**75.12 / 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I**
**95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS**

**FACULTAD DE INGENIERIA**
**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

# EXAMEN INTEGRADOR II

*2do cuatrimestre 2023*

*20-Dic-2023*

## Problema 1

Sea el siguiente problema de valores de contorno:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{0.1}{u} = 0 \qquad 1 \leq x \leq 2 \qquad u(1) = 1 \qquad \frac{du}{dx}(2) = 0$$

a) Discretizarlo mediante un método de diferencias finitas centrado, con paso uniforme $h$. Garantizar que la condición de borde se aproxime a orden 2.

b) Especializar el problema para $h = 0.5$. Plantear su resolución mediante el método de Newton-Raphson (interpretación a cargo del alumno):

$$\underline{\underline{J}} \cdot \Delta \underline{x} = -\underline{f} \qquad J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

c) Hallar la solución para el caso particular anterior, con una precisión de 3 decimales. Arrancar con $u(x) = u(1)$.

## Problema 2

Sabiendo que el polinomio de Legendre de grado 3 es:

$$P_3(x) = \frac{x}{2}(5x^2 - 3)$$

a) Obtener los coeficientes de la fórmula de integración de Gauss de tres puntos justificando el método de obtención.

b) Integrar numéricamente la siguiente integral definida aplicando la formula hallada en el punto anterior para $n = 1, 2$ y $3$.

$$I = \int_{-2}^{7} 5(x-2)^3 x^n \, dx$$

c) Indicar si existe alguna relación entre el error de la integración numérica efectuada y el valor de $n$, justificando teóricamente su respuesta.

1

a) $\Delta x = h = cte$

$$x_i = x_0 + i h \Rightarrow x_i = 1 + i h$$

$$x_0 = 1 \qquad x_N = 2$$

$$u(x_i) = u_i \Rightarrow u_0 = 1$$

$$\frac{du}{dx} = u' \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = u''$$

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \qquad u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Si $\cancel{\begin{cases} i=0 & u_0 = 1 \\ N-1 \geq i > 0 \end{cases}}$ $\qquad u_i'' = \dfrac{0,1}{u_i}$

$$i=0 \rightarrow u_0 = 1$$

$$i=N \rightarrow u_N = u_b$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 & i=0 \\ u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = h^2 \cdot \dfrac{0,1}{u_i} & N-1 \geq i > 0 \\ u_N = u_b & i=N \end{cases}$$

Como

$$U'_N = \frac{U_{N+1} - U_{N-1}}{2h} = 0 \Rightarrow \boxed{U_{N+1} = U_{N-1}}$$

$$U''_N = \frac{U_{N+1} - 2U_N + U_{N-1}}{h^2} = \frac{0,1}{U_N}$$

$$= \frac{2(-U_N + U_{N-1})}{h^2} = \frac{0,1}{U_N}$$

Por estar muy próximo al borde

$$= \frac{2(-U_N + U_{N-1})}{h^2} = 0,1$$

$$= U_{N-1} - U_N = 0,05h^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & \cdots & & 0 \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{0,1h^2}{u_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{0,1h^2}{u_1} \\ \frac{0,1h^2}{u_2} \\ \frac{0,1h^2}{u_3} \\ \frac{0,1h^2}{u_4} \\ \vdots \\ \frac{0,1h^2}{u_{N-1}} \\ 0,1h^2 \end{pmatrix}$$

b) Para $h = 1/2$

$\cancel{x}\ 2 = 1 + N \cdot 1/2 \Rightarrow \boxed{N = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{0,1 \cdot 0,25}{u_1} \\ 0,1 \cdot 0,25 \end{pmatrix}$$

$u_0 = 1$

$u_0 - 2u_1 + u_2 = \frac{0,025}{u_1}$

$u_1 - u_2 = 0,025$

$$F = \begin{pmatrix} u_0 - 1 \\ u_0 - 2u_1 + u_2 - \frac{0,025}{u_1} \\ u_1 - u_2 - 0,025 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 + \frac{0{,}025}{u_1^2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$