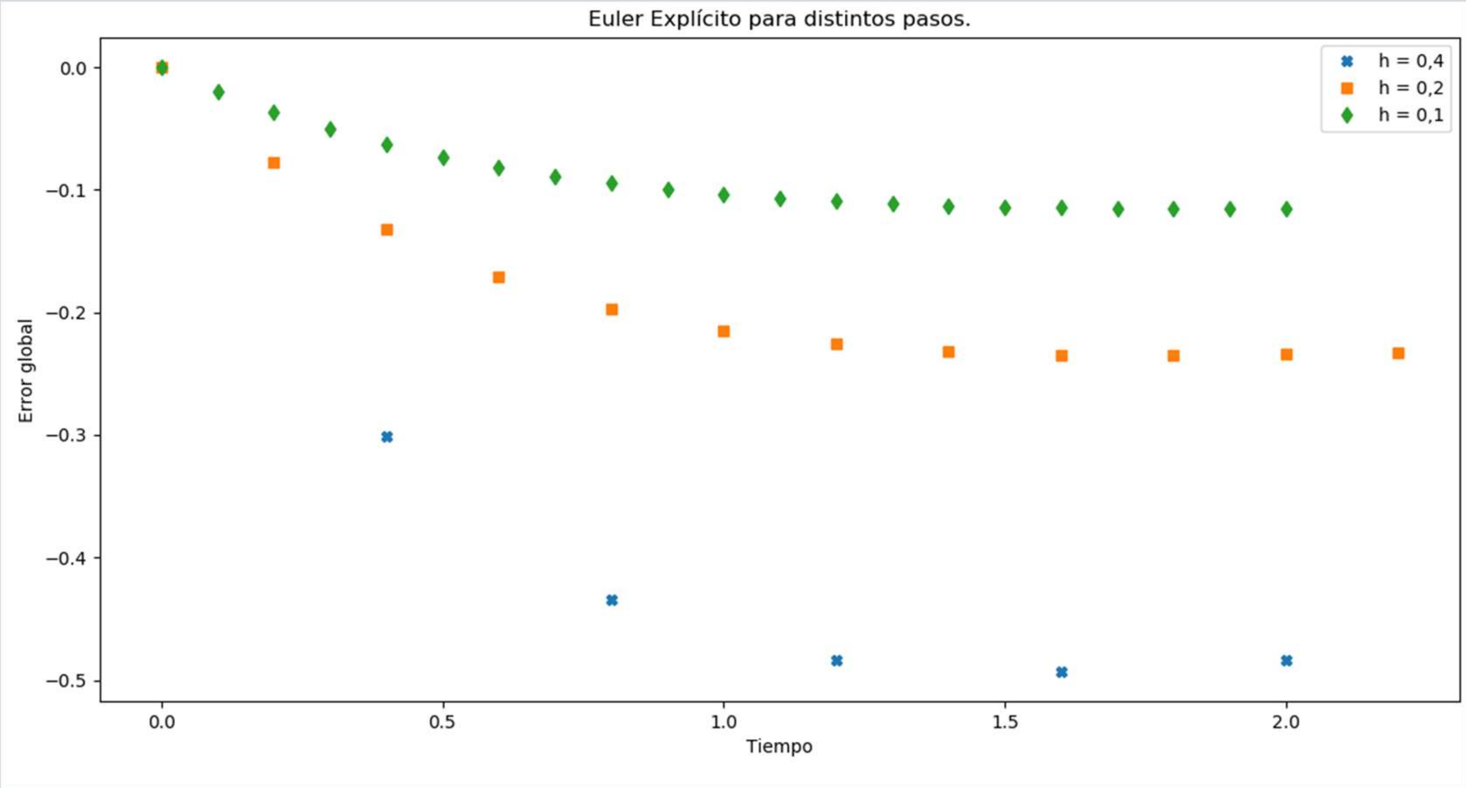
$$\boldsymbol{u^{(3)} = u^{(2)} + 0,4 * \left[-u^{(2)} + (2 * 0,4)^2 + 2 * 2 * 0,4 - 2\right]}$$

...

