① **Resolver** $\int_0^{+\infty} f(t)\,\text{sen}(wt)\,dt = \underbrace{\frac{1-\cos w}{w}}_{\text{Transformada seno.}}$

Recordemos la definición de Transformada de Fourier,

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt.$$

Separando,

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)\,dt \;\cancel{+}\; -\, i \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(wt)\,dt$$

Observemos que si $f(t)$ $\in$ impar:

$$F(w) = -2i \int_{0}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(wt)\,dt$$

Entonces, la Transformada de Fourier de $f(t)$ será igual a 2 veces la TFS multiplicado por "$-2i$".

Dado que $f(t)$ $\in$ impar la antitransformada la puedo escribir como,

$$f^*(t) = \frac{i}{\pi}\int_0^{\infty} F(w)\,\text{sen}(wt)\,\overset{dw}{dt} \qquad (1)$$

o bien puedo no simplificar y adopto el camino,

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}\,\overset{dw}{dt} \qquad (2)$$

uso (2),

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-2i)\left(\frac{1-\cos w}{w}\right) e^{iwt}\,\overset{dw}{dt}.$$

$$f^*(t) = -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{iwt}}{w} - \frac{\cos w}{w}\, e^{iwt}\right)\overset{dw}{dt}$$

$$f^*(t) = -\frac{i}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \right.$$

$$f^*(t) = -\frac{i}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2\omega} e^{i\omega t} d\omega \right]$$

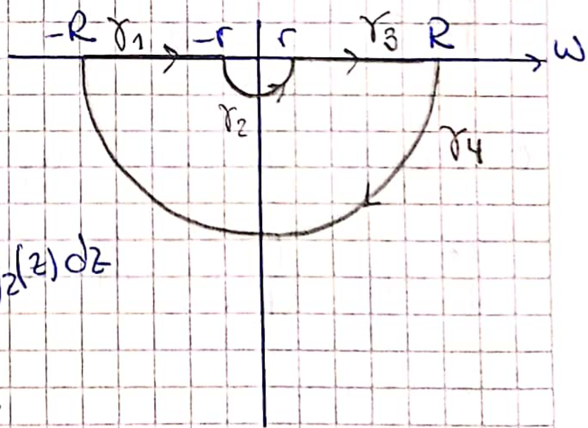
$$f^*(t) = -\frac{i}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega - \int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t+1)}}{2\omega} d\omega \overset{(-)}{+} \int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-1)}}{2\omega} d\omega \right]$$

$$f^*(t) = -\frac{i}{\pi}\left[\underset{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega} \right] + \frac{i}{2\pi} \underset{2}{\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t+1)}}{\omega} d\omega} \overset{(+)}{-} \frac{1}{2\pi} \underset{3}{\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t-1)}}{\omega} d\omega}$$

$$g_1(z) = \frac{e^{izt}}{z} \quad ; \quad g_2(z) = \frac{e^{iz(t+1)}}{z} \quad ; \quad g_3(z) = \frac{e^{iz(t-1)}}{z}$$

<u>caso $t < -1$</u>

camino:



- $g_2(z) = \frac{e^{iz(t+1)}}{z}$

$\Gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4$

$$\oint_\Gamma = \int_{\gamma_1} g_2(z)dz + \int_{\gamma_2} g_2(z)dz + \int_{\gamma_3} g_2(z)dz$$

$$+ \int_{\gamma_4} g_2(z)dz = 2\pi i \, Re = 0 .$$

En los caminos 1 y 3 $z = \omega$ y entonces la suma de los dos integrales con $R \to \infty$ y $r \to 0$ me da la integral que quiero calcular

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\gamma_1} g_2(z)dz + \int_{\gamma_3} g_2(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\omega)d\omega$$

Para la integral en γ_2:

$\left.\begin{array}{l} z=0 \in \text{Polo de } 1^{er} \text{ orden} \\ \gamma_r: z_0 + re^{i\varphi} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i\alpha \operatorname{Res}[f(z); z_0]$

$$\int_{\gamma_2} g_2(z)dz = \pi \cdot i \cdot \left.\frac{e^{iz(t+1)}}{1}\right|_{z=0} = \pi i$$ Bien

Por el Teorema de Jordan $\int_{\gamma_4} = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(w)dw = -\int_{\gamma_2} g_2(z)dz = -i\pi$$ Bien

- $g_3(z) = \dfrac{e^{iz(t-1)}}{z}$

El calculo para $g_3(z)$ es similar a $g_2(z)$ ~~pero dado~~ con la dif de que ahora $m = (t-1)$. Pero dado que estamos analizando el caso en el que $t < -1$ ~~Teo~~ también se implicará que $(t-1) < 0$.

