7

Relaciones: La segunda vuelta

En el capítulo 5 presentamos el concepto de relación y después nos concentramos en algunos tipos especiales de relaciones llamadas funciones. Regresaremos a las relaciones en este capítulo para enfatizar el estudio de las relaciones sobre un conjunto A, es decir, subconjuntos de $A \times A$. Dentro de la teoría de lenguajes y las máquinas de estados finitos del capítulo 6, encontramos muchos ejemplos de relaciones sobre un conjunto A, donde A representa un conjunto de cadenas de un alfabeto dado o un conjunto de estados internos de una máquina de estados finitos. Desarrollaremos distintas propiedades de las relaciones, junto con las formas de representar relaciones finitas para su uso en un computador. Los grafos dirigidos reaparecen como una segunda manera de representar tales relaciones. Por último, entre las muchas posibles relaciones sobre un conjunto A, hay dos tipos especialmente importantes: las relaciones de equivalencia y los órdenes parciales. En particular, las relaciones de equivalencia surgen en muchas áreas de las matemáticas. Por el momento usaremos una relación de equivalencia sobre un conjunto de estados internos en una máquina de estados finitos M, a fin de encontrar una máquina M_1, con el menor número de estados internos posible, que realice las tareas que M es capaz de realizar. El procedimiento necesario para lograrlo se conoce como proceso de minimización.

7.1 Repaso de relaciones: Propiedades de las relaciones

Comencemos recordando algunas ideas fundamentales consideradas anteriormente.

Definición 7.1 Si A, B son conjuntos, una *relación de A en B* es cualquier subconjunto de $A \times B$. A los subconjuntos de $A \times A$ se les llama *relaciones sobre A*.

Ejemplo 7.1

a) Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $\mathbf{Z}$ como $a \mathcal{R} b$, o $(a, b) \in \mathcal{R}$, si $a \leq b$. Este subconjunto de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ es la relación ordinaria "menor o igual que" sobre el conjunto $\mathbf{Z}$, y también puede definirse sobre $\mathbf{Q}$ o $\mathbf{R}$, pero no sobre $\mathbf{C}$.

b) Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Para $x, y \in \mathbf{Z}$, la *relación módulo n* $\mathcal{R}$ está definida como $x \mathcal{R} y$ si $x - y$ es un múltiplo de n. Por ejemplo, si $n = 7$, encontramos que $9 \mathcal{R} 2$, $-3 \mathcal{R} 11$, $(14, 0) \in \mathcal{R}$, pero $3 \not\mathcal{R} 7$ (es decir, 3 *no* está relacionado con 7).

c) Para el universo $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, consideremos el conjunto (fijo) $C \subseteq \mathcal{U}$ donde $C = \{1, 2, 3, 6\}$. Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ como $A \mathcal{R} B$ si $A \cap C = B \cap C$. Entonces los conjuntos $\{1, 2, 4, 5\}$ y $\{1, 2, 5, 7\}$ están relacionados, ya que $\{1, 2, 4, 5\} \cap C = \{1, 2\} = \{1, 2, 5, 7\} \cap C$. Igualmente encontramos que $X = \{4, 5\}$y $Y = \{7\}$ también se relacionan, ya que $X \cap C = \emptyset = Y \cap C$. Sin embargo, los conjuntos $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $T = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ *no* están relacionados; es decir, $S \not\mathcal{R} T$, ya que $S \cap C = \{1, 2, 3\} \neq \{1, 2, 3, 6\} = T \cap C$.

Ejemplo 7.2 Sea Σ un alfabeto, con lenguaje $A \subseteq \Sigma^*$. Para $x, y \in A$, definimos $x \mathcal{R} y$ si x es un prefijo de y. Podemos definir otras relaciones sobre A reemplazando "prefijo" con un "sufijo" o una "subcadena."

Ejemplo 7.3 Consideremos una máquina de estados finitos $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$.

a) Para $s_1, s_2 \in S$, definimos $s_1 \mathcal{R} s_2$ si $\nu(s_1, x) = s_2$, para algún $x \in \mathcal{I}$. La relación $\mathcal{R}$ establece el *primer nivel de accesibilidad*.

b) También podemos dar la relación del *segundo nivel de accesibilidad* para S. En este caso, $s_1 \mathcal{R} s_2$ si $\nu(s_1, x_1 x_2) = s_2$, para algunas $x_1 x_2 \in \mathcal{I}^2$. Esto puede extenderse a niveles superiores si surge la necesidad. Para la relación general de *accesibilidad*, tenemos que $\nu(s_1, y) = s_2$, para algún $y \in \mathcal{I}^*$.

c) Dados $s_1, s_2 \in S$, definimos la relación de *1-equivalencia*, que se denota con $s_1 \mathrm{E}_1 s_2$ y se lee "s_1 es 1-equivalente a s_2", cuando $\omega(s_1, x) = \omega(s_2, x)$ para todo $x \in \mathcal{I}$. En consecuencia, $s_1 \mathrm{E}_1 s_2$ indica que si la máquina M parte del estado s_1 o s_2, la salida es la misma para cada elemento de $\mathcal{I}$. Esta idea puede extenderse a los estados *k-equivalentes*, donde escribimos $s_1 \mathrm{E}_k s_2$ si $\omega(s_1, y) = \omega(s_2, y)$ para todo $y \in \mathcal{I}^k$. En este caso, obtenemos la misma cadena de salida para cualquier cadena de entrada en $\mathcal{I}^k$ si empezamos en s_1 o s_2.

Si dos estados son k-equivalentes para todo $k \in \mathbf{Z}^+$, entonces decimos que son *equivalentes*. Analizaremos esta idea con más detalle en secciones posteriores de este capítulo.

Ahora analizaremos algunas de las propiedades que puede satisfacer una relación.

Definición 7.2 Una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A es *reflexiva* si para todo $x \in A$ $(x, x) \in \mathcal{R}$.

Decir que la relación $\mathcal{R}$ es reflexiva significa simplemente que cada elemento x de A se relaciona consigo mismo. Todas las relaciones de los ejemplos 7.1 y 7.2 son reflexivas. La relación general de accesibilidad del ejemplo 7.3(b) y todas las relaciones mencionadas en la parte (c) de ese ejemplo también son reflexivas. [¿Qué tienen de malo las relaciones del primer y segundo niveles de accesibilidad dadas en las partes (a) y (b) del ejemplo 7.3?]

Ejemplo 7.4

Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es reflexiva si y sólo si $\mathcal{R} \supseteq \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. En consecuencia, $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ no es una relación reflexiva sobre A, mientras que $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y\}$ es reflexiva sobre A.

Ejemplo 7.5

Dado un conjunto finito A con $|A| = n$, tenemos que $|A \times A| = n^2$, por lo que hay 2^{n^2} relaciones sobre A. ¿Cuántas de ellas son reflexivas?

Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ una relación $\mathcal{R}$ sobre A es reflexiva si y sólo si $\{(a_i, a_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{R}$. Si consideramos los demás $n^2 - n$ pares ordenados de $A \times A$ [los de la forma (a_i, a_j), donde $i \neq j$ para $1 \leq i, j \leq n$], conforme construimos una relación reflexiva $\mathcal{R}$ sobre A podemos incluir o excluir cada uno de estos pares ordenados, así, por la regla del producto, existen $2^{(n^2-n)}$ relaciones reflexivas sobre A.

Definición 7.3 La relación $\mathcal{R}$ sobre el conjunto A es *simétrica* si $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ para todos $x, y \in A$.

Ejemplo 7.6

Si $A = \{1, 2, 3\}$, tenemos:

a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$ es una relación simétrica (pero no reflexiva) sobre A;

b) $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$ es una relación reflexiva (pero no simétrica) sobre A;

c) $\mathcal{R}_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ y $\mathcal{R}_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ son dos relaciones sobre A que son reflexivas y simétricas; y

d) $\mathcal{R}_5 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$ es una relación sobre A que no es simétrica ni reflexiva.

Para contar las relaciones simétricas sobre $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ escribimos $A \times A$ como $A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = \{(a_i, a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ y $A_2 = \{(a_i, a_j) \mid 1 \leq i, j \leq n, \text{ y } i \neq j\}$, por lo que cada par ordenado de $A \times A$ está exactamente en uno de los conjuntos A_1, A_2. Para A_2, $|A_2| = |A \times A| - |A_1| = n^2 - n = n(n - 1)$, un entero par. El conjunto A_2 contiene $(1/2)(n^2 - n)$ subconjuntos S_{ij} de la forma $\{(a_i, a_j), (a_j, a_i)\}$ donde $1 \leq i < j \leq n$. Para construir una relación simétrica $\mathcal{R}$ sobre A, para cada par ordenado de A_1 tenemos nuestra elección usual de exclusión o inclusión. Para cada uno de los $(1/2)(n^2 - n)$ subconjuntos S_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ de A_2 tenemos las mismas dos opciones. Así, por la regla del producto, existen $2^n \cdot 2^{(1/2)(n^2-n)} = 2^{(1/2)(n^2+n)}$ relaciones simétricas sobre A.

Para contar las relaciones sobre A que son reflexivas y simétricas, tenemos sólo una opción para cada par ordenado de A_1, por lo que tenemos $2^{(1/2)(n^2-n)}$ relaciones sobre A que son reflexivas y simétricas.

Definición 7.4 Para un conjunto A, una relación $\mathcal{R}$ sobre A es *transitiva* si para todos $x, y, z \in A$, $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$. (Así, si x "está relacionado con" y, y y "está relacionado con" z, queremos que x "esté relacionado con" z, donde y tiene el papel de "intermediario".)

Ejemplo 7.7 Todas las relaciones de los ejemplos 7.1 y 7.2 son transitivas, al igual que las del ejemplo 7.3(c).

Ejemplo 7.8 Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $\mathbf{Z}^+$ como $a \mathcal{R} b$ si a divide (exactamente) a b; es decir, $b = ca$ para algún $c \in \mathbf{Z}^+$. Ahora bien, si $x \mathcal{R} y$ y $y \mathcal{R} z$, ¿tenemos $x \mathcal{R} z$? Sabemos que $x \mathcal{R} y \Rightarrow y = sx$ para algún $s \in \mathbf{Z}^+$ y $y \mathcal{R} z \Rightarrow z = ty$ donde $t \in \mathbf{Z}^+$. En consecuencia, $z = ty = t(sx) = (ts)x$ para $ts \in \mathbf{Z}^+$, por lo que obtenemos $x \mathcal{R} z$ y $\mathcal{R}$ es transitiva. Además, $\mathcal{R}$ es reflexiva, pero no simétrica, ya que, por ejemplo, $2 \mathcal{R} 6$ pero $6 \not\mathcal{R} 2$.

Ejemplo 7.9 Consideremos la relación $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $\mathbf{Z}$ donde definimos $a \mathcal{R} b$ si $ab \geq 0$. Para cualquier entero x tenemos que $xx = x^2 \geq 0$, por lo que $x \mathcal{R} x$ y $\mathcal{R}$ es reflexiva. También, si $x, y \in \mathbf{Z}$ y $x \mathcal{R} y$, entonces

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow xy \geq 0 \Rightarrow yx \geq 0 \Rightarrow y\mathcal{R}x,$$

por lo que la relación $\mathcal{R}$ también es simétrica. Sin embargo, aquí encontramos que $(3, 0), (0, -7) \in \mathcal{R}$, ya que $(3)(0) \geq 0$ y $(0)(-7) \geq 0$, pero $(3, -7) \notin \mathcal{R}$ ya que $(3)(-7) < 0$. En consecuencia, esta relación *no* es transitiva.

Ejemplo 7.10 Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$ es una relación transitiva sobre A, mientras que $\mathcal{R}_2 = \{(1, 3), (3, 2)\}$ no es transitiva, ya que $(1, 3), (3, 2) \in \mathcal{R}_2$ pero $(1, 2) \notin \mathcal{R}_2$.

En este momento, es probable que el lector esté listo para contar el número de relaciones transitivas sobre un conjunto finito. Pero esto no es posible ya que, a diferencia de los casos de las propiedades reflexivas y simétricas, no existe una fórmula general conocida para el número total de relaciones transitivas sobre un conjunto finito. Sin embargo, en una sección posterior de este capítulo, tendremos los conceptos necesarios para contar las relaciones $\mathcal{R}$ sobre un conjunto finito que son (al mismo tiempo) reflexivas, simétricas y transitivas.

Examinemos una última propiedad de las relaciones.

Definición 7.5 Dada una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A, $\mathcal{R}$ es *antisimétrica* si para todos $a, b \in A$, $(a \mathcal{R} b$ y $b \mathcal{R} a) \Rightarrow a = b$. (En este caso, la única forma en que podríamos tener a "relacionado con" b y b "relacionado con" a es cuando a y b son el mismo elemento de A.)

Ejemplo 7.11

Para un universo dado $\mathcal{U}$, definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ como $(A, B) \in \mathcal{R}$ si $A \subseteq B$, para $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{R}$ es la relación de subconjunto del capítulo 3 y si $A \mathcal{R} B$ y $B \mathcal{R} A$, entonces $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, de lo que obtenemos $A = B$. En consecuencia, esta relación es antisimétrica, así como reflexiva y transitiva, pero no simétrica.

Antes de comenzar a pensar que "no simétrico" es sinónimo de "antisimétrico", consideremos lo siguiente.

Ejemplo 7.12

Para $A = \{1, 2, 3\}$, la relación $\mathcal{R}$ sobre A dada por $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ no es simétrica, pues $(3, 2) \notin \mathcal{R}$; y tampoco es antisimétrica, ya que $(1, 2)$ $(2, 1) \in \mathcal{R}$ pero $1 \neq 2$. La relación $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ es simétrica y antisimétrica.

¿Cuántas relaciones sobre A son antisimétricas? Si escribimos

$$A \times A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \cup \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\},$$

debemos hacer dos observaciones mientras tratamos de construir una relación antisimétrica $\mathcal{R}$ sobre A.

1) Podemos incluir o excluir cualquier elemento $(x, x) \in A \times A$, sin preocuparnos por el hecho de que $\mathcal{R}$ sea o no antisimétrica.
2) Para un elemento de la forma $(x, y), x \neq y$, debemos analizar (x, y) y (y, x) y observar que, para que $\mathcal{R}$ sea antisimétrica, tenemos tres opciones: (a) colocar (x, y) en $\mathcal{R}$; (b) colocar (y, x) en $\mathcal{R}$; o (c) no colocar (x, y) ni (y, x) en $\mathcal{R}$. [¿Qué ocurre si colocamos (x, y) y (y, x) en $\mathcal{R}$?]