Euler explícito

h	$0,4$				
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	ε
0	0	0	-0,8	-0,49935991	-0,30064009
1	0,4	-0,8	-0,896	-0,46134207	-0,43465793
2	0,8	-0,896	-0,4416	0,04238842	-0,48398842
3	1,2	-0,4416	0,47104	0,96379304	-0,49275304
4	1,6	0,47104	1,786624	2,27067057	-0,48404657
5	2	1,786624	3,4719744	3,94143591	-0,46946151

Euler explícito



Euler implícito

$$y' = f(y(t), t)$$

$$\boxed{\boldsymbol{u}^{(n+1)} = \boldsymbol{u}^{(n)} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^{(n+1)}, \boldsymbol{t}^{(n+1)})}$$

En nuestro ejemplo:

$$\boldsymbol{u}^{(n+1)} = \boldsymbol{u}^{(n)} + \boldsymbol{h} * \left[-\boldsymbol{u}^{(n+1)} + ((\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\boldsymbol{h})^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\boldsymbol{h} - \mathbf{2}\right]$$

Euler implícito

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[-u^{(n+1)} + ((n+1)h)^2 + 2(n+1)h - 2\right]$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[\left((n+1)h\right)^2 + 2(n+1)h - 2\right] - h * u^{(n+1)}$$

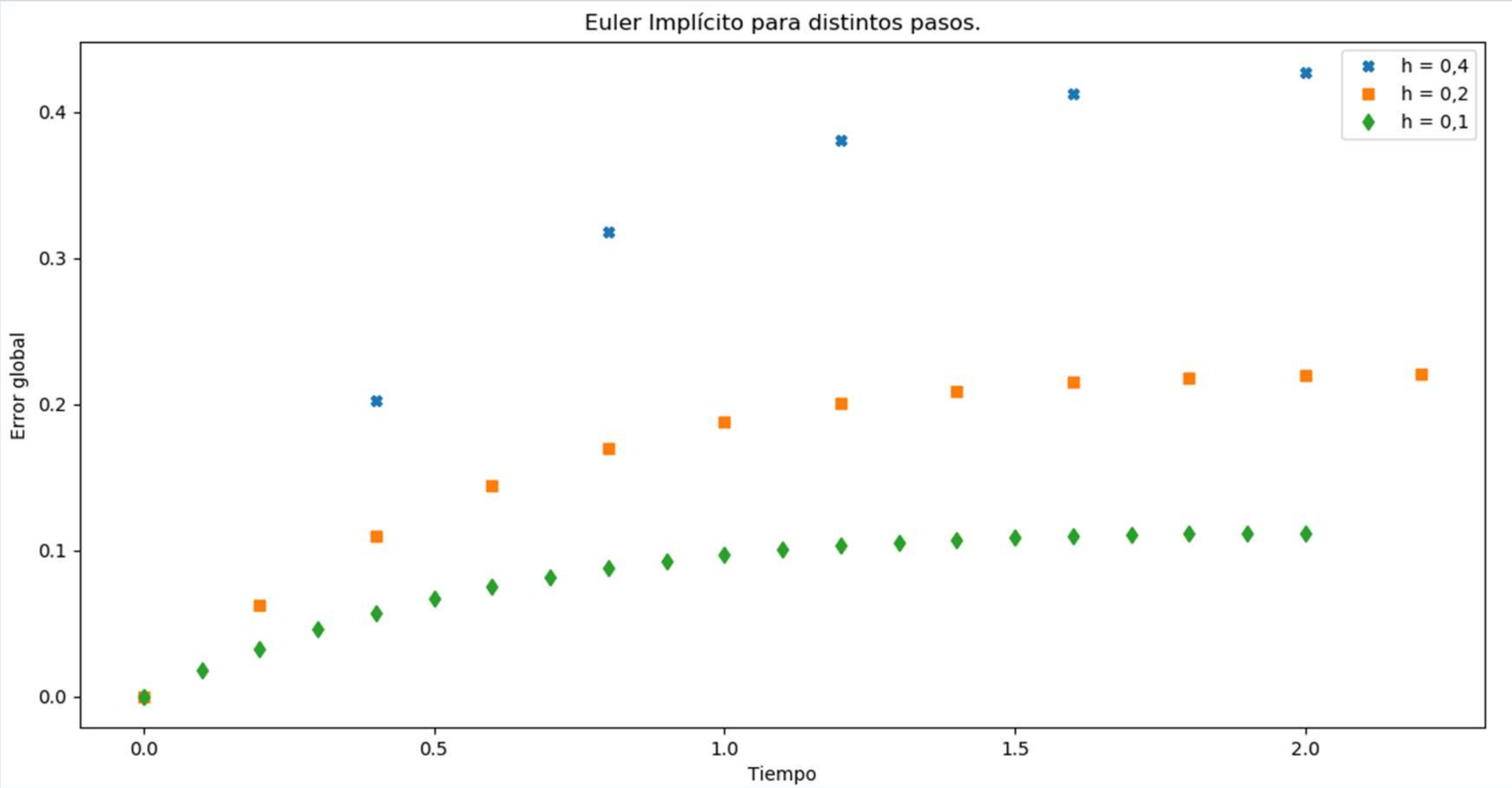
$$(h+1)u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[\left((n+1)h\right)^2 + 2(n+1)h - 2\right]$$

