75.12 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I - 95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMERICOS - 95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA

GUÍA DE PROBLEMAS

PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO

Ejercicios Requeridos

1- El análisis en régimen estacionario de la conducción del calor a través de un sólido con generación interna de calor, está dado por el siguiente problema :

$$u'' + \left(\frac{p}{x}\right) \cdot u' + f(u) = 0 \quad ; \quad 0 \le x_0 \le x \le x_1 \quad ; \quad u'(x_0) = 0 \quad ; \quad u(x_1) = 1$$

Si el sólido es una placa plana y la generación de calor es constante, o sea :

$$p = 0 \quad ; \quad f(u) = \frac{q}{k}$$

resulta para $x_0 = 0$ y $x_1 = 0$, el problema :

$$u'' + \frac{q}{k} = 0 \quad ; \quad 0 \le x \le 1 \quad ; \quad u'(0) = 0 \quad ; \quad u(1) = 1$$

La solución exacta de esta ecuación es : $u(x) = 1 + \left(\frac{q}{2 \cdot k}\right) \cdot \left(1 - x^2\right)$

Se pide encontrar el perfil de temperaturas $u(x)$ cuando $\frac{q}{k} = 2$.

Utilizar un paso de cálculo k = 0.1 .

2- Resolver el siguiente problema por un método directo con un paso de cálculo h = 0.1 .

$$u'' + \frac{u'}{x} + u = 0 \quad ; \quad 1 \le x \le 2 \quad ; \quad u'(1) = 0 \quad ; \quad u(2) = 1$$

3- Sea el siguiente problema :

$$u'' + x = 0 \quad ; \; 0 \le x \le 1 \quad ; \; u(0) = 1 \quad ; \; u'(1) = 0$$

a) Construir una aproximación en diferencias de orden de precisión 2, incluídas las condiciones de borde. Expresar el sistema de ecuaciones resultante en forma matricial.

b) Resolver el problema para un paso de cálculo h = 1/2 y h =1/3, utilizando eliminación de Gauss sin pivoteo y redondear los resultados a 4 dígitos.

4- Dado el siguiente problema de valores de contorno :

$$u^{IV} = 0 \quad ; \; u(0) = u_0 \quad ; \; u'(0) = 0 \quad ; \; u'(1) = 0 \quad ; \; u''(1) = 0 \quad ; \; 0 \le x \le 1$$

a) Discretizarlo con un esquema de orden de precisión 2.

b) Dividir el intervalo de cálculo en cinco subintervalos y plantear el sistema de ecuaciones en forma matricial, incluyendo las condiciones de borde con igual orden de precisión.

5- Sea el problema

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \quad ; \quad u(0) = 0 \quad ; \quad u(1) = 1$$

cuya solución es :

$$u(x) = 1.18840 \cdot \sin(x)$$

a) Resolverlo utilizando un método directo de precisión 2, con un paso h = 0.25. Trabajar con una precisión de 5 decimales. Comparar los resultados con la solución exacta.

b) Repetir el cálculo con la condición de borde $\frac{du}{dt}(1) = 0.64210$. Verificar que la solución analítica satisface esta condición de borde.

c) Programar en pseudolenguaje el cálculo desarrollado en a), dando la posibilidad de usar un paso variable. Suponer que se dispone de la subrutina

TRIDIAG (di, dp, ds, ti, u)

que resuelve un sistema tridiagonal, siendo di, dp y ds los vectores que contienen los elementos de la diagonal inferior, principal y superior, ti el vector de términos independientes y u el vector solución.

6- Sea el siguiente problema :

$$u \cdot \frac{du}{dx} - \alpha \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad ; \; 0 \le x \le L \quad ; \; u(0) = U \quad ; \; \frac{du}{dx}(L) = q$$

a) Discretizarlo con un método directo de orden 2. Plantear el sistema total de ecuaciones algebraicas para paso h = L/2.
b) El sistema de ecuaciones es no lineal. Plantear el sistema a resolver en cada iteración según el método de Newton Raphson.