Así, por la regla del producto, el número de relaciones antisimétricas sobre A es $(2^3)(3^3) = (2^3)(3^{(3^2-3)/2})$. Si $|A| = n > 0$, entonces existen $(2^n)(3^{(n^2-n)/2})$ relaciones antisimétricas sobre A.

Para nuestro siguiente ejemplo regresaremos al concepto de dominio de una función, que definimos por primera vez en la sección 5.7.

Ejemplo 7.13

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones con dominio $\mathbf{Z}^+$ y codominio $\mathbf{R}$; es decir, $\mathcal{F} = \{f \mid f\colon \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}\}$. Para $f, g \in \mathcal{F}$, definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{F}$ como $f \mathcal{R} g$ si f es dominada por g (o $f \in O(g)$). Entonces $\mathcal{R}$ es reflexiva y transitiva.

Si $f, g\colon \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ se definen como $f(n) = n$ y $g(n) = n + 5$, entonces $f \mathcal{R} g$ y $g \mathcal{R} f$ pero $f \neq g$, por lo que $\mathcal{R}$ *no es antisimétrica*. Además, si $h\colon \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ está dada por $h(n) = n^2$, entonces $(f, h), (g, h) \in \mathcal{R}$ pero ni (h, f) ni (h, g) están en $\mathcal{R}$. En consecuencia, la relación $\mathcal{R}$ *tampoco es simétrica*.

En este momento hemos visto las cuatro propiedades principales que surgen en el estudio de las relaciones. Antes de terminar esta sección, definiremos dos conceptos más, cada uno de los cuales utiliza tres de estas cuatro propiedades.

Definición 7.6

Una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A es un *orden parcial*, o una *relación de orden parcial*, si $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo 7.14 La relación del ejemplo 7.1(a) es un orden parcial, pero la relación de la parte (b) de ese ejemplo no lo es, ya que no es antisimétrica. Todas las relaciones del ejemplo 7.2 son órdenes parciales, al igual que la relación de subconjunto del ejemplo 7.11.

Nuestro siguiente ejemplo nos permite relacionar esta nueva idea de orden parcial con resultados que estudiamos en los capítulos 1 y 4.

Ejemplo 7.15 Comenzamos con el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, el conjunto de divisores enteros positivos de 12, y definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre A como $x\mathcal{R}y$ si x divide (exactamente) a y. Como en el ejemplo 7.8, encontramos que $\mathcal{R}$ es reflexiva y transitiva. Además, si $x, y \in A$ son tales que $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}x$, entonces

$$x\mathcal{R}\,y \Rightarrow y = ax, \text{ para algún } a \in \mathbf{Z}^+, \text{ y}$$
$$y\mathcal{R}\,x \Rightarrow x = by, \text{ para algún } b \in \mathbf{Z}^+.$$

En consecuencia, se sigue que $y = ax = a(by) = (ab)y$, y como $y \neq 0$, tenemos $ab = 1$. Como $a, b \in \mathbf{Z}^+$, $ab = 1 \Rightarrow a = b = 1$, por lo que $y = x$ y $\mathcal{R}$ es antisimétrica y define un orden parcial para el conjunto A.

Supongamos ahora que queremos contar el número de pares ordenados que aparecen en esta relación $\mathcal{R}$. Podemos simplemente enumerar los pares ordenados de $A \times A$ que forman $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (1,12), (2,2), (2,4), (2,6),$$
$$(2,12), (3,3), (3,6), (3,12), (4,4), (4,12), (6,6), (6,12), (12,12)\}$$

De esta manera, vemos que hay 18 pares ordenados en la relación. Pero si quisiéramos analizar el mismo tipo de orden parcial para el conjunto de divisores enteros positivos de 1800, definitivamente nos desanimaría el método de *simplemente* enumerar todos los pares ordenados. Así que analicemos la relación $\mathcal{R}$ con más detalle. Por el teorema fundamental de la aritmética, podemos escribir $12 = 2^2 \cdot 3$; vemos entonces que si $(c, d) \in \mathcal{R}$, entonces

$$c = 2^m \cdot 3^n \qquad \text{y} \qquad d = 2^p \cdot 3^q,$$

donde $m, n, p, q \in \mathbf{N}$ con $0 \leq m \leq p \leq 2$ y $0 \leq n \leq q \leq 1$.

Si tenemos en cuenta el hecho de que $0 \leq m \leq p \leq 2$, vemos que cada opción para m, p es simplemente una selección de tamaño 2 de un conjunto de tamaño 3 (el conjunto $\{0, 1, 2\}$) donde se permiten las repeticiones. (En cualquiera de este tipo de selecciones, si existe un entero no negativo más pequeño, entonces se le asigna a m.) En el capítulo 1 aprendimos que dicha selección puede hacerse de $\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$ formas. Y, de manera similar, podemos seleccionar n y q de $\binom{2+2-1}{2} = \binom{3}{2} = 3$ formas. Así, por la regla del producto, deben existir $(6)(3) = 18$ pares ordenados en $\mathcal{R}$, como ya vimos antes cuando las enumeramos.

Supongamos ahora que analizamos una situación similar, el conjunto de divisores enteros positivos de $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Aquí trabajamos con $(4)(3)(3) = 36$ divisores y un par ordenado usual para este orden parcial (dado por la división) se ve como $(2^r \cdot 3^s \cdot 5^t, 2^u \cdot 3^v \cdot 5^w)$, donde $r, s, t, u, v, w \in \mathbf{N}$, con $0 \leq r \leq u \leq 3$, $0 \leq s \leq v \leq 2$ y $0 \leq t \leq w \leq 2$. Así, el número de pares ordenados de la relación es

$$\binom{4+2-1}{2}\binom{3+2-1}{2}\binom{3+2-1}{2} = \binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} = (10)(6)(6) = 360,$$

y definitivamente *no* queremos enumerar todos los pares ordenados de la relación para obtener este resultado.

En general, para $n \in \mathbf{Z}^+$ con $n > 1$, usamos el teorema fundamental de la aritmética para escribir

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \cdots p_k^{e_k},$$

donde $k \in \mathbf{Z}^+$, $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_k$ y p_i es primo, $e_i \in \mathbf{Z}^+$ para cada $1 \leq i \leq k$. Entonces n tiene $\prod_{i=1}^{k}(e_i + 1)$ divisores enteros positivos. Y cuando consideramos el mismo tipo de orden parcial para este conjunto (de divisores enteros positivos de n), vemos que el número de pares ordenados en la relación es

$$\prod_{i=1}^{k}\binom{(e_i+1)+2-1}{2} = \prod_{i=1}^{k}\binom{e_i+2}{2}.$$

Definición 7.7 Una *relación de equivalencia* $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 7.16

a) La relación del ejemplo 7.1(b) y todas las del ejemplo 7.3(c) son relaciones de equivalencia.

b) Si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces

$\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$,
$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$,
$\mathcal{R}_3 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\}$, y
$\mathcal{R}_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} = A \times A$

son relaciones de equivalencia sobre A.

c) Para cualquier conjunto A, $A \times A$ es una relación de equivalencia sobre A, y si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, entonces la relación de igualdad $\mathcal{R} = \{(a_i, a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ es la mínima relación de equivalencia sobre A.

d) Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x, y, z\}$ y $f\colon A \to B$ la función sobre

$$f = \{(1,x), (2,z), (3,x), (4,y), (5,z), (6,y), (7,x)\}.$$

Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre A como $a \mathcal{R} b$ si $f(a) = f(b)$. Entonces, por ejemplo, vemos que $1 \mathcal{R} 1$, $1 \mathcal{R} 3$, $2 \mathcal{R} 5$, $3 \mathcal{R} 1$ y $4 \mathcal{R} 6$.

Para cualquier $a \in A$, $f(a) = f(a)$ ya que f es una función; entonces, $a \mathcal{R} a$ y $\mathcal{R}$ es reflexiva. Supongamos ahora que $a, b \in A$ y $a \mathcal{R} b$. Entonces $a \mathcal{R} b \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow b \mathcal{R} a$, por lo que $\mathcal{R}$ es simétrica. Por último, si $a, b, c \in A$ y $a \mathcal{R} b$, $b \mathcal{R} c$, entonces $f(a) = f(b)$ y $f(b) = f(c)$. En consecuencia, $f(a) = f(c)$ y $(a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c) \Rightarrow a \mathcal{R} c$. Así, $\mathcal{R}$ es transitiva. Como $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva, es una relación de equivalencia.

En este caso, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 7), (4, 4), (4, 6), (5, 2), (5, 5), (6, 4), (6, 6), (7, 1), (7, 3), (7, 7)\}$.

e) Si $\mathcal{R}$ es una relación sobre un conjunto A, entonces $\mathcal{R}$ es al mismo tiempo una relación de equivalencia y un orden parcial en A si y sólo si $\mathcal{R}$ es una relación de igualdad sobre A.

EJERCICIOS 7.1

1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dé un ejemplo de una relación $\mathcal{R}$ sobre A que sea
   a) reflexiva y simétrica, pero no transitiva
   b) reflexiva y transitiva, pero no simétrica
   c) simétrica y transitiva, pero no reflexiva
2. Para la relación (b) del ejemplo 7.1, determine cinco valores de x para los cuales $(x, 5) \in \mathcal{R}$.
3. Para la relación $\mathcal{R}$ del ejemplo 7.13, sea $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ donde $f(n) = n$.
   a) Determine tres elementos $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}$ tales que $f_i \mathcal{R} f$ y $f \mathcal{R} f_i$ para todo $1 \leq i \leq 3$.
   b) Encuentre tres elementos $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{F}$ tales que $g_i \mathcal{R} f$ pero $f \not\mathcal{R} g_i$ para todo $1 \leq i \leq 3$.
4. a) Formule de nuevo las definiciones de las propiedades reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica de una relación $\mathcal{R}$ (sobre un conjunto A), usando cuantificadores.
   b) Use los resultados de la parte (a) para especificar cuándo una relación $\mathcal{R}$ (sobre un conjunto A) (i) *no* es reflexiva; (ii) *no* es simétrica; (iii) *no* es transitiva; y (iv) *no* es antisimétrica.
5. Para cada una de las siguientes relaciones, determine si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.
   a) $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$, donde $a \mathcal{R} b$ si $a \mid b$ (se lee "a divide a b", como se definió en la sección 4.3).
   b) $\mathcal{R}$ es la relación sobre $\mathbf{Z}$ tal que $a \mathcal{R} b$ si $a \mid b$.
   c) Para un universo dado $\mathcal{U}$ y un subconjunto fijo C de $\mathcal{U}$, definimos $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ como sigue: Para cualesquiera $A, B \subseteq \mathcal{U}$ tenemos $A \mathcal{R} B$ si $A \cap C = B \cap C$.
   d) En el conjunto A de todas las rectas de $\mathbf{R}^2$, definimos la relación $\mathcal{R}$ para dos rectas ℓ_1, ℓ_2 como $\ell_1 \mathcal{R} \ell_2$ si ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2.
   e) $\mathcal{R}$ es la relación sobre $\mathbf{Z}$ tal que $x \mathcal{R} y$ si $x + y$ es par (impar).
   f) $\mathcal{R}$ es la relación sobre $\mathbf{Z}$ tal que $x \mathcal{R} y$ si $x - y$ es par (impar).
   g) $\mathcal{R}$ es la relación sobre $\mathbf{Z}^+$ tal que $x \mathcal{R} y$ si $\text{mcd}(a, b) = 1$; es decir, si a y b son primos relativos.
   h) Sea T el conjunto de todos los triángulos de $\mathbf{R}^2$. Definimos $\mathcal{R}$ sobre T como $t_1 \mathcal{R} t_2$ si t_1 y t_2 tienen un ángulo con la misma medida.
   i) $\mathcal{R}$ es la relación sobre $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tal que $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$ si $a \leq c$. [*Nota*: $\mathcal{R} \subseteq (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$.]
   j) $\mathcal{R}$ es la relación sobre $\mathbf{Z}^+$ dada por $x \mathcal{R} y$ si $x^3 + y^2$ es par.
6. ¿Cuáles de las relaciones del ejercicio 5 son órdenes parciales? ¿Cuáles son relaciones de equivalencia?
7. a) Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ relaciones sobre un conjunto A. Demuestre o pruebe que es falso que $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ reflexivas $\Rightarrow \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ reflexiva.
   b) Resuelva la parte (a), sustituyendo cada ocurrencia de "reflexiva" por (i) simétrica; (ii) antisimétrica y (iii) transitiva.
8. Resuelva el ejercicio 7 reemplazando cada ocurrencia de $\cap$ por $\cup$.
9. Para cada una de las siguientes proposiciones acerca de las relaciones sobre un conjunto A, $|A| = n$, determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es falsa, dé un contraejemplo.
   a) Si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva sobre A, entonces $|\mathcal{R}| \geq n$.
   b) Si $\mathcal{R}$ es una relación sobre A y $|\mathcal{R}| \geq n$, entonces $\mathcal{R}$ es reflexiva.
   c) Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ son relaciones sobre A y $\mathcal{R}_2 \supseteq \mathcal{R}_1$, entonces $\mathcal{R}_1$ reflexiva (simétrica, antisimétrica, transitiva) $\Rightarrow \mathcal{R}_2$ reflexiva (simétrica, antisimétrica, transitiva).

d) Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ son relaciones sobre A y $\mathcal{R}_2 \supseteq \mathcal{R}_1$, entonces $\mathcal{R}_2$ reflexiva (simétrica, antisimétrica, transitiva) $\Rightarrow \mathcal{R}_1$ reflexiva (simétrica, antisimétrica, transitiva).

e) Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre A, entonces $n \leq |\mathcal{R}| \leq n^2$.

10. Si $A = \{w, x, y, z\}$, determine el número de relaciones sobre A que son (a) reflexivas; (b) simétricas; (c) reflexivas y simétricas; (d) reflexivas y contienen a (x, y); (e) simétricas y contienen a (x, y); (f) antisimétricas; (g) antisimétricas y contienen a (x, y); (h) simétricas y antisimétricas; e (i) reflexivas, simétricas y antisimétricas.