$$\boldsymbol{u^{(n+1)} = \frac{u^{(n)} + h * \left[\left((n+1)h\right)^2 + 2(n+1)h - 2\right]}{h+1}}$$

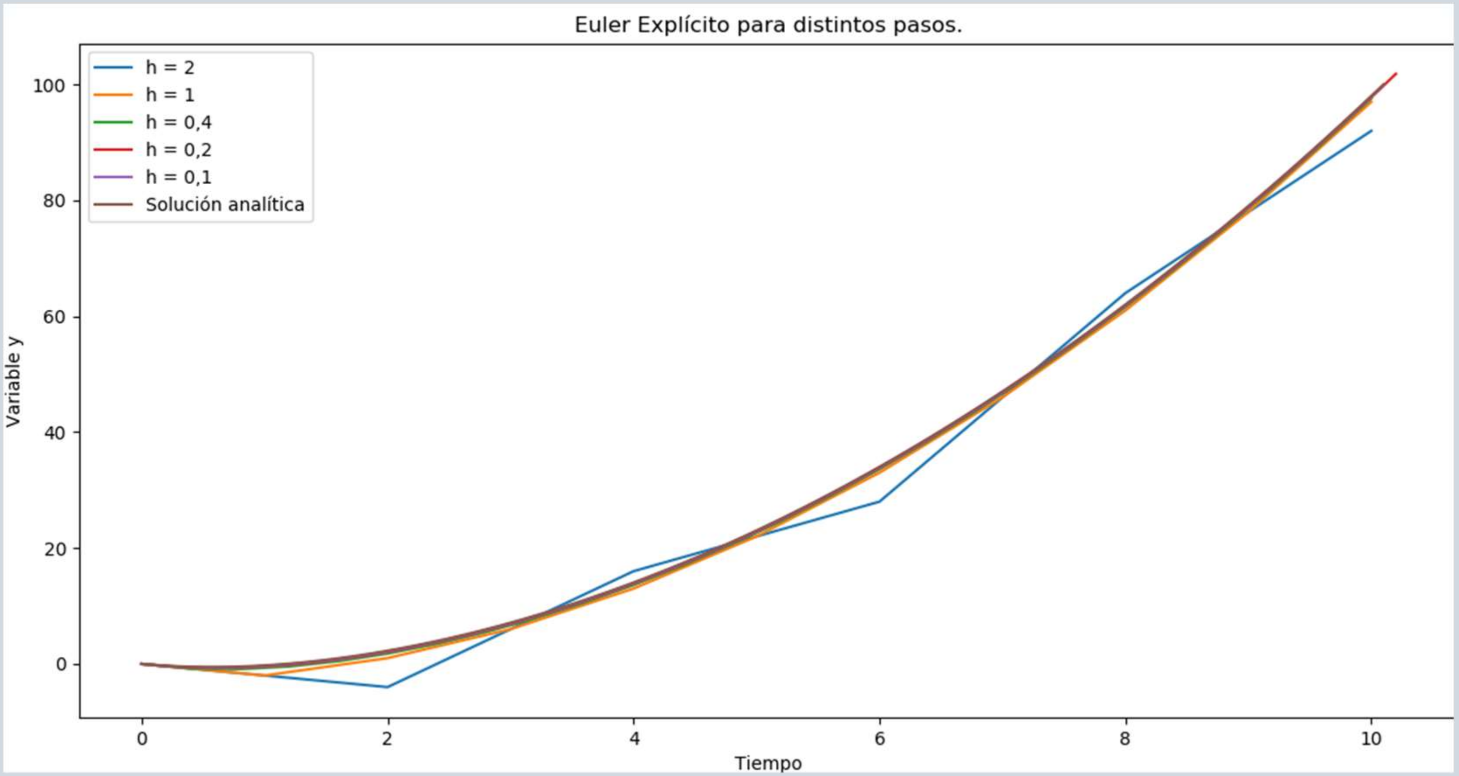
Euler implícito

h	**0,4**				
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	ε
0	0	0	-0,29714286	-0,49935991	0,20221705
1	0,4	-0,29714286	-0,14367347	-0,46134207	0,3176686
2	0,8	-0,14367347	0,42309038	0,04238842	0,38070196
3	1,2	0,42309038	1,37649313	0,96379304	0,41270009
4	1,6	1,37649313	2,69749509	2,27067057	0,42682452
5	2	2,69749509	4,37249649	3,94143591	0,43106059

