

Propagación de Errores de Entrada

1. Expresión de errores - Dígitos significativos

El concepto de cifras o dígitos significativos se ha desarrollado para designar formalmente la confiabilidad de un valor numérico. Las cifras significativas de un número son aquellas que pueden usarse de manera confiable; se trata del número de cifras que se ofrecen con certeza, más uno estimado. La comprensión de este concepto es importante para el análisis numérico por dos motivos:

1. Los métodos numéricos dan resultados aproximados y por lo tanto deben desarrollarse criterios para especificar qué tan confiables son dichos resultados.
2. Ciertas cantidades (como π , $\sqrt{7}$, e) si bien están definidas, no se pueden expresar exactamente con un número finito de dígitos. Como las computadoras representan una cantidad limitada de cifras significativas, cantidades como esas nunca se podrían expresar con exactitud.

Aplicuémoslo a algunos ejemplos prácticos:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= \frac{1}{3} = 0,33333 \dots \\ \hat{x} &= 0,3330 \\ |x - \hat{x}| &= 0,00033 \Rightarrow |x - \hat{x}| = 0,0004 \end{aligned}$$

Observando la cota del error, lo primero que debemos hacer, es redondearla hacia arriba llevándola al valor de 0,0004. Las cotas deben presentar solo un dígito distinto de cero en su expresión.

El error en este número, se presenta en el cuarto decimal **0,333_**. Según la cota que tenemos, dicho decimal puede tomar el valor de uno de los números que se encuentre en el rango de 0 ± 4 :

$$0 + 4 = 1, 2, 3, 4$$

$$0 - 4 = 9^{(-1)}, 8^{(-2)}, 7^{(-3)}, 6^{(-4)}$$

Vemos que, por ejemplo, no podría valer {5}. Como este dígito nos aporta información sobre el valor que podría tomar, se denomina **dígito medianamente significativo**. En todos los casos, los números siempre deben expresarse con **dígitos significativos** y medianamente significativos porque son aquellos que nos brindan información, y no deben contener en su expresión dígitos no significativos. En el ejemplo entonces tenemos **tres d.s.** (ya que no hay error en los primeros tres decimales de \hat{x}) y **un d.m.s.** La expresión correcta es:

$$0,3330 \pm 0,0004$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x &= 33,496 \\ \hat{x} &= 33,494 \\ |x - \hat{x}| &= 0,002 \end{aligned}$$

En este caso \hat{x} contiene **cuatro d.s.** y **un d.m.s.** $\Rightarrow 33,494$.

Vemos que el error se encuentra en el tercer decimal **33,49_**, y según la cota, dicho decimal puede tomar el valor de uno de los números que se encuentre en el rango de 4 ± 2 :

$$4 + 2 = 5, 6$$

$$4 - 2 = 3, 2$$

Nos brinda información sobre el valor que puede tomar; y sabemos por ejemplo que no podrá valer {0 ; 1 ; 7 ; 8 ; 9} por ese motivo es que se lo considera un dígito medianamente significativo.

La expresión correcta resulta entonces:

$$33,494 \pm 0,002$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x &= 0,263 \\ \hat{x} &= 0,256 \\ |x - \hat{x}| &= 0,007 \Rightarrow |x - \hat{x}| = 0,01 \end{aligned}$$

En este caso sucede que el dígito distinto de cero en la cota del error, es mayor a 5 (“7”). Tenemos dos opciones; considerar dicho valor de la cota o redondearla.

Si decidimos redondearlo, debemos llevar entonces su valor a $0,01$. Vemos que \hat{x} tiene **un d.s.** y **un d.m.s.** ya que el error se encuentra en el segundo decimal, pero \hat{x} tiene tres decimales...debemos ajustarlo; porque no podemos dejar dígitos que no sean significativos en su expresión.

Tenemos dos opciones; *redondeo simétrico* y *redondeo truncado*. En el simétrico, se redondea (según corresponda, hacia arriba o abajo) el dig. no sign. de \hat{x} , y en el truncado, no. Por lo tanto, las expresiones correctas resultan ser:

$$\begin{aligned} \text{Redondeo simétrico} & \quad \mathbf{0,26} \pm 0,01 \\ \text{Redondeo truncado} & \quad \mathbf{0,25} \pm 0,01 \end{aligned}$$

Analizamos que sucede si no decidimos redondear el valor de la cota. En principio tenemos:

$$0,25\mathbf{6} \pm 0,007$$

El “6” según la cota que tenemos, puede tomar el valor de alguno de los números comprendidos en el rango de 6 ± 7 , es decir:

$$\begin{aligned} 6 + 7 &= \mathbf{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13} \\ 6 - 7 &= \mathbf{5, 4, 3, 2, 1, 0, 9^{(-1)}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tercer decimal $0,25__$ podría valer {9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0}. Esto no nos agrega información y por lo tanto constituye un dígito no significativo y no debe escribirse. La expresión correcta del número resulta:

$$\begin{aligned} \text{Redondeo simétrico} & \quad \mathbf{0,26} \pm 0,007 \\ \text{Redondeo truncado} & \quad \mathbf{0,25} \pm 0,007 \end{aligned}$$

$$\text{d) } x = 12,1369 \pm 0,008$$

En este caso sucede lo mismo que en el ejemplo anterior. Si decidimos redondear la cota, debemos llevar su valor a $0,01$. Observamos que el error se encuentra en el segundo decimal $12,1__$ pero nos aporta algo de información sobre el valor que puede tomar, por ende, éste constituye un **d.m.s.** y el “6” y el “9” son no significativos, porque no lo hacen:

$$\begin{array}{c} 12,13\mathbf{69} \pm 0,01 \\ \leftarrow \text{d.s.} \quad \leftarrow \text{d.m.s.} \quad \rightarrow \text{no sig.} \end{array}$$

La expresión correcta resulta entonces:

$$\begin{aligned} \text{Redondeo simétrico} & \quad \mathbf{12,14} \pm 0,01 \\ \text{Redondeo truncado} & \quad \mathbf{12,13} \pm 0,01 \end{aligned}$$

Si decimos no redondear la cota, el tercer decimal $12,13__$ resulta un dígito no sig. ya que el valor que puede tomar según nuestra cota de $0,008$, recorre todo los números:

$$\begin{aligned} 6 + 8 &= \mathbf{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14} \\ 6 - 8 &= \mathbf{5, 4, 3, 2, 1, 0, 9^{(-1)}, 8^{(-2)}} \end{aligned}$$

Como ese dígito no nos agrega información, no debemos incluirlo en la expresión final, la que resulta:

Redondeo simétrico **12,14** $\pm 0,008$

Redondeo truncado **12,13** $\pm 0,008$

1.1 Observaciones

En función de lo antes dicho, importante tener en cuenta:

- Las cotas deben contener un dígito distinto de cero en su expresión, y para su cálculo conviene redondear hacia arriba (Ej: $0,0333 \approx 0,04$; $0,0752 \approx 0,08$).
- En las expresiones de los resultados no puede haber dígitos no significativos.
- En las expresiones de los resultados siempre deben escribirse los dígitos que sean significativos y medianamente significativos.