11. Sea $n \in \mathbf{Z}^+$ con $n > 1$ y sea A el conjunto de los divisores enteros positivos de n. Defina la relación $\mathcal{R}$ sobre A como $x \mathcal{R} y$ si x divide (exactamente) a y. Determine la cantidad de pares ordenados que hay en la relación $\mathcal{R}$ cuando n es (a) 10; (b) 20; (c) 40; (d) 200; (e) 210; y (f) 13860.

12. Suponga que p_1, p_2, p_3 son primos distintos y que $n, k \in \mathbf{Z}^+$, con $p_1^5 p_2^3 p_3^k$. Tome A como el conjunto de los divisores enteros positivos de n y defina la relación $\mathcal{R}$ sobre A como $x \mathcal{R} y$ si x divide (exactamente) a y. Si existen 5880 pares ordenados en $\mathcal{R}$, determine k y $|A|$.

13. ¿Qué tiene de incorrecto el siguiente argumento?

Sea A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación sobre A. Si $\mathcal{R}$ es simétrica y transitiva, entonces $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Demostración: Sea $(x, y) \in \mathcal{R}$. Por la propiedad de simetría, $(y, x) \in \mathcal{R}$. Entonces, como $(x, y), (y, x) \in \mathcal{R}$, se sigue de la propiedad transitiva que $(x, x) \in \mathcal{R}$. En consecuencia, $\mathcal{R}$ es reflexiva.

14. Sea A un conjunto tal que $|A| = n$ y sea $\mathcal{R}$ una relación sobre A antisimétrica. ¿Cuál es el máximo valor de $|\mathcal{R}|$? ¿Cuántas relaciones antisimétricas pueden tener ese tamaño?

15. Sea A un conjunto tal que $|A| = n$ y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre A tal que $|\mathcal{R}| = r$. ¿Por qué $r - n$ siempre es par?

16. Una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A es *irreflexiva* si para todo $a \in A$, $(a, a) \notin \mathcal{R}$.

a) Dé un ejemplo de una relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbf{Z}$ tal que $\mathcal{R}$ sea irreflexiva y transitiva pero no simétrica.

b) Sea $\mathcal{R}$ una relación no vacía sobre un conjunto A. Demuestre que si $\mathcal{R}$ satisface dos cualesquiera de las siguientes propiedades (irreflexiva, simétrica y transitiva) entonces no puede satisfacer la tercera.

c) Si $|A| = n \geq 1$, ¿cuántas relaciones diferentes sobre A son irreflexivas? ¿Cuántas no son reflexivas ni irreflexivas?

7.2 Reconocimiento por computador: Matrices cero-uno y grafos dirigidos

Puesto que nuestro interés se centra en las relaciones sobre conjuntos finitos, dirigiremos nuestra atención a las formas de representarlas de modo que podamos verificar fácilmente las propiedades de la sección 7.1. Por esta razón, desarrollaremos ahora las herramientas necesarias: la composición de relaciones, las matrices cero-uno y los grafos dirigidos.

De manera similar a la composición de funciones, las relaciones pueden combinarse en las siguientes circunstancias.

Definición 7.8 Si A, B y C son conjuntos y $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$ y $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$, entonces la *relación compuesta* $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ es una relación de A en C definida como $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \{(x, z) \mid x \in A, z \in C$ y existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in \mathcal{R}_1, (y, z) \in \mathcal{R}_2\}$.

¡Cuidado! La composición de dos relaciones se escribe en orden inverso al de la composición de funciones. En breve veremos por qué.

Ejemplo 7.17 Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{w, x, y, z\}$ y $C = \{5, 6, 7\}$. Consideremos $\mathcal{R}_1 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (3, z)\}$, una relación de A en B y $\mathcal{R}_2 = \{(w, 5), (x, 6)\}$ una relación de B en C. Entonces $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \{(1, 6), (2, 6)\}$ es una relación de A en C. Si $\mathcal{R}_3 = \{(w, 5), (w, 6)\}$ es otra relación de B en C, entonces $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3 = \emptyset$.

Ejemplo 7.18 Sean A el conjunto de los empleados de un centro de cálculo, B un conjunto de lenguajes de programación de alto nivel y C una lista de proyectos $\{p_1, p_2, \ldots, p_8\}$ de los cuales los administradores deben asignar trabajo a las personas de A. Consideremos $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$ donde un par ordenado de la forma (L. Pérez, Pascal) indica que el empleado L. Pérez utiliza con eficiencia Pascal (y posiblemente otros lenguajes de programación). La relación $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$ consta de los pares ordenados del tipo (Pascal, p_2), lo que indica que el lenguaje Pascal se considera esencial para las personas que trabajan en el proyecto p_2. En la relación compuesta $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ encontramos el par (L. Pérez, p_2). Si no existe otro par en $\mathcal{R}_2$ que tenga a p_2 como segunda componente, sabemos entonces que si L. Pérez es asignado a p_2 esto se debe exclusivamente a su uso eficiente de Pascal. (En este caso, $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ se utiliza para establecer una concordancia entre los empleados y los proyectos con base en el conocimiento de los lenguajes específicos de programación por parte del empleado.)

El siguiente resultado, parecido a la propiedad asociativa de la composición de funciones, es válido para las relaciones.

TEOREMA 7.1 Sean A, B, C, D conjuntos y $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$, $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$ y $\mathcal{R}_3 \subseteq C \times D$. Entonces $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$.

Demostración: Como $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3)$ y $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$ son relaciones de A a D, existe una razón para pensar que son iguales. Si $(a, d) \in \mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3)$, entonces existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{R}_1$ y $(b, d) \in (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3)$. Además, $(b, d) \in (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3) \Rightarrow (b, c) \in \mathcal{R}_2$ y $(c, d) \in \mathcal{R}_3$ para algún $c \in C$. Entonces, $(a, b) \in \mathcal{R}_1$ y $(b, c) \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$. Por último, $(a, c) \in \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ y $(c, d) \in \mathcal{R}_3 \Rightarrow (a, d) \in (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$ y $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3) \subseteq (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$. La inclusión opuesta se obtiene mediante un razonamiento similar.

Como resultado de este teorema, no existe ambigüedad alguna cuando escribimos $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3$ para cualesquiera de las relaciones del teorema 7.1. Además, ahora podemos definir las potencias de una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto.

Definición 7.9 Dado un conjunto A y una relación $\mathcal{R}$ sobre A, definimos las *potencias* de $\mathcal{R}$ en forma recursiva como (a) $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$; y (b) para $n \in \mathbf{Z}^+$, $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$.

Observemos que para $n \in \mathbf{Z}^+$, $\mathcal{R}^n$ es una relación sobre A.

Ejemplo 7.19 Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$, entonces $\mathcal{R}^2 = \{(1, 4), (1, 2), (3, 4)\}$, $\mathcal{R}^3 = \{(1, 4)\}$ y para $n \geq 4, \mathcal{R}^n = \emptyset$.

Conforme el conjunto A y la relación $\mathcal{R}$ crecen, los cálculos parecidos a los del ejemplo 7.19 se vuelven tediosos. Para evitarlo, la herramienta que necesitamos es el computador, una vez que encontremos la forma de indicar a la máquina la información relativa al conjunto A y la relación $\mathcal{R}$ sobre A.

Definición 7.10 Una *matriz cero-uno* $m \times n$ $E = (e_{ij})_{m \times n}$ es una disposición rectangular de números en m filas y n columnas, donde cada e_{ij}, para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, denota la entrada de la i-ésima fila y la j-ésima columna de E y cada una de dichas entradas es 0 o 1. [También podemos escribir matriz (0,1) para este tipo de matriz.]

Ejemplo 7.20 La matriz

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz (0,1) de 3×4, donde, por ejemplo, $e_{11} = 1$, $e_{23} = 0$ y $e_{31} = 1$.

Al trabajar con estas matrices usamos las operaciones comunes de suma y multiplicación de matrices *suponiendo que* $1 + 1 = 1$. (Por lo tanto, la suma es booleana.)

Ejemplo 7.21 Consideremos los conjuntos A, B y C y las relaciones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ del ejemplo 7.17. Si el orden de los elementos de cada uno de estos conjuntos se fija como en ese ejemplo, definimos las *matrices de relación* de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ como sigue:

$$M(\mathcal{R}_1) = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (w) & (x) & (y) & (z) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad M(\mathcal{R}_2) = \begin{array}{c} \\ (w) \\ (x) \\ (y) \\ (z) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (5) & (6) & (7) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Al construir $M(\mathscr{R}_1)$, trabajamos con una relación de A en B, de modo que los elementos de A se usan para señalar las filas de $M(\mathscr{R}_1)$ y los elementos de B indican las columnas. Así, por ejemplo, para indicar el hecho de que $(2, x) \in \mathscr{R}_1$, colocamos un 1 en la fila marcada con (2) y la columna marcada con (x). Cada 0 de esta matriz indica un par ordenado en $A \times B$ que se omite en $\mathscr{R}_1$. Por ejemplo, como $(3, w) \notin \mathscr{R}_1$, hay un 0 en la entrada de la fila (3) y la columna (w) de la matriz $M(\mathscr{R}_1)$. El mismo proceso se usa para obtener $M(\mathscr{R}_2)$.

Si multiplicamos las matrices†, vemos que

$$M(\mathscr{R}_1) \cdot M(\mathscr{R}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2),$$

y en general tenemos que si $\mathscr{R}_1$ es una relación de A en B y $\mathscr{R}_2$ es una relación de B en C, entonces $M(\mathscr{R}_1) \cdot M(\mathscr{R}_2) = M(\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2)$. Es decir, el producto de las matrices de relación para $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$, en ese orden, es igual a la matriz de relación de la relación compuesta $\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2$. (Ésta es la razón por la que la composición de dos relaciones se escribió en el orden dado en la definición 7.8.)

En los ejercicios 9 y 10 (que aparecen al final de esta sección) se pedirá al lector que demuestre el resultado general del ejemplo 7.21, junto con algunos resultados de nuestro siguiente ejemplo, en el que se muestran más propiedades de las matrices de relación.

Ejemplo 7.22 Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$, como en el ejemplo 7.19. Si conservamos fijo el orden de los elementos de A, definimos la *matriz de relación* para $\mathscr{R}$ como sigue: $M(\mathscr{R})$ es la matriz (0, 1) 4×4 cuyos elementos m_{ij}, para $1 \leq i, j \leq 4$, están dados por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j) \in \mathscr{R}, \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En este caso tenemos que

$$M(\mathscr{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, ¿cómo podemos utilizar esto? Si calculamos $(M(\mathscr{R}))^2$ con el convenio de que $1 + 1 = 1$, entonces tenemos que

$$(M(\mathscr{R}))^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

† El lector no familiarizado con la multiplicación de matrices o que sólo desee hacer un breve repaso deberá consultar el Apéndice 2.

que es la matriz de relación de $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}^2$. (Verifique el ejemplo 7.19.) Además,

$$(M(\mathcal{R}))^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la matriz de relación de $\mathcal{R}^4 = \emptyset$.

Lo que ocurre aquí puede aplicarse a la situación general. Ahora estableceremos algunos resultados acerca de las matrices de relación y su uso en el estudio de las relaciones.

Sea A un conjunto con $|A| = n$ y $\mathcal{R}$ una relación sobre A. Si $M(\mathcal{R})$ es la matriz de relación de $\mathcal{R}$, entonces

a) $M(\mathcal{R}) = \mathbf{0}$ **(la matriz con todos los elementos iguales a cero) si y sólo si** $\mathcal{R} = \emptyset$
b) $M(\mathcal{R}) = \mathbf{1}$ **(la matriz con todos los elementos iguales a uno) si y sólo si** $\mathcal{R} = A \times A$
c) $M(\mathcal{R}^m) = [M(\mathcal{R})]^m$ **para** $m \in \mathbf{Z}^+$

Usaremos la matriz (0, 1) de una relación para reconocer las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva. Para esto, necesitamos los conceptos de las siguientes tres definiciones.

Definición 7.11 Sean $E = (e_{ij})_{m \times n}$, $F = (f_{ij})_{m \times n}$ dos matrices (0, 1) $m \times n$. Decimos que E *precede*, o *es menor que*, F, y escribimos $E \leq F$, si $e_{ij} = f_{ij}$ para todos $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo 7.23 Si $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, tenemos que $E \leq F$. De hecho, existen ocho matrices (0, 1) G para las cuales $E \leq G$.

Definición 7.12 Para $n \in \mathbf{Z}^+$, $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$ es la matriz (0, 1) $n \times n$ tal que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Definición 7.13 Sea $A = (a_{ij})_{m \times n}$ una matriz (0, 1). La *traspuesta* de A, que se escribe A^{tr}, es la matriz $(a^*_{ji})_{n \times m}$ tal que $a^*_{ji} = a_{ij}$, para todos $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$.

Ejemplo 7.24

Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $A^{\mathrm{tr}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como muestra este ejemplo, la i-ésima fila (i-ésima columna) de A es igual a la i-ésima columna (i-ésima fila) de A^{tr}. Esto indica un método que podemos utilizar para obtener la matriz A^{tr} de la matriz A.

TEOREMA 7.2 Dado un conjunto A con $|A| = n$ y una relación $\mathcal{R}$ sobre A, sea M la matriz de relación para $\mathcal{R}$. Entonces

a) $\mathcal{R}$ es reflexiva si y sólo si $I_n \leq M$.
b) $\mathcal{R}$ es simétrica si y sólo si $M = M^{\mathrm{tr}}$.
c) $\mathcal{R}$ es transitiva si y sólo si $M \cdot M = M^2 \leq M$.
d) $\mathcal{R}$ es antisimétrica si y sólo si $M \cap M^{\mathrm{tr}} \leq I_n$. (La matriz $M \cap M^{\mathrm{tr}}$ se forma operando en los elementos correspondientes de M y M^{tr} de acuerdo con las reglas $0 \cap 0 = 0 \cap 1 = 1 \cap 0 = 0$ y $1 \cap 1 = 1$; es decir, el producto usual de ceros y unos.)

Demostración: Los resultados se siguen de las definiciones de las propiedades de una relación y de la matriz (0, 1). Demostraremos esto para la parte (c), usando los elementos de A para designar las filas y columnas de M, como en los ejemplos 7.21 y 7.22.