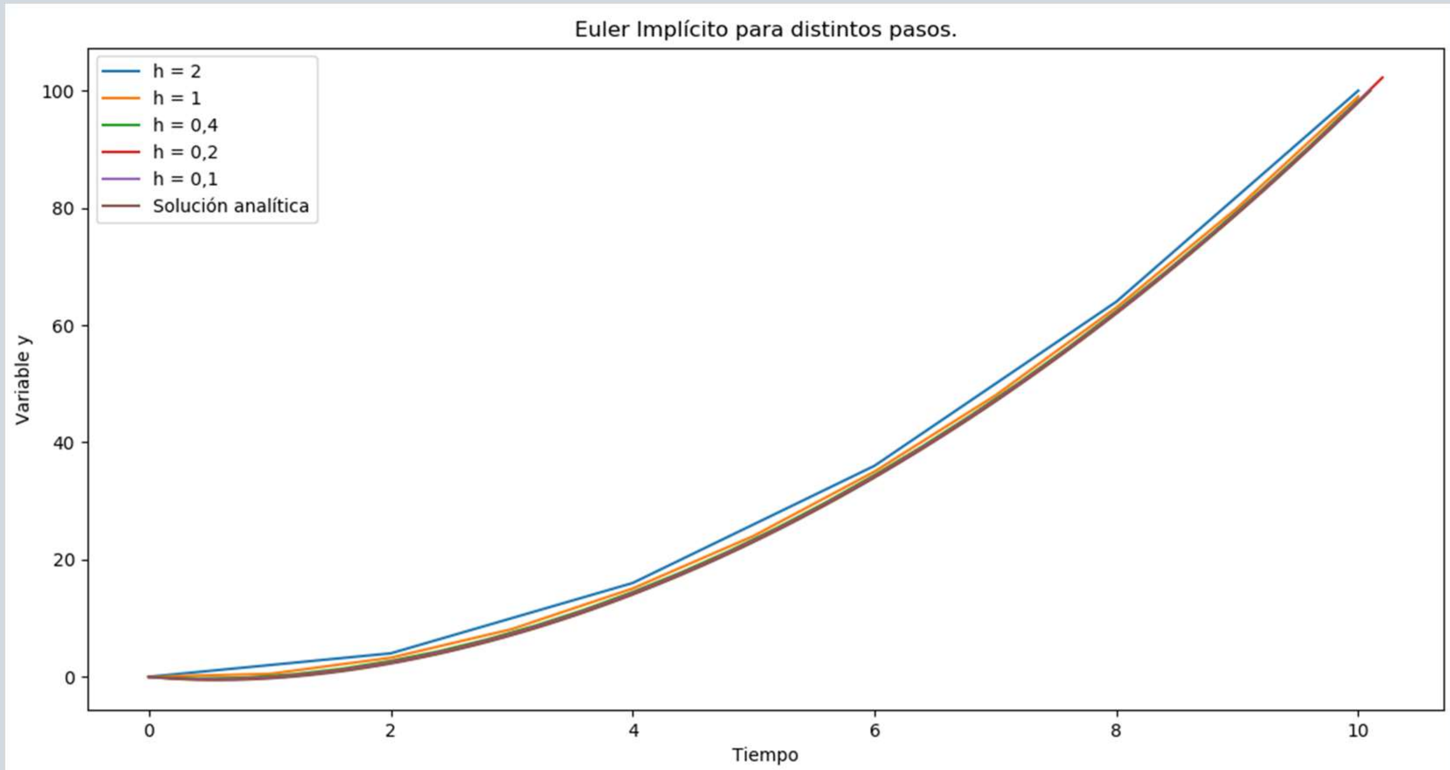
Euler implícito



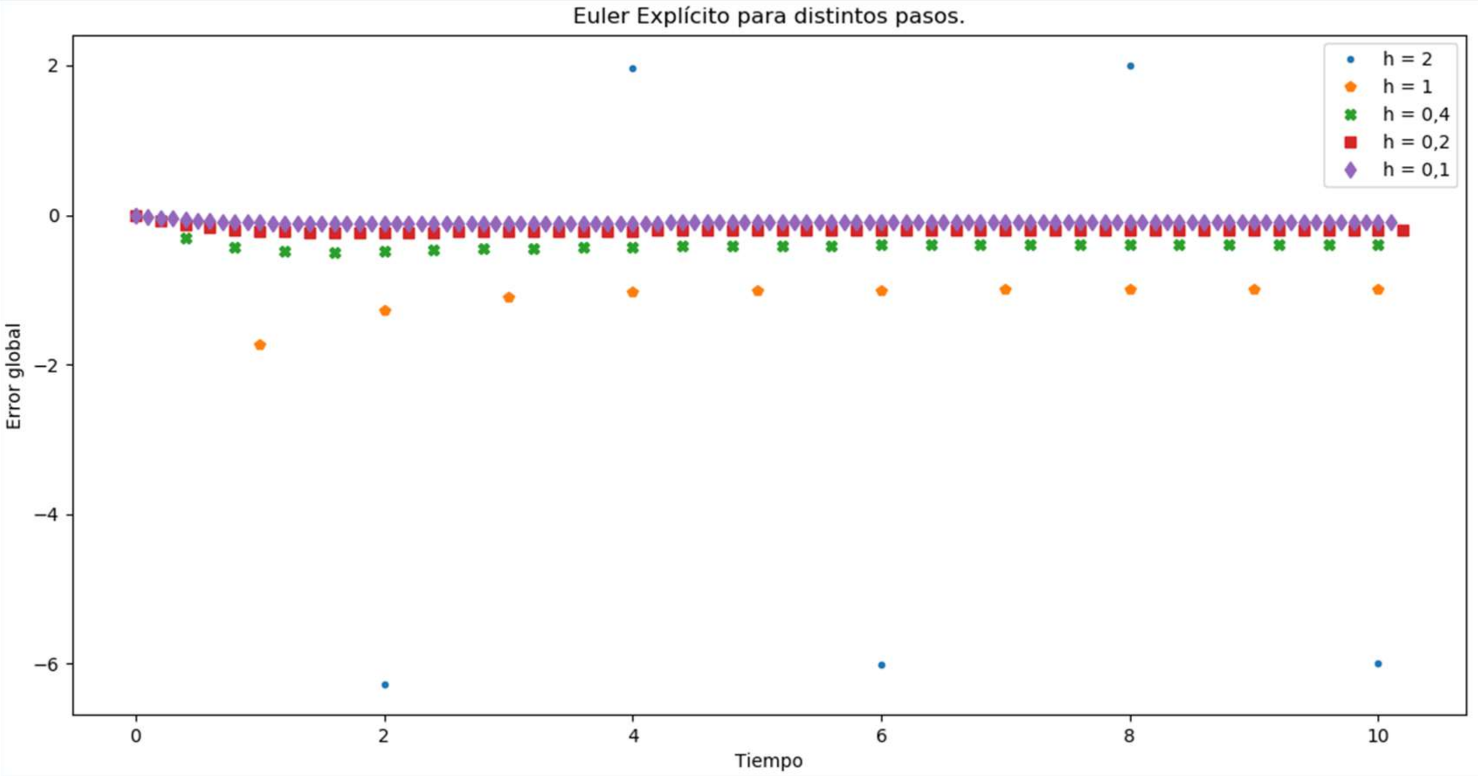
Estabilidad



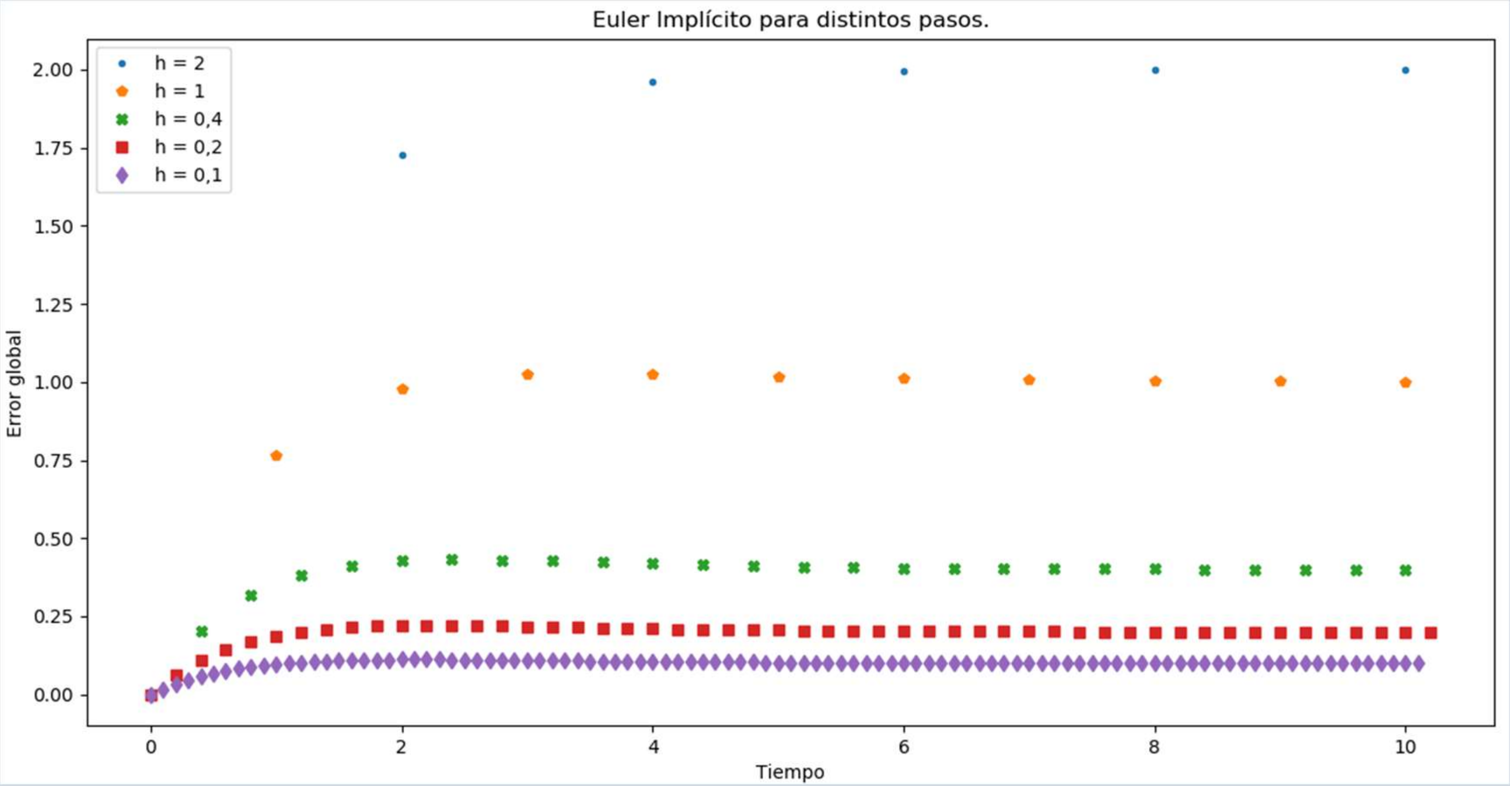
Estabilidad



Estabilidad



Estabilidad



Análisis de estabilidad

Aplicamos perturbaciones a la forma discretizada de $y(t^n)$:

$$u^{(n)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)}$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)}$$

Reemplazamos en el método de discretización.

Análisis de estabilidad