Por lo tanto, el resultado ~~es~~ de la integral para $g_3(z)$ será el mismo que para ~~g_2~~ $g_2(z)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_3(w)dw = -i\pi.$$ Bien

- $g_1(z) = \dfrac{e^{izt}}{z}$

Tratamiento similar:

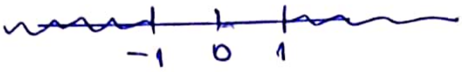
$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(w)dw = -\int_{\gamma_2} g_1(z)dz = -\pi i \left[e^{izt}\Big|_{z=0} \right] = -\pi i$$ Bien

→ Junto:

$$f^*(t) = -\frac{i}{\cancel{\pi}}(-i)\cancel{\pi} + \frac{i}{2\pi}\cdot\cancel{(-i\pi)} - \cancel{\left[\frac{i}{2\pi}(-i\pi)\right]} = -1 \text{ con } t<-1$$

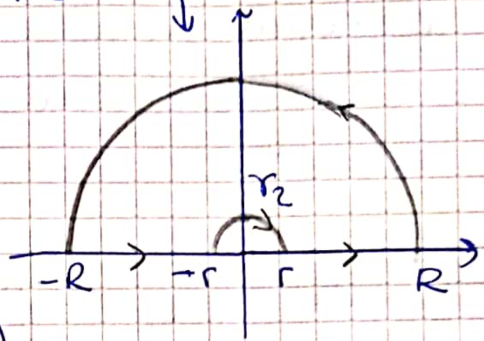
(+) (0)

Para el caso t<-1 la suma de las tres integrales da 0.



caso ~~t>1~~ $-1<t<1$

• $g_2(z) = \dfrac{e^{iz(t+1)}}{z} \Rightarrow (t+1)>0$



Similar planteo ∴

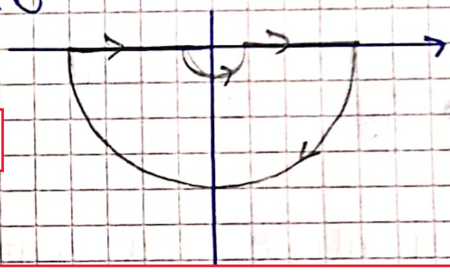
$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(w)\,dw = -\int_{\gamma_2} g_2(z)\,dz$$

$$= -\left(-i\pi\, e^{iz(t+1)}\Big|_{z=0}\right)$$

$$= i\pi.$$

Bien

• $g_3(z) = \dfrac{e^{iz(t-1)}}{z} \Rightarrow (t-1)<0$



$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} g_3(w)\,dw = -i\pi$$

Bien

Como puedes observar, la integral en g2 y g3 son iguales y de signos contrarios, corrigiendo el signo que tenías mal en la pag 2, te da que la suma de estas dos integrales en el caso de -1<t<1 se cancelan

• $g_1(z) = \dfrac{e^{izt}}{z}$ ⇝ acá debería dividir el intervalo:

$-1<t<0$ (A) $\qquad$ $0<t<1$ (B)

No se como continuar

Desarrolla los sub-casos A y B. Te va a dar que para el caso A la integral de g1 es -i*pi, y para el caso B la integral de g1 es i*pi.
Por ende, si haces la suma de las integrales de g1+g2+g3 (tanto para el caso A como para el caso B las integrales en g2 y g3 no cambian) te da que para el caso A la suma de las 3 integrales es -1 y para el caso B la suma de las 3 integrales da 1.

caso $t > 1$

• $g_2(z) = \dfrac{e^{iz(T+1)}}{z}$ $\Rightarrow$ ~~t > 1~~ $t+1>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(w)\,dw = i\pi$$ Bien

• $g_3(z) = \dfrac{e^{iz(t-1)}}{z}$ $\Rightarrow$ $t-1>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_3(w)\,dw = i\pi.$$ Bien

• $g_1(z) = \dfrac{e^{izt}}{z}$ $\Rightarrow$ $t>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(w)\,dw = \cancel{i\pi}$$ i*pi

¡Debería compensarse! y dar 0 para $t>1$.

Para el caso t>1 la suma de las tres integrales da 0.

Por lo tanto,

f*(t)= -1 para -1<t<0
1 para 0<t<1
0 para el resto de los casos