Sea $M^2 \leq M$. Si $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$, entonces existen unos en la fila (x), columna (y) y en la fila (y), columna (z) de M. En consecuencia, en la fila (x), columna (z) de M^2 hay un 1. Este 1 también debe aparecer en la fila (x), columna (z) de M ya que $M^2 \leq M$. Por lo tanto, $(x, z) \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ es transitiva.

Recíprocamente, si $\mathcal{R}$ es transitiva y M es la matriz de relación de $\mathcal{R}$, sea s_{xz} el elemento de la fila (x), columna (z) de M^2, con $s_{xz} = 1$. Para que s_{xz} sea igual a 1 en M^2, debe existir al menos un $y \in A$ tal que $m_{xy} = m_{yz} = 1$ en M. Esto ocurre sólo si $x \mathcal{R} y$ y $y \mathcal{R} z$. Si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces se sigue que $x \mathcal{R} z$. Así, $m_{xz} = 1$ y $M^2 \leq M$.

La demostración de las partes restantes se deja al lector.

La matriz de relación es una herramienta útil para el reconocimiento de ciertas propiedades de las relaciones por parte del computador. Almacenando información como ya lo hemos descrito, esta matriz es un ejemplo de una *estructura de datos*. También es interesante la forma en que se usa la matriz de relación en el estudio de la teoría de grafos† y la manera en que esta teoría se usa para reconocer ciertas propiedades de las relaciones.

En este momento presentaremos algunos conceptos fundamentales de la teoría de grafos. Con frecuencia daremos estos conceptos dentro de los ejemplos y no en términos de definiciones formales. Sin embargo, en el capítulo 11, la exposición no dará por hecho lo dado aquí y será más rigurosa y amplia.

† Puesto que la terminología de la teoría de grafos no es estándar, el lector podría encontrar algunas diferencias entre nuestras definiciones y las de otros textos.

Definición 7.14 Sea V un conjunto finito no vacío. Un *grafo dirigido* (o *digrafo*) G *sobre* V está formado por los elementos de V, llamados *vértices* o *nodos* de G, y un subconjunto E de $V \times V$, conocido como las *aristas* (*dirigidas*) o *arcos* de G. Si $a, b \in V$ y $(a, b) \in E$†, entonces existe una arista *de* a a b. El vértice a es el *origen* o *fuente* de la arista, y b es el *término*, o *vértice terminal*, y decimos que b es *adyacente desde* a y que a es *adyacente hacia* b. Además, si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq (b, a)$. Una arista de la forma (a, a) es un *lazo* (en a).

Ejemplo 7.25 Para $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, el diagrama de la figura 7.1 es un grafo dirigido G sobre V con el conjunto de aristas $\{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (3, 2)\}$. El vértice 5 es parte del grafo aunque no sea el origen o el final de una arista; y se le conoce como vértice *aislado*. Como vemos, las aristas no tienen que ser segmentos de recta, ni importa su longitud.

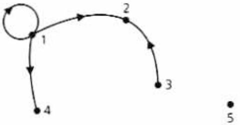


Figura 7.1

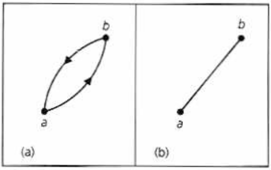


Figura 7.2

Cuando desarrollamos un *diagrama de flujo* para analizar un programa o un algoritmo, trabajamos con un tipo especial de grafo dirigido donde la forma de los vértices puede tener importancia en el análisis. Los mapas de carreteras son grafos dirigidos: en ellos, las ciudades y los pueblos están representados por los vértices y las carreteras que unen dos localidades están dadas por aristas. En estos mapas, una arista está dirigida con frecuencia en ambos sentidos. En consecuencia, si G es un grafo dirigido y $a, b \in V$, con $a \neq b$, y $(a, b), (b, a) \in E$, entonces se usa la arista única no dirigida $\{a, b\} = \{b, a\}$ de la figura 7.2 (b) para representar las dos aristas dirigidas de la figura 7.2(a). En este caso, a y b son vértices *adyacentes*. (Tampoco importa la dirección en los lazos.)

Los grafos dirigidos tienen un papel importante en muchas situaciones dentro de las ciencias de la computación. El siguiente ejemplo muestra una de ellas.

Ejemplo 7.26 Los programas pueden procesarse más rápidamente si ciertas instrucciones del programa se ejecutan en forma concurrente. Pero, para esto, debemos estar conscientes de que algunas instrucciones dependen de instrucciones anteriores del programa, puesto que no pode-

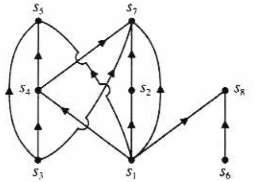
† En este capítulo sólo permitiremos la existencia de una arista de a a b. Las situaciones en que aparecen varias aristas se llaman *multigrafos* se analizarán en el capítulo 11.

mos ejecutar una instrucción que necesita resultados de otras proposiciones que no han sido ejecutadas todavía.

En la figura 7.3(a) tenemos ocho instrucciones de asignación que conforman el principio de un programa. Representamos estas instrucciones mediante los ocho vértices correspondientes $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_8$ de la parte (b) de la figura, donde una arista dirigida como (s_1, s_5) indica que la instrucción s_5 no puede ejecutarse antes de que se ejecute la instrucción s_1. El grafo dirigido resultante es el *grafo de precedencia* de las líneas dadas del programa. Observe cómo este grafo indica, por ejemplo, que la instrucción s_7 se ejecuta después que las instrucciones s_1, s_2, s_3 y s_4. Así mismo, vemos que una instrucción como s_1 debe ejecutarse antes que cualquiera de las instrucciones s_2, s_4, s_5, s_7 o s_8. En general, si un vértice (instrucción) s es adyacente *de* otros m vértices (y sólo de ellos), entonces las instrucciones correspondientes para estos m vértices deben ejecutarse antes de que pueda ejecutarse la instrucción s. En forma análoga, si un vértice (instrucción) s es adyacente *a* otros n vértices, entonces cada una de las instrucciones correspondientes de estos vértices necesita la ejecución de la instrucción s antes de poder ejecutarse. Por último, del grafo de precedencia vemos que las instrucciones s_1, s_3 y s_6 pueden procesarse en forma concurrente. De acuerdo con ello, las instrucciones s_2, s_4 y s_8 pueden ejecutarse al mismo tiempo, para después ejecutar las instrucciones s_5 y s_7. (O bien, podríamos procesar las instrucciones s_2 y s_4 en forma concurrente, y después las instrucciones s_5, s_7 y s_8.)

```
(s1)  b := 3;
(s2)  c := b+2;
(s3)  a := 1;
(s4)  d := a*b+5;
(s5)  e := d-1;
(s6)  f := 7;
(s7)  e := c+d;
(s8)  g := b*f;
```

(a)



(b)

Figura 7.3

Ahora queremos considerar la forma en que las relaciones y los grafos dirigidos se relacionan entre sí. Para comenzar, dado un conjunto A y una relación $\mathcal{R}$ sobre A, podemos construir un grafo dirigido G con el conjunto de vértices A y conjunto de aristas $E \subseteq A \times A$, donde $(a, b) \in E$ si $a, b \in A$ y $a \mathcal{R} b$. Esto se demuestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.27

Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sea $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2)\}$ una relación sobre A. El grafo dirigido asociado con $\mathcal{R}$ aparece en la figura 7.4(a). Si no se tienen en cuenta las direcciones, obtenemos el *grafo no dirigido asociado* que se muestra en la parte (b) de la figura. Aquí vemos que el grafo es *conexo*, en el sentido de que, para cualesquiera dos vértices x, y con $x \neq y$, existe un *camino simple* que comienza en x y termina en y. Tal camino simple consiste en una *sucesión finita de aristas no dirigidas*, de modo que las aristas $\{1,2\}, \{2,4\}$ proporcionan un camino simple de 1 a 4, y las aristas $\{3,4\}$, $\{4,2\}$ y $\{2,1\}$ ofrecen un camino simple de 3 a 1. La sucesión de aristas $\{3,4\}, \{4,2\}$ y $\{2,3\}$ proporcionan un camino simple de 3 a 3. Este camino simple *cerrado* se conoce como *ciclo*. Éste es un ejemplo de un ciclo no dirigido de *longitud* tres, ya que tiene tres aristas en él.

Cuando trabajamos con caminos simples (en grafos dirigidos y no dirigidos), no deben repetirse los vértices. Por lo tanto, la sucesión de aristas $\{a, b\}, \{b, e\}, \{e, f\}, \{f, b\}, \{b, d\}$ de la figura 7.4(c) *no* se considera un camino simple (de a a d) ya que pasa por el vértice b más de una vez. En el caso de los ciclos, el camino simple comienza y termina en el mismo vértice y tiene *al menos tres aristas*. La sucesión de aristas $(b, f), (f, e), (e, d), (d, c), (c, b)$ presenta un *ciclo dirigido* de longitud cinco en la figura 7.4(d). *Ninguna* de las seis aristas $(b, f), (f, e), (e, b), (b, d), (d, c), (c, b)$ produce un ciclo dirigido en la figura, debido a la repetición del vértice b. Si hacemos caso omiso de sus direcciones, las seis aristas correspondientes, en la parte (c) de la figura, pasan igualmente por el vértice b más de una vez. En consecuencia, no se considera que estas aristas formen un ciclo para el grafo no dirigido de la figura 7.4(c).

Ahora bien, puesto que hemos pedido que un ciclo tenga una *longitud* de al menos tres, no consideraremos a los lazos como ciclos. También observamos que los lazos no tienen nada que ver con la conexión de los grafos.

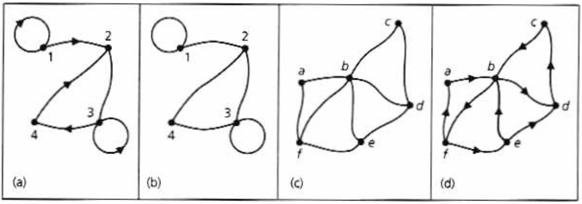


Figura 7.4

Optamos por definir formalmente la siguiente idea, debido a su importancia para lo hecho en la sección 6.3.

Definición 7.15 Un grafo dirigido G sobre V es *fuertemente conexo* si para todos $x, y \in V$, tales que $x \neq y$, existe un camino simple (en G) de aristas dirigidas de x a y; es decir, o bien la arista dirigida (x, y) está en G o, para algún $n \in \mathbf{Z}^+$ y vértices distintos $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, las aristas dirigidas (x, v_1) $(v_1, v_2), \ldots, (v_n, y)$ están en G.

En este sentido hablamos de las máquinas fuertemente conexas en el capítulo 6. El grafo de la figura 7.4(a) es conexo pero no fuertemente conexo. Por ejemplo, no existe un camino simple dirigido de 3 a 1. En la figura 7.5, el grafo dirigido sobre $V = \{1, 2, 3, 4\}$ es fuertemente conexo y *sin lazos*. Esto también es cierto en cuanto al grafo dirigido de la figura 7.4(d).

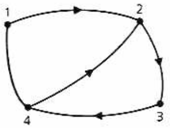


Figura 7.5

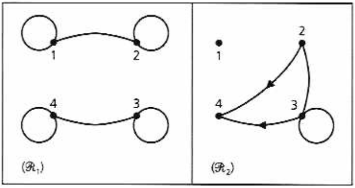


Figura 7.6

Ejemplo 7.28 Para el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, consideremos las relaciones $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{(2, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$. Como lo muestra la figura 7.6, los grafos de estas relaciones son *disconexos*. Sin embargo, cada grafo es la unión de dos grafos conexos llamados *componentes* del grafo. Para $\mathcal{R}_1$, el grafo está formado por dos componentes fuertemente conexas. Para $\mathcal{R}_2$, una componente consta de un vértice aislado y la otra componente es conexa pero no fuertemente conexa.

Ejemplo 7.29 Los grafos de la figura 7.7 son ejemplos de grafos no dirigidos sin lazos y que tienen una arista por cada par de vértices distintos. Estos grafos ilustran los *grafos completos* de n vértices que se designan por K_n. En la figura 7.7 tenemos ejemplos de los grafos completos con tres, cuatro y cinco vértices, respectivamente. El grafo completo K_2 consta de dos vértices x, y y una arista que los une, mientras que K_1 consta solamente de un vértice, sin aristas, debido a que no se permiten los lazos.

En K_5, se cruzan dos aristas, $\{3, 5\}$ y $\{1, 4\}$. Sin embargo, ningún punto de intersección crea un nuevo vértice. Si intentamos evitar el cruce de las aristas mediante otro trazo del grafo, volveremos a tener el mismo problema una y otra vez. Esta dificultad será analizada en el capítulo 11 cuando hablemos de la planaridad de los grafos.

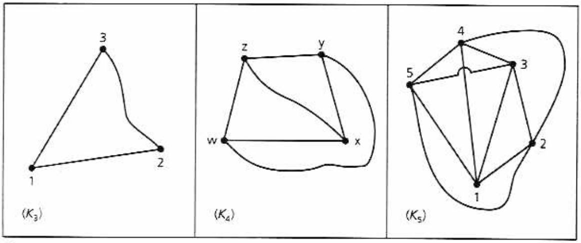


Figura 7.7

Para un grafo G sobre un conjunto de vértices V, el grafo da lugar a una relación $\mathcal{R}$ sobre V tal que $x\mathcal{R}y$ si (x, y) es una arista de G. En consecuencia, existe una matriz $(0, 1)$ para G, y como esta matriz de relación proviene de las adyacencias de los pares de vértices, se le conoce como *matriz de adyacencia* de G y como matriz de relación de $\mathcal{R}$.

En este momento ligaremos las propiedades de las relaciones y la estructura de los grafos dirigidos.

Ejemplo 7.30

Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 1)\}$, entonces $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva y antisimétrica sobre A, pero no es simétrica ni transitiva. El grafo dirigido asociado a $\mathcal{R}$ consta de cinco aristas, tres de las cuales son lazos que resultan de la propiedad reflexiva de $\mathcal{R}$. (Véase la Fig. 7.8.) En general, si $\mathcal{R}$ es una relación sobre un conjunto finito A, entonces $\mathcal{R}$ es reflexiva si y sólo si su grafo dirigido posee un lazo en cada vértice (elemento de A).