Para el método de Euler explícito:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[-u^{(n)} + (nh)^2 + 2nh - 2\right]$$

$$u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)} + h * \left[-(u^{(n)} + \delta u^{(n)}) + (nh)^2 + 2 * (nh) - 2\right]$$

$$u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[-u^{(n)} + (nh)^2 + 2nh - 2\right] + \delta u^{(n)} - h * \delta u^{(n)}$$

$$\delta u^{(n+1)} = \delta u^{(n)} - \ h * \delta u^{(n)}$$

$$\frac{\delta u^{(n+1)}}{\delta u^{(n)}} = 1 - h = g^{(n)}$$

FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

Análisis de estabilidad

Para que el método sea estable:

$$\left|g^{(n)}\right| < 1$$

Por lo tanto:

$$|1 - h| < 1$$

$$0 < h < 2$$

Análisis de estabilidad

Para el método de Euler implícito:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + +h * \left[-u^{(n+1)} + ((n+1)h)^2 + 2(n+1)h - 2\right]$$

$$u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)} + h * \left[-(u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)}) + ((n+1)h)^2 + 2(n+1)h - 2\right]$$

$$\boldsymbol{u^{(n+1)}} + \delta u^{(n+1)} = \boldsymbol{u^{(n)}} + \boldsymbol{h} * \left[-\boldsymbol{u^{(n+1)}} + \left(\boldsymbol{(n+1)h}\right)^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2(n+1)h-2}\right] + \delta u^{(n)} - h * \delta u^{(n+1)}$$

$$\delta u^{(n+1)} = \ \delta u^{(n)} - h * \delta u^{(n+1)}$$

$$\frac{\delta u^{(n+1)}}{\delta u^{(n)}} = \frac{1}{1+h} = g^{(n)}$$

Análisis de estabilidad

Para que el método sea estable:

$$\left|g^{(n)}\right| < 1$$

Por lo tanto:

$$\left|\frac{1}{1+h}\right| < 1$$

$$h > 0$$

MÉTODO INCONDICIONALMENTE ESTABLE.