Ejemplo 7.31

La relación $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ es simétrica sobre $A = \{1, 2, 3\}$, pero no es reflexiva, antisimétrica ni transitiva. El grafo dirigido de $\mathcal{R}$ aparece en la figura 7.9. En general, una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto finito A es simétrica si y sólo si su grafo dirigido contiene solamente lazos y aristas no dirigidas.

Ejemplo 7.32

Para $A = \{1, 2, 3\}$, consideremos $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$. El grafo dirigido de $\mathcal{R}$ aparece en la figura 7.10. En este caso, $\mathcal{R}$ es transitiva y antisimétrica, pero no reflexiva ni simétrica. El grafo dirigido indica que una relación sobre un conjunto A es transitiva si y sólo si su grafo dirigido satisface lo siguiente: para cualesquiera $x, y \in A$, si existe un camino simple (dirigido) de x a y en el grafo asociado, entonces también existe una arista (x, y). [En este caso, $(1, 2), (2, 3)$ es un camino simple (dirigido) de 1 a 3, por lo que también tenemos, por transitividad, la arista $(1, 3)$.] Observe que el grafo dirigido de la figura 7.3 del ejemplo 7.26 también tiene esta propiedad.

La relación $\mathcal{R}$ es antisimétrica debido a que no existen pares ordenados en $\mathcal{R}$ de la forma (x, y) y (y, x) con $x \neq y$. Para usar el grafo dirigido de la figura 7.10 en la caracterización de la simetría, debemos notar que para cualesquiera dos vértices x, y con $x \neq y$, el grafo contiene como máximo una de las aristas (x, y) o (y, x). Por lo tanto, no existen aristas no dirigidas distintas de los lazos.

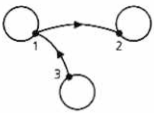


Figura 7.8

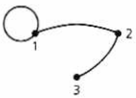


Figura 7.9

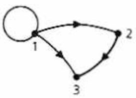


Figura 7.10

Nuestro último ejemplo trata de las relaciones de equivalencia.

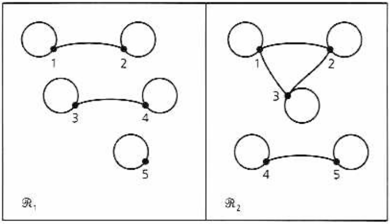


Figura 7.11

Ejemplo 7.33 Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, las siguientes son relaciones de equivalencia sobre A:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (5,5)\},$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}.$$

Sus grafos asociados aparecen en la figura 7.11. Si pasamos por alto los lazos de cada grafo, vemos que el grafo se descompone en componentes, como K_1, K_2 y K_3. En general, una relación sobre un conjunto finito A es una relación de equivalencia si y sólo si su grafo asociado es un grafo completo aumentado con los lazos en cada vértice o si consta de la unión disjunta de grafos completos aumentada con lazos en cada vértice.

EJERCICIOS 7.2

1. Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ las relaciones sobre A definidas como $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 4)\}$ y $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$. Determine $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$, $\mathcal{S}^2$ y $\mathcal{S}^3$.
2. Si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva sobre un conjunto A, demuestre que $\mathcal{R}^2$ también es reflexiva sobre A.
3. Proporcione la demostración de la inclusión opuesta del teorema 7.1.
4. Para los conjuntos A, B y C, consideremos las relaciones $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$, $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$ y $\mathcal{R}_3 \subseteq B \times C$. Demuestre que (a) $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \cup (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3)$; y (b) $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3) \subseteq (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \cap (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3)$. (Dé un ejemplo para mostrar que la inclusión propia puede ocurrir en la parte (b).)
5. Para una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A, defina $\mathcal{R}^0 = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Si $|A| = n$, demuestre que existen $s, t \in \mathbf{N}$, con $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$, tales que $\mathcal{R}^s = \mathcal{R}^t$.
6. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sea $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ una relación sobre A. Encuentre dos relaciones $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ sobre A tales que $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$ pero $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{T} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4)\}$.
7. ¿Cuántas matrices (0, 1) de 6×6 cumplen que $A = A^{tr}$?
8. Si $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ¿cuántas matrices (0, 1) F satisfacen $E \leq F$?
9. Considere los conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$, donde los elementos de cada conjunto permanecen fijos en el orden dado. Sea $\mathcal{R}_1$ una relación de A a B y sea $\mathcal{R}_2$ una relación de B a C. La matriz de relación de $\mathcal{R}_i$ es $M(\mathcal{R}_i)$, donde $i = 1, 2$. Las filas y columnas de estas matrices están indexadas por los elementos de los conjuntos adecuados A,

B y C, de acuerdo con los órdenes ya dados. La matriz de $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ es la matriz $m \times p$ $M(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2)$, tal que los elementos de A (en el orden dado) constituyen un índice de las filas, y los elementos de C (también en el orden dado) son un índice para las columnas.

Muestre que para todo $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le p$, los elementos de la i-ésima fila y la j-ésima columna de $M(\mathcal{R}_1) \cdot M(\mathcal{R}_2)$ y $M(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2)$ son iguales. [Por lo tanto, $M(\mathcal{R}_1) \cdot M(\mathcal{R}_2) = M(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2)$.]

10. Sea A un conjunto tal que $|A| = n$, y consideremos que el orden de la lista de sus elementos es fijo. Para $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, sea $M(\mathcal{R})$ la matriz de relación correspondiente.

a) Demuestre que $M(\mathcal{R}) = \mathbf{0}$ (la matriz $n \times n$ con todos sus elementos iguales a 0) si y sólo si $\mathcal{R} = \emptyset$.

b) Demuestre que $M(\mathcal{R}) = \mathbf{1}$ (la matriz $n \times n$ con todos sus elementos iguales a 1) si y sólo si $\mathcal{R} = A \times A$.

c) Use el resultado del ejercicio 9, junto con el principio de inducción matemática, para demostrar que $M(\mathcal{R}^m) = [M(\mathcal{R})]^m$ para todo $m \in \mathbf{Z}^+$.

11. Proporcione las demostraciones del teorema 7.2(a), (b) y (d).

12. Use el teorema 7.2 para escribir un programa (o para desarrollar un algoritmo) que reconozca las relaciones de equivalencia sobre un conjunto finito.

13. **a)** Trace el digrafo $G_1 = (V_1, E_1)$, donde $V_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $E_1 = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, e), (d, b), (d, e), (e, c), (e, f), (f, d)\}$.

b) Trace el grafo no dirigido $G_2 = (V_2, E_2)$, tal que $V_2 = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$ y $E_2 = \{\{s, t\}, \{s, u\}, \{s, x\}, \{t, u\}, \{t, w\}, \{u, w\}, \{u, x\}, \{v, w\}, \{v, x\}, \{v, y\}, \{w, z\}, \{x, y\}\}$.

14. Para el grafo dirigido $G = (V, E)$ de la figura 7.12, clasifique cada una de las siguientes proposiciones como verdadera o falsa.

a) El vértice c es el origen de dos aristas en G.

b) El vértice g es adyacente al vértice h.

c) Existe en G un camino simple dirigido de d a b.

d) Existen dos ciclos dirigidos en G.

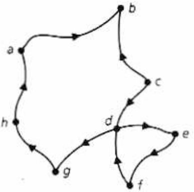


Figura 7.12

15. Para $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, cada grafo o digrafo de la figura 7.13 representa una relación $\mathcal{R}$ sobre A. Determine la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ en cada caso, así como su matriz de relación asociada $M(\mathcal{R})$.

16. Para $A = \{v, w, x, y, z\}$, cada una de las siguientes es la matriz (0, 1) de una relación $\mathcal{R}$ sobre A. En este caso, las filas (de arriba hacia abajo) y las columnas (de izquierda a derecha) están indexadas en el orden v, w, x, y, z. Determine la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ en cada caso y trace el grafo dirigido G asociado con $\mathcal{R}$.

a) $M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

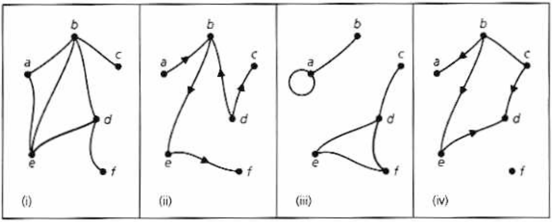


Figura 7.13

17. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con matriz de adyacencia M. ¿Cómo podemos identificar un vértice aislado de G a partir de la matriz M?

18. **a)** Sea $G = (V, E)$ el grafo dirigido tal que $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $E = \{(y, j) \mid 1 \leq i < j \leq 7\}$.

i) ¿Cuántas aristas existen para este grafo?

ii) Cuatro de los posibles caminos simples dirigidos en G de 1 a 7 serían:

1) $(1, 7)$; **2)** $(1, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 7)$;

3) $(1, 2), (2, 3), (3, 7)$; y **4)** $(1, 4), (4, 7)$.

¿Cuántos caminos simples dirigidos existen (en total) en G de 1 a 7?

b) Ahora, sea $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 2$ y considere el grafo dirigido $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ y $E = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

i) Determine $|E|$. **ii)** ¿Cuántos caminos simples dirigidos existen en G de 1 a n?

iii) Si $a, b \in \mathbf{Z}^+$ con $1 \leq a < b \leq n$, ¿cuántos caminos simples dirigidos existen en G de a a b?

(El lector puede consultar el ejercicio 20 de la sección 3.1.)

19. Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sea $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ una relación sobre A. Trace el grafo dirigido G sobre A asociado con $\mathcal{R}$. Haga lo mismo con $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$ y $\mathcal{R}^4$.

20. Para $|A| = 5$, ¿cuántas relaciones $\mathcal{R}$ sobre A existen? ¿Cuántas de estas relaciones son simétricas?

21. Sea $|A| = 5$. (a) ¿Cuántos grafos dirigidos pueden construirse sobre A? (b) ¿Cuántos de estos grafos de la parte (a) son en realidad no dirigidos?

22. ¿Cuántas aristas (no dirigidas) existen en los grafos completos K_6, K_7 y K_n, donde $n \in \mathbf{Z}^+$?

23. **a)** Manteniendo fijo el orden de los elementos como 1, 2, 3, 4, 5, determine las matrices de relación (0, 1) para las relaciones de equivalencia del ejemplo 7.33.

b) ¿Conducen los resultados de la parte (a) a alguna generalización?

24. **a)** Sea $\mathcal{R}$ la relación sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, tal que el grafo dirigido asociado con $\mathcal{R}$ consta de las componentes que se muestran en la figura 7.14, cada una de las cuales es un ciclo dirigido. Encuentre el entero $n > 1$ más pequeño, tal que $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$. ¿Cuál es el valor mínimo de $n > 1$ para el que el grafo de $\mathcal{R}^n$ contiene algunos lazos? ¿Ocurre en algún momento que el grafo de $\mathcal{R}^n$ conste únicamente de lazos?

b) Responda las mismas preguntas de la parte (a) para la relación $\mathcal{R}$ sobre $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$, si el grafo dirigido asociado con $\mathcal{R}$ se muestra en la figura 7.15.

c) ¿Indican algún hecho general los resultados de las partes (a) y (b)?

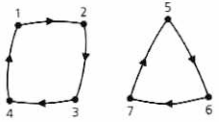


Figura 7.14

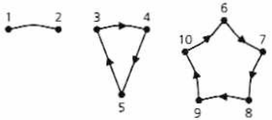


Figura 7.15

25. Trace un grafo de precedencia para el siguiente segmento de programa de cómputo:

(s_1) `a := 1;`
(s_2) `b := 2;`
(s_3) `a := a+3;`
(s_4) `c := b;`
(s_5) `a := 2 * a-1;`
(s_6) `b := a * c;`
(s_7) `c := 7;`
(s_8) `d := c+2;`

7.3 Órdenes parciales: Diagramas de Hasse

Si pedimos a algunos niños que reciten los números que conocen, oiremos una respuesta uniforme de "1, 2, 3, . . .". Sin prestar atención al hecho, dan una lista de los números en orden creciente. En esta sección analizaremos más de cerca esta idea de orden, algo que tal vez hemos dado por sentado. Comenzaremos por señalar algo acerca de los conjuntos **N**, **Z**, **Q**, **R** y **C**.

El conjunto **N** es cerrado en las operaciones binarias de suma y multiplicación (ordinarias), pero si buscamos la respuesta a la ecuación $x + 5 = 2$, vemos que ningún elemento de **N** es una solución. Así, extendemos **N** a **Z**, donde podemos realizar la resta, así como la suma y la multiplicación. Sin embargo, pronto encontramos problemas al tratar de resolver la ecuación $2x + 3 = 4$. Si nos extendemos a **Q**, podemos realizar la división entre números distintos de cero, además de las otras operaciones. Pero esto también demuestra ser inadecuado; la ecuación $x^2 - 2 = 0$ necesita que introduzcamos los números reales, pero irracionales $\pm\sqrt{2}$. Incluso después de ampliar **Q** a **R**, surgen más problemas al intentar resolver $x^2 + 1 = 0$. Por último, llegamos a **C**, el sistema de los números complejos, donde podemos resolver cualquier ecuación polinomial de la forma $c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$, donde $c_i \in \mathbf{C}$ para $0 \leq i \leq n$, $n > 0$ y $c_n \neq 0$. (Este resultado se conoce como el teorema fundamental del álgebra. Su demostración requiere material relativo a las funciones de variable compleja, por lo que no la incluiremos aquí.) Durante este proceso de construcción de **N** a **C**, para tener una mayor capacidad de resolver ecuaciones polinomiales, algo se perdió al pasar de **R** a **C**. En **R**, dados dos números r_1, r_2, con $r_1 \neq r_2$, sabemos que $r_1 < r_2$ o $r_2 < r_1$. Sin embargo, en **C** tenemos que $(2 + i) \neq (1 + 2i)$, pero ¿qué significado podemos dar a una proposición como "$(2 + i) < (1 + 2i)$"? ¡Hemos perdido la capacidad de "ordenar" los elementos en este sistema numérico!

Para comenzar a analizar más de cerca el concepto de orden procederemos como en la sección 7.1. Sea A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación sobre A. El par $(A, \mathcal{R})$ es un *conjunto parcialmente ordenado*, si la relación $\mathcal{R}$ sobre A es un orden parcial, o una relación de ordenamiento parcial (como la establecida en la definición 7.6). Si decimos que A es un conjunto parcialmente ordenado, entendemos que existe un orden parcial $\mathcal{R}$ que hace de A un conjunto parcialmente ordenado. Los ejemplos 7.1 (a), 7.2, 7.11 y 7.15 son conjuntos parcialmente ordenados.

Ejemplo 7.34

Sea A el conjunto de cursos ofrecidos en una escuela. Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre A como $x \mathcal{R} y$ si x, y son el mismo curso o si x es un prerrequisito para y. Entonces $\mathcal{R}$ hace de A un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 7.35

Definimos $\mathcal{R}$ sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ como $x \mathcal{R} y$ si $x | y$; es decir, x divide (exactamente) a y. Entonces $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$ es un orden parcial y $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado. (Esto es similar a lo que aprendimos en el ejemplo 7.15.)

Ejemplo 7.36

En la construcción de una casa, ciertas tareas, como la construcción de los cimientos, deben realizarse antes de emprender otras fases de la construcción. Si A es un conjunto de tareas que deben realizarse para construir una casa, podemos definir una relación $\mathcal{R}$ sobre A como $x \mathcal{R} y$ si x, y denotan la misma tarea o si la tarea x debe realizarse antes de que inicie la tarea y. De esta forma imponemos un orden sobre los elementos de A, lo que lo convierte en un conjunto parcialmente ordenado, también conocido como la red PERT (siglas en inglés de técnica de evaluación y revisión de programas). (Estas redes comenzaron a adquirir importancia durante la década de 1950 para el control de la complejidad que surgió en la organización de las múltiples y distintas actividades necesarias para llevar a cabo proyectos a muy gran escala. Esta técnica fue desarrollada realmente y utilizada en primer lugar por la Marina de Estados Unidos para coordinar los diversos proyectos necesarios para la construcción del submarino Polaris.)

Consideremos los diagramas de la figura 7.16. Si (a) fuera parte del grafo dirigido asociado con una relación $\mathcal{R}$, entonces, como $(1, 2), (2, 1) \in \mathcal{R}$ con $1 \neq 2$, $\mathcal{R}$ no podría ser

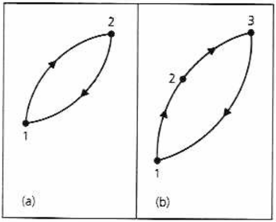


Figura 7.16

antisimétrica. Para (b), si el diagrama fuera parte del grafo de una relación transitiva $\mathcal{R}$ entonces $(1, 2), (2, 3) \in \mathcal{R} \Rightarrow (1, 3) \in \mathcal{R}$. Como $(3, 1) \in \mathcal{R}$ y $1 \neq 3$, $\mathcal{R}$ no es antisimétrica, por lo que no puede ser un orden parcial.

A partir de estas observaciones, si tenemos una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A, y G es el grafo dirigido asociado con $\mathcal{R}$, veremos que:

i) Si G contiene un par de aristas de la forma $(a, b), (b, a)$, para $a, b \in A$ con $a \neq b$, o
ii) Si $\mathcal{R}$ es transitiva y G contiene un ciclo dirigido (de longitud mayor o igual que tres),

entonces la relación $\mathcal{R}$ no puede ser antisimétrica, por lo que $(A, \mathcal{R})$ no es un orden parcial.

Ejemplo 7.37 Consideremos el grafo dirigido para el orden parcial del ejemplo 7.35. La figura 7.17(a) es la representación gráfica de $\mathcal{R}$. En la parte (b) de la figura, tenemos un diagrama un poco más sencillo, que se llama *diagrama de Hasse* de $\mathcal{R}$.

Cuando sabemos que una relación $\mathcal{R}$ es un orden parcial sobre un conjunto A, podemos eliminar los lazos de los vértices de su grafo dirigido. Puesto que $\mathcal{R}$ también es transitiva, basta con tener las aristas $(1, 2)$ y $(2, 4)$ para garantizar la existencia de la arista $(1, 4)$, así que no necesitamos incluir dicha arista. De esta forma obtenemos el diagrama de la figura 7.17(b).

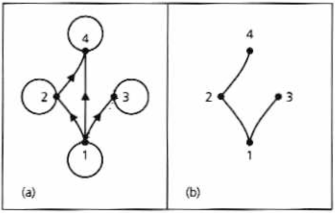


Figura 7.17

En general, si $\mathcal{R}$ es un orden parcial sobre un conjunto finito A, construimos un diagrama de Hasse para $\mathcal{R}$ sobre A trazando un segmento de x *hacia arriba, hacia* y, si $x, y \in A$ son tales que $x \mathcal{R} y$ y, lo que es más importante, si no existe otro elemento $z \in A$ tal que $x \mathcal{R} z$ y $z \mathcal{R} y$. (Así, no hay nada "en medio" de x y y.) Si adoptamos el convenio de leer el diagrama de abajo hacia arriba, no es necesario dirigir las aristas.

Ejemplo 7.38 En la figura 7.18 tenemos los diagramas de Hasse de los cuatro conjuntos parcialmente ordenados siguientes. (a) Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ y $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$, $\mathcal{R}$ es la relación de inclusión sobre A. (b) En este caso, $\mathcal{R}$ es la relación "divide exactamente" aplicada a $A = \{1, 2, 4, 8\}$. (c) y (d) Aquí tenemos la misma relación que en la parte (b), aplicada a $\{2, 3, 5, 7\}$ en la parte

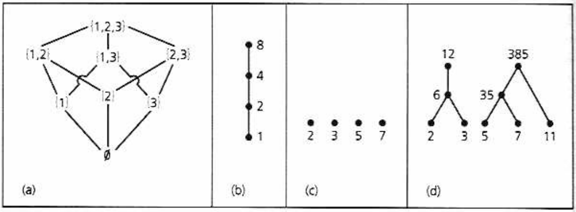


Figura 7.18

(c) y a $\{2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 35, 385\}$ en la parte (d). En la parte (c) observamos que un diagrama de Hasse puede tener todos sus vértices aislados; también puede tener dos (o más) componentes conexas, como se muestra en la parte (d).

Ejemplo 7.39 Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La relación $\mathcal{R}$ sobre A, definida como $x \mathcal{R} y$ si $x \leq y$, es un orden parcial. Esto hace de A un conjunto parcialmente ordenado que podemos designar por $(A, \leq)$. Si $B = \{1, 2, 4\} \subset A$, entonces el conjunto $(B \times B) \cap \mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (4, 4), (1, 2), (1, 4), (2, 4)\}$ es un orden parcial sobre B.

En general, si $\mathcal{R}$ es un orden parcial sobre A, entonces para cualquier subconjunto B de A, $(B \times B) \cap \mathcal{R}$ hace de B un conjunto parcialmente ordenado, si el orden parcial sobre B se induce de $\mathcal{R}$.

Ahora analizaremos un tipo especial de orden parcial.

Definición 7.16 Si $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que A es *totalmente ordenado* si para todos $x, y \in A$ ocurre que $x \mathcal{R} y$ o $y \mathcal{R} x$.

En este caso, decimos que $\mathcal{R}$ es un *orden total*.

Ejemplo 7.40

a) Sobre el conjunto $\mathbf{N}$, la relación $\mathcal{R}$ dada por $x \mathcal{R} y$ si $x \leq y$ es un orden total.

b) La relación de inclusión aplicada a $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ es un orden parcial, pero no total: $\{1, 2\}, \{1, 3\} \in A$ pero no ocurre que $\{1, 2\} \subseteq \{1, 3\}$ ni $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2\}$.

c) El diagrama de Hasse de la parte (b) de la figura 7.18 es un orden total.

¿Podrían surgir estos conceptos de orden parcial o total en un problema de la industria?

Pensemos que un fabricante de juguetes está a punto de lanzar al mercado un nuevo producto y debe incluir un conjunto de instrucciones para su montaje. Para ensamblar el

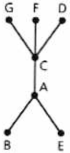


Figura 7.19

nuevo juguete hay que realizar siete tareas, A, B, C, . . . , G, que deben ejecutarse en el orden parcial dado por el diagrama de Hasse de la figura 7.19. Aquí vemos, por ejemplo, que B, A y E deben terminarse antes de realizar la tarea C. Puesto que el conjunto de instrucciones debe ser una lista de estas tareas, numeradas 1, 2, 3, . . . , 7, ¿cómo puede escribir esta lista el fabricante y asegurarse de conservar el orden parcial del diagrama de Hasse?

Lo que realmente nos estamos preguntando en este caso es si podemos tomar el orden parcial $\mathcal{R}$ dado por el diagrama de Hasse y encontrar un orden total $\mathcal{T}$ sobre estas tareas, para el cual $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$. La respuesta es sí, y la técnica que usaremos se llama *ordenación topológica.*

Algoritmo de ordenación topológica

(para un orden parcial $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A tal que $|A| = n$)

Paso 1: Hacemos $k = 1$. Sea H_1 el diagrama de Hasse del orden parcial.

Paso 2: Seleccionamos un vértice v_k en H_k tal que ninguna arista (implícitamente dirigida) de H_k comience en v_k.

Paso 3: Si $k = n$, el proceso termina y tenemos un orden total

$$\mathcal{T}: v_n < v_{n-1} < \cdots < v_2 < v_1$$

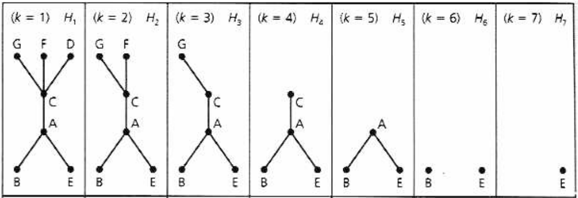
que contiene a $\mathcal{R}$.

Si $k < n$, entonces eliminamos de H_k el vértice v_k y todas las aristas (implícitamente dirigidas) de H_k que terminan en v_k. Llamamos al resultado H_{k+1}. Aumentamos k en 1 y regresamos al paso 2.

En este caso, hemos presentado nuestro algoritmo como una lista precisa de instrucciones, sin hacer referencia a su implementación en un lenguaje de programación particular.

Antes de aplicar este algoritmo a nuestro problema, debemos observar el uso deliberado de la palabra "un" antes de la palabra "vértice" en el paso 2. Esto implica que la selección no tiene que ser única y que podemos obtener varios órdenes totales $\mathcal{T}$ que contengan a $\mathcal{R}$. Así mismo, en el paso 3, para los vértices v_{i-1} tales que $2 \leq i \leq n$, usamos la notación $v_i < v_{i-1}$ ya que sugiere mejor la idea "v_i antes de v_{i-1}" que la notación $v_i \, \mathcal{T} \, v_{i-1}$.

En la figura 7.20, mostramos los diagramas de Hasse que surgen al aplicar el algoritmo de ordenación topológica al orden parcial de la figura 7.19. Debajo de cada diagrama mostramos cómo se va obteniendo el orden total.



D	F < D	G < F < D	C < G < F < D	A < C < G < F < D	B < A < C < G < F < D	E < B < A < C < G < F < D

Figura 7.20

Si el fabricante de juguetes escribe las instrucciones en una lista, como 1-E, 2-B, 3-A, 4-C, 5-G, 6-F, 7-D, tendrá un orden total que conserva el orden parcial necesario para el montaje correcto. Este orden total es una de 12 respuestas posibles.

Como es usual en las matemáticas discretas y combinatorias, este algoritmo ofrece un procedimiento que reduce el tamaño del problema con cada aplicación sucesiva.

En el algoritmo de ordenación topológica, vimos la forma en que se utilizó el diagrama de Hasse para determinar un orden total que contuviera un conjunto parcialmente ordenado dado $(A, \mathscr{R})$. Este algoritmo nos pide ahora que analicemos más propiedades de un orden parcial. Para empezar, subrayaremos especialmente el papel del vértice v_k en el paso 2 del algoritmo. ¿Cuál es la relación entre el orden parcial $(A, \mathscr{R})$ y su diagrama de Hasse, de modo que podamos describir un vértice como v_k en términos de $\mathscr{R}$? Esta pregunta nos lleva a los conceptos siguientes.

Definición 7.17 Si $(A, \mathscr{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento $x \in A$ es un elemento *maximal* de A si para todo $a \in A$, $a \neq x \Rightarrow x \not\mathscr{R}\, a$. Un elemento $y \in A$ es un elemento *minimal* de A si para todo $b \in A$, $b \neq$ y, entonces $b \not\mathscr{R}\, y$.

Si usamos la contrapositiva de la primera proposición de la definición 7.17, entonces podemos establecer que $x(\in A)$ es un elemento maximal si para todo $a \in A$, $x \mathscr{R} a \Rightarrow x = a$. De manera similar, $y \in A$ es un elemento minimal si para cualquier $b \in A$, $b \mathscr{R} y \Rightarrow b = y$.

Ejemplo 7.41 Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3\}$ y $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$.

a) Sea $\mathscr{R}$ la relación de inclusión sobre A. Entonces $\mathscr{U}$ es maximal y $\emptyset$ es minimal para el conjunto parcialmente ordenado $(A, \subseteq)$.
b) Para B, la colección de subconjuntos propios de $\{1, 2, 3\}$, sea $\mathscr{R}$ la relación de inclusión sobre B. En el conjunto parcialmente ordenado $(B, \subseteq)$, los conjuntos $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ y $\{2, 3\}$ son elementos maximales; $\emptyset$ sigue siendo el único elemento minimal.

Ejemplo 7.42 Si $\mathcal{R}$ es la relación "menor o igual que" sobre el conjunto $\mathbf{Z}$, tenemos que $(\mathbf{Z}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado sin elementos maximales ni minimales. Sin embargo, el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbf{N}, \leq)$ tiene el elemento minimal 0 pero no tiene elementos maximales.

Ejemplo 7.43 Después de volver a analizar los órdenes parciales de las partes (b), (c) y (d) del ejemplo 7.38, podemos hacer las observaciones siguientes.

1) El orden parcial de la parte (b) tiene el elemento maximal único 8 y el elemento minimal único 1.
2) Cada uno de los cuatro elementos (2, 3, 5 y 7) es un elemento maximal y un elemento minimal para el conjunto parcialmente ordenado de la parte (c) del ejemplo 7.38.
3) En la parte (d), los elementos 12 y 385 son maximales. Cada uno de los elementos 2, 3, 5, 7 y 11 es un elemento minimal para este orden parcial.

¿Existen condiciones que nos indiquen cuándo un conjunto parcialmente ordenado debe tener un elemento maximal o minimal?

TEOREMA 7.3 Si $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado y A es finito, entonces A tiene un elemento maximal y uno minimal.

Demostración: Sea $a_1 \in A$. Si no existe un elemento $a \in A$ tal que $a \neq a_1$ y $a_1 \mathcal{R} a$, entonces a_1 es maximal. De otra forma, existe un elemento $a_2 \in A$ tal que $a_2 \neq a_1$ y $a_1 \mathcal{R} a_2$. Si ningún elemento $a \in A$, $a \neq a_2$ satisface $a_2 \mathcal{R} a$, entonces a_2 es maximal. En caso contrario, podemos encontrar $a_3 \in A$ tal que $a_3 \neq a_2$, $a_3 \neq a_1$ (¿por qué?), mientras que $a_1 \mathcal{R} a_2$ y $a_2 \mathcal{R} a_3$. Si continuamos de esta forma, como A es finito, llegaremos a un elemento $a_n \in A$ tal que $a_n \not\mathcal{R}\, a$ para todo $a \in A$, $a \neq a_n$, de modo que a_n es maximal.

La demostración de la existencia de un elemento minimal es similar.

Si regresamos al algoritmo de ordenación topológica, vemos que en cada iteración del paso 2 del algoritmo estamos seleccionando un elemento maximal del conjunto parcialmente ordenado original $(A, \mathcal{R})$, o un conjunto parcialmente ordenado de la forma $(B, \mathcal{R}')$, donde $\emptyset \neq B \subset A$ y $\mathcal{R}' = (B \times B) \cap \mathcal{R}$. Al menos existe un elemento de este tipo (en cada iteración) debido al teorema 7.3. Después, en la segunda parte del paso 3, si x es el elemento maximal seleccionado (en el paso 2), eliminamos del conjunto parcialmente ordenado actual todos los elementos de la forma (a, x). Esto produce un conjunto parcialmente ordenado más pequeño.

Ahora pasemos al estudio de algunos otros conceptos relativos a los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 7.18 Si $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces decimos que $x \in A$ es un elemento *mínimo* si $x \mathcal{R} a$ para todo $a \in A$. El elemento $y \in A$ es un elemento *máximo* si $a \mathcal{R} y$ para todo $a \in A$.

Ejemplo 7.44 Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ y $\mathcal{R}$ la relación de inclusión.

a) Si $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$, el conjunto parcialmente ordenado $(A, \subseteq)$ tiene a $\emptyset$ como elemento mínimo y $\mathcal{U}$ como elemento máximo.

b) Si B es la colección de los subconjuntos no vacíos de $\mathcal{U}$, el conjunto parcialmente ordenado $(B, \subseteq)$ tiene a $\mathcal{U}$ como elemento máximo. En este caso no existe el elemento mínimo, pero hay tres elementos minimales.

Ejemplo 7.45 Para los órdenes parciales del ejemplo 7.38, vemos que

1) El orden parcial de la parte (b) tiene un elemento máximo 8 y un elemento mínimo 1.

2) No existen elementos máximo ni mínimo para el conjunto parcialmente ordenado de la parte (c).

3) No existen elementos máximo ni mínimo para el orden parcial de la parte (d).

Hemos visto que es posible que un conjunto parcialmente ordenado tenga varios elementos maximales y minimales. ¿Qué podemos decir de los elementos mínimo y máximo?

TEOREMA 7.4 Si el conjunto parcialmente ordenado $(A, \mathcal{R})$ tiene un elemento máximo (mínimo), entonces ese elemento es único.

Demostración: Supongamos que $x, y \in A$ y que ambos son elementos máximos. Como x es un elemento máximo, $y \mathcal{R} x$. De la misma forma, $x \mathcal{R} y$, puesto que y es un elemento máximo. Como $\mathcal{R}$ es antisimétrica, se sigue que $x = y$.

La demostración para el caso del elemento mínimo es análoga.

Definición 7.19 Sea $(A, \mathcal{R})$ un conjunto parcialmente ordenado con $B \subseteq A$. Un elemento $x \in A$ es una *cota inferior* de B si $x \mathcal{R} b$ para todo $b \in B$. De manera similar, un elemento $y \in A$ es una *cota superior* de B si $b \mathcal{R} y$ para todo $b \in B$.

Un elemento $x' \in A$ es una *máxima cota inferior o ínfimo* (ínf) de B si es una cota inferior de B y si para todas las demás cotas inferiores x'' de B tenemos que $x'' \mathcal{R} x'$. En forma análoga, $y' \in A$ es una *mínima cota superior* o *supremo* (sup) de B si es una cota superior de B y si $y' \mathcal{R} y''$ para todas las demás cotas superiores y'' de B.

Ejemplo 7.46 Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$, con $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$ y sea $\mathcal{R}$ la relación de inclusión sobre A. Si $B = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, entonces $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ y $\{1, 2, 3, 4\}$ son cotas superiores para B (en $(A, \mathcal{R})$), mientras que $\{1, 2\}$ es una mínima cota superior (y está en B). Por otro lado, una máxima cota inferior para B es $\emptyset$, que no está en B.

Ejemplo 7.47 Sea $\mathcal{R}$ la relación "menor o igual que" para el conjunto parcialmente ordenado $(A, \mathcal{R})$.

a) Si $A = \mathbf{R}$ y $B = [0, 1]$, entonces B tiene ínfimo 0 y supremo 1. Observemos que $0, 1 \in B$. Para el conjunto $C = (0, 1]$, C tiene ínfimo 0 y supremo 1, $1 \in C$ pero $0 \notin C$.

b) Sea $A = \mathbf{R}$ de nuevo, y $B = \{q \in \mathbf{Q} \mid q^2 < 2\}$. Entonces B tiene a $\sqrt{2}$ como supremo y $-\sqrt{2}$ como ínfimo; ninguno de estos números reales está en B.

c) Ahora, sea $A = \mathbf{Q}$, con B como en la parte (b). Entonces B no tiene ínfimo ni supremo.

Estos ejemplos nos llevan al siguiente resultado.

TEOREMA 7.5 Si $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$, entonces B tiene a lo sumo un ínfimo (supremo).

Demostración: Se deja al lector.

Cerraremos esta sección con una última estructura ordenada.

Definición 7.20 El conjunto parcialmente ordenado $(A, \mathcal{R})$ es un *retículo* si para cualesquiera $x, y \in A$, los elementos $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ existen en A.

Ejemplo 7.48 Para $A = \mathbf{N}$ y $x, y \in \mathbf{N}$, definimos $x \mathcal{R} y$ como $x \leq y$. Entonces $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$, $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ y $(\mathbf{N}, \leq)$ es un retículo.

Ejemplo 7.49 Para el conjunto parcialmente ordenado del ejemplo 7.44(a), si $S, T \subseteq \mathcal{U}$, con $\sup\{S, T\} = S \cup T$ e $\inf\{S, T\} = S \cap T$, entonces $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ es un retículo.

Ejemplo 7.50 Consideremos el conjunto parcialmente ordenado del ejemplo 7.38(d). En este caso vemos, por ejemplo, que

$$\sup\{2, 3\} = 6,\ \sup\{3, 6\} = 6,\ \sup\{5, 7\} = 35,\ \sup\{7, 11\} = 385,\ \sup\{11, 35\} = 385 \text{ e}$$

$$\inf\{3, 6\} = 3,\ \inf\{2, 12\} = 2,\ \inf\{35, 385\} = 35.$$

Sin embargo, aunque $\sup\{2, 3\}$ exista, no existe un ínfimo para los elementos 2 y 3. Además, tampoco tenemos (entre otras cosas) $\inf\{5, 7\}$, $\inf\{11, 35\}$, $\inf\{3, 35\}$ y $\sup\{3, 35\}$. En consecuencia, este orden parcial no es un retículo.

EJERCICIOS 7.3

1. Trace el diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$, tal que $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Sea $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ y defina $\mathcal{R}$ sobre A por $x \mathcal{R} y$ si $x \mid y$. Trace el diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(A, \mathcal{R})$.

3. Sean $(A, \mathcal{R}_1)$, $(B, \mathcal{R}_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. En $A \times B$, defina la relación $\mathcal{R}$ como $(a, b)\mathcal{R}(x, y)$ si $a \mathcal{R}_1 x$ y $b \mathcal{R}_2 y$. Demuestre que $\mathcal{R}$ es un orden parcial.

4. Si las relaciones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ del ejercicio 3 son órdenes totales, ¿es $\mathcal{R}$ un orden total?

5. Ordene topológicamente el diagrama de Hasse de la parte (a) del ejemplo 7.38.

6. Para $A = \{a, b, c, d, e\}$, el diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado $(A, \mathcal{R})$ aparece en la figura 7.21.
   a) Determine la matriz de relación de $\mathcal{R}$.
   b) Construya el grafo dirigido G (sobre A) asociado a $\mathcal{R}$.
   c) Ordene topológicamente el conjunto parcialmente ordenado $(A, \mathcal{R})$.

7. El grafo dirigido G de una relación $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ aparece en la figura 7.22. (a) Verifique que $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado y encuentre su diagrama de Hasse. (b) Ordene topológicamente $(A, \mathcal{R})$. (c) ¿Cuántas aristas dirigidas más se necesitan en la figura 7.22 para extender $(A, \mathcal{R})$ a un orden total?

8. Sea $\mathcal{R}$ una relación transitiva sobre un conjunto A. Demuestre que $\mathcal{R}$ es un orden parcial sobre A si y sólo si $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^c = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

9. Demuestre que un conjunto parcialmente ordenado finito $(A, \mathcal{R})$ tiene un elemento minimal.

10. Demuestre que si un conjunto parcialmente ordenado $(A, \mathcal{R})$ tiene un elemento mínimo, éste es único.

11. Demuestre el teorema 7.5.

12. Dé un ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado con cuatro elementos maximales pero que no tenga elemento máximo.

13. Si $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado pero no es un orden total y $\emptyset \neq B$, ¿implica esto que $(B \times B) \cap \mathcal{R}$ convierte a B en un conjunto parcialmente ordenado pero no en un orden total?

14. Si $\mathcal{R}$ es una relación sobre A, y G es el grafo dirigido asociado, ¿cómo podemos reconocer a partir de G que $(A, \mathcal{R})$ es un orden total?

15. Si G es el grafo dirigido de una relación $\mathcal{R}$ sobre A, con $|A| = n$, y $(A, \mathcal{R})$ es un orden total, ¿cuántas aristas (incluyendo los lazos) hay en G?

16. Sea $M(\mathcal{R})$ la matriz de relación de la relación $\mathcal{R}$ sobre A, con $|A| = n$. Si $(A, \mathcal{R})$ es un orden total, ¿cuántos unos aparecen en $M(\mathcal{R})$?

17. **a)** Describa la estructura del diagrama de Hasse de un conjunto totalmente ordenado $(A, \mathcal{R})$, donde $|A| = n \geq 1$.
   b) Para un conjunto A tal que $|A| = n \geq 1$, ¿cuántas relaciones sobre A son órdenes totales?

18. **a)** Para $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, sea $(A, \mathcal{R})$ un conjunto parcialmente ordenado. Si $M(\mathcal{R})$ es la matriz de relación correspondiente, ¿cómo podemos reconocer un elemento minimal del conjunto parcialmente ordenado a partir de $M(\mathcal{R})$?
   b) Responda la pregunta de la parte (a) reemplazando el adjetivo "minimal" por el adjetivo "maximal".
   c) ¿Cómo podemos reconocer la existencia de un elemento máximo o mínimo en $(A, \mathcal{R})$ a partir de la matriz de relación $M(\mathcal{R})$?

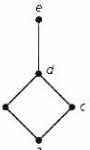


Figura 7.21

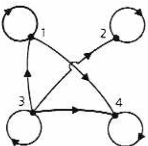


Figura 7.22

19. Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$, con $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$ y sea $\mathcal{R}$ la relación de inclusión sobre A. Para cada uno de los siguientes subconjuntos B (de A), determine el ínfimo y el supremo de B.

a) $B = \{\{1\}, \{2\}\}$ **b)** $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$ **c)** $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
d) $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ **e)** $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$
f) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

20. Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, con $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$ y sea $\mathcal{R}$ la relación de inclusión sobre A. Para $B = \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}\} \subseteq A$, determine lo siguiente:

a) El número de cotas superiores de B que contienen (i) tres elementos de $\mathcal{U}$; (ii) cuatro elementos de $\mathcal{U}$; (iii) cinco elementos de $\mathcal{U}$.
b) El número de cotas superiores para B **c)** El supremo de B
d) El número de cotas inferiores para B **e)** El ínfimo de B

21. Defina la relación $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $\mathbf{Z}$ de la forma siguiente: $a \mathcal{R} b$ si $a - b$ es un entero par no negativo. Verifique que $\mathcal{R}$ define un orden parcial en $\mathbf{Z}$. ¿Es este orden parcial un orden total?

22. Para $A = \{2, 3, 4, \ldots, 1998, 1999, 2000\}$, defina la relación $\mathcal{R}$ sobre A como $x \mathcal{R} y$ si x divide (exactamente) a y. ¿Cuántos elementos maximales existen para el orden parcial $(A, \mathcal{R})$?

23. **a)** Si $A = \{x, y\}$, ¿cuántos órdenes parciales sobre A tienen a x como elemento minimal?
b) Si $B = \{x, y, z\}$, ¿cuántos órdenes parciales sobre B tienen a x como elemento minimal?

24. Para $X = \{0, 1\}$, sea $A = X \times X$. Defina la relación $\mathcal{R}$ sobre A como $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si (i) $a < c$; o bien (ii) $a = c$ y $b \leq d$.

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es un orden parcial para A.
b) Determine todos los elementos maximales y minimales para este orden parcial.
c) ¿Existe un elemento mínimo? ¿Existe un elemento máximo?
d) ¿Es este orden parcial un orden total?

25. Sea $X = \{0, 1, 2\}$ y $A = X \times X$. Defina la relación $\mathcal{R}$ sobre A como en el ejercicio 24. Responda las mismas preguntas de dicho ejercicio para esta relación $\mathcal{R}$ y el conjunto A.

26. Para $n \in \mathbf{Z}^+$, sea $X = \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$ y $A = X \times X$. Defina la relación $\mathcal{R}$ sobre A como en el ejercicio 24. Recuerde que cada elemento de este orden total $\mathcal{R}$ es un par ordenado cuyas componentes son a su vez pares ordenados. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{R}$?

27. Sea $(A, \mathcal{R})$ un conjunto parcialmente ordenado. Demuestre o refute las siguientes proposiciones.

a) Si $(A, \mathcal{R})$ es un retículo, entonces es un orden total.
b) Si $(A, \mathcal{R})$ es un orden total, entonces es un retículo.

28. Si $(A, \mathcal{R})$ es un retículo y A es finito, demuestre que $(A, \mathcal{R})$ tiene un elemento máximo y un elemento mínimo.

29. Si $A = \{a, b, c, d, e, v, w, x, y, z\}$, considere el conjunto parcialmente ordenado $(A, \mathcal{R})$ cuyo diagrama de Hasse se muestra en la figura 7.23. Encuentre

a) $\inf\{b, c\}$ **b)** $\inf\{b, w\}$ **c)** $\inf\{e, x\}$ **d)** $\sup\{c, b\}$
e) $\sup\{d, x\}$ **f)** $\sup\{c, e\}$ **g)** $\sup\{a, v\}$

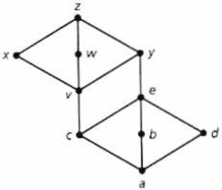


Figura 7.23

¿Es $(A, \mathscr{R})$ un retículo? ¿Existe un elemento maximal? ¿Un elemento minimal? ¿Un elemento máximo? ¿Un elemento mínimo?

30. Sea $(A, \mathscr{R})$ un conjunto totalmente ordenado. Si para todo $\emptyset \neq B \subseteq A$ el conjunto totalmente ordenado $(B, (B \times B) \cap \mathscr{R})$ tiene un elemento mínimo, entonces se dice que $(A, \mathscr{R})$ está *bien ordenado*. (Vimos esta idea en la sección 4.1, donde usamos el buen orden de $(\mathbf{Z}^+, \leq)$ para establecer el principio de inducción matemática.)

Para cada uno de los siguientes conjuntos totalmente ordenados, determine si el conjunto está bien ordenado.

a) $(\mathbf{N}, \leq)$ **b)** $(\mathbf{Z}, \leq)$ **c)** $(\mathbf{Q}, \leq)$
d) $(\mathbf{Q}^+, \leq)$ **e)** $(P, \leq)$, donde P es el conjunto de todos los primos.
f) $(A, \leq)$, donde A es un subconjunto no vacío de $\mathbf{Z}^+$
g) $(A, \leq)$, donde $\emptyset \neq A \subset \mathbf{Z}$ y A es finito

7.4 Relaciones de equivalencia y particiones

Como ya observamos en la definición 7.7, una relación $\mathscr{R}$ sobre un conjunto A es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. Para cualquier conjunto $A \neq \emptyset$, la relación de igualdad es una relación de equivalencia sobre A, donde dos elementos de A están relacionados si son idénticos; la igualdad establece así la propiedad de "ser lo mismo" entre los elementos de A.

Si consideramos la relación $\mathscr{R}$ sobre $\mathbf{Z}$ definida por $x \mathscr{R} y$ si $x - y$ es un múltiplo de 2, entonces $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{Z}$ donde todos los enteros pares están relacionados entre sí, al igual que todos los enteros impares. En este caso, por ejemplo, no tenemos que $4 = 8$, pero sí que $4 \mathscr{R} 8$, pues aquí ya no nos preocupamos por el tamaño de un número sino solamente por dos propiedades: "paridad" o "disparidad". Esta relación separa a $\mathbf{Z}$ en dos subconjuntos formados por los enteros impares y los pares: $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\} \cup \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$. Esta separación de $\mathbf{Z}$ es un ejemplo de una partición, concepto íntimamente ligado al de relación de equivalencia. En esta sección analizaremos esa relación y veremos cómo nos ayuda a contar el número de relaciones de equivalencia sobre un conjunto finito.

Definición 7.21 Dado un conjunto A y un conjunto de índices I, sea $\emptyset \neq A_i \subseteq A$ para cada $i \in I$. Entonces $\{A_i\}_{i \in I}$ es una *partición* de A si

a) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ y **b)** $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todos $i, j \in I$ tales que $i \neq j$.

Cada subconjunto A_i es una *celda* o *bloque* de la partición.

Ejemplo 7.51 Si $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, entonces en cada uno de los siguientes casos se determina una partición de A:

a) $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$
b) $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
c) $A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4, 6, 7, 9\}, A_3 = \{5, 8, 10\}$
d) $A_i = \{i, i + 5\}, 1 \leq i \leq 5$

Ejemplo 7.52 Sea $A = \mathbf{R}$ y para cada $i \in \mathbf{Z}$, sea $A_i = [i, i+1)$. Entonces $\{A_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ es una partición de $\mathbf{R}$.

¿Cómo se relacionan las particiones con las relaciones de equivalencia?

Definición 7.22 Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Para cualquier $x \in A$, la *clase de equivalencia* de x, que se denota con $[x]$, se define como $[x] = \{y \in A \mid y \mathcal{R} x\}$.

Ejemplo 7.53 Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbf{Z}$ como $x \mathcal{R} y$ si $4 \mid (x-y)$. Para esta relación de equivalencia, tenemos que

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} = \{4k \mid k \in \mathbf{Z}\}\\
[1] &= \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\} = \{4k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\}\\
[2] &= \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\} = \{4k+2 \mid k \in \mathbf{Z}\}\\
[3] &= \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\} = \{4k+3 \mid k \in \mathbf{Z}\}.
\end{aligned}
$$

Así mismo, tenemos, por ejemplo, que $[6] = [2] = [-2]$, $[51] = [3]$ y $[17] = [1]$. Lo que es más importante, $\{[0], [1], [2], [3]\}$ es una partición de $\mathbf{Z}$.

[*Nota:* En este caso, el conjunto de índices de la partición está implícito. Si, por ejemplo, $A_0 = [0]$, $A_1 = [1]$, $A_2 = [2]$ y $A_3 = [3]$, entonces un conjunto posible de índices I (como en la definición 7.21) es $\{0, 1, 2, 3\}$. Cuando a una colección de conjuntos se le llama partición (de un conjunto dado) sin que se especifique un conjunto de índices, el lector deberá entender que esa situación se parece a ésta, en la que el conjunto de índices está implícito.]

Ejemplo 7.54 Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $\mathbf{Z}$ como $a \mathcal{R} b$ si $a^2 = b^2$ (o $a = \pm b$). Para todo $a \in \mathbf{Z}$, tenemos que $a^2 = a^2$, por lo que $a \mathcal{R} a$, y $\mathcal{R}$ es reflexiva. Si $a, b \in \mathbf{Z}$ con $a \mathcal{R} b$, entonces $a^2 = b^2$, lo que implica que $b^2 = a^2$ o $b \mathcal{R} a$. En consecuencia, la relación $\mathcal{R}$ es simétrica. Por último, si $a, b, c \in \mathbf{Z}$, con $a \mathcal{R} b$ y $b \mathcal{R} c$, entonces $a^2 = b^2$ y $b^2 = c^2$, por lo que $a^2 = c^2$ y $a \mathcal{R} c$. Esto hace que la relación sea transitiva. Una vez establecidas las tres propiedades necesarias, ahora sabemos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

¿Qué podemos decir de la partición correspondiente de $\mathbf{Z}$?

En este caso tenemos que $[0] = \{0\}$, $[1] = [-1] = \{-1, 1\}$, $[2] = [-2] = \{-2, 2\}$ y, en general, para cualquier $n \in \mathbf{Z}^+$, $[n] = [-n] = \{-n, n\}$. Además, tenemos la *partición*

$$\mathbf{Z} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [n] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} [n] = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{-n, n\}\right) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+} \{-n, n\}\right).$$

Estos ejemplos nos llevan a la siguiente situación general.

TEOREMA 7.6 Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, y $x, y \in A$, entonces (a) $x \in [x]$, (b) $x \mathcal{R} y$ si y sólo si $[x] = [y]$; y (c) $[x] = [y]$ o $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Demostración:

a) Este resultado se sigue de la propiedad reflexiva de $\mathcal{R}$.

b) Si $x \mathcal{R} y$, sea $w \in [x]$. Entonces $w \mathcal{R} x$; y, como $\mathcal{R}$ es transitiva, $w \mathcal{R} y$. Por lo tanto, $w \in [y]$ y $[x] \subseteq [y]$. Como $\mathcal{R}$ es simétrica, $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$. Así, si $t \in [y]$, entonces $t \mathcal{R} y$ y, por la propiedad transitiva, $t \mathcal{R} x$. Por lo tanto, $t \in [x]$ y $[y] \subseteq [x]$. En consecuencia, $[x] = [y]$.

Recíprocamente, sea $[x] = [y]$. Como $x \in [x]$ por la parte (a), entonces $x \in [y]$ o $x \mathcal{R} y$.

c) Esta propiedad indica que dos clases de equivalencia sólo pueden relacionarse en una de dos formas: o son idénticas o son disjuntas.

Supongamos que $[x] \neq [y]$; mostraremos que esto implica que $[x] \cap [y] = \emptyset$. Si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, entonces existe $v \in A$ tal que $v \in [x]$ y $v \in [y]$. Entonces $v \mathcal{R} x$, $v \mathcal{R} y$ y, como $\mathcal{R}$ es simétrica, $x \mathcal{R} v$. Ahora bién, $(x \mathcal{R} v$ y $v \mathcal{R} y) \Rightarrow x \mathcal{R} y$, por la propiedad transitiva. Además, $x \mathcal{R} y \Rightarrow [x] = [y]$ por la parte (b). Esto contradice la hipótesis de que $[x] \neq [y]$, por lo que debemos rechazar la hipótesis de que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, de donde se sigue el resultado.

Observe que si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre A, entonces, por las partes (a) y (c) del teorema 7.6, las distintas clases de equivalencia determinadas por $\mathcal{R}$ nos proporcionan una partición de A.

Ejemplo 7.55

a) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$, entonces $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre A. En este caso, $[1] = \{1\}$, $[2] = \{2, 3\} = [3]$, $[4] = \{4, 5\} = [5]$ y $A = [1] \cup [2] \cup [4]$ con $[1] \cup [2] = \emptyset$, $[1] \cap [4] = \emptyset$ y $[2] \cap [4] = \emptyset$. Así, $\{[1], [2], [4]\}$ determina una partición de A.

b) Consideremos de nuevo la parte (d) del ejemplo 7.16. Tenemos que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x, y, z\}$, y $f\colon A \to B$ es la función sobre

$$f = \{(1,x), (2,z), (3,x), (4,y), (5,z), (6,y), (7,x)\}.$$

Ya hemos mostrado que la relación $\mathcal{R}$ definida sobre A como $a \mathcal{R} b$ si $f(a) = f(b)$ es una relación de equivalencia. En este caso,

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \{1,3,7\} = [1] \ \ (= [3] = [7]), \\ f^{-1}(y) &= \{4,6\} = [4] \ \ (= [6]), \qquad \text{y} \\ f^{-1}(z) &= \{2,5\} = [2] \ \ (= [5]). \end{aligned}$$

Con $A = [1] \cup [4] \cup [2] = f^{-1}(x) \cup f^{-1}(y) \cup f^{-1}(z)$, vemos que $\{f^{-1}(x), f^{-1}(y), f^{-1}(z)\}$ determina una partición de A.

De hecho, para cualesquiera conjuntos no vacíos A, B, si $f\colon A \to B$ es una función sobre, entonces $A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$ y $\{f^{-1}(b) \mid b \in B\}$ nos proporcionan una partición de A.

Ejemplo 7.56

En ANSI FORTRAN, una sentencia no ejecutable llamada EQUIVALENCE nos permite

Por ejemplo, dentro de un programa, la instrucción

```
EQUIVALENCE (A, C, P), (UP, DOWN)
```

informa al compilador que las variables A, C y P compartirán la misma posición de memoria, mientras que UP y DOWN compartirán otra. En este caso, el conjunto de todas las variables del programa se divide mediante la relación de equivalencia $\mathcal{R}$, donde $V_1 \mathcal{R} V_2$ si V_1 y V_2 son variables del programa que comparten la misma posición de memoria.

Ejemplo 7.57 En el lenguaje de programación Pascal, la colección de todas las instrucciones (válidas) puede dividirse en las siguientes 11 celdas.

1) Instrucciones de asignación
2) Instrucciones **case**
3) Instrucciones compuestas
4) Instrucciones vacías
5) Instrucciones **for**
6) Instrucciones **goto**
7) Instrucciones **if**
8) Instrucciones de llamada a procedimiento
9) Instrucciones **repeat-until**
10) Instrucciones **while**
11) Instrucciones **with**

(¿Cuál es una relación de equivalencia adecuada para esta partición?)

Por medio de esta partición, podemos considerar una de las tareas principales de un compilador; a saber, la capacidad para reconocer la celda de esta partición en la que puede encontrarse una instrucción dada. Con esto podemos prever la forma en que procederá el compilador cuando decida, por ejemplo, si una instrucción s cae en la celda (3). Cuando esto ocurra, el compilador debe determinar si la instrucción comienza con **begin** para entonces llamar al procedimiento que controla este tipo de instrucción. En este caso, el procedimiento (llamado por el compilador) debe procesar cada instrucción del programa hasta llegar a un **end** que no concuerde. Si nuestra instrucción se encuentra en la celda (9) de esta partición, entonces, en estas circunstancias, el compilador debe decidir que s comienza con **repeat** de modo que pueda llamar entonces al procedimiento correcto para controlar dicha instrucción. En este caso, el procedimiento (llamado) procesará cada instrucción del programa hasta llegar a un **until** no concordante. Al hacerlo, el compilador procesa la expresión que sigue a **until** y así genera el código necesario para decidir cuándo (el compilador) debe terminar la generación de código para la instrucción **repeat-until**.

Ejemplo 7.58 Una vez que hemos visto algunos ejemplos de la forma en que una relación de equivalencia induce una partición de un conjunto, podemos volver atrás. Si una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ induce la partición $A = \{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5, 7\} \cup \{6\}$, ¿qué es $\mathcal{R}$?

Consideremos el subconjunto $\{1, 2\}$ de la partición. Este subconjunto implica que $[1] = \{1, 2\} = [2]$, por lo que $(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1) \in \mathcal{R}$. (Los primeros dos pares ordenados son necesarios debido a la propiedad reflexiva de $\mathcal{R}$; los otros preservan la simetría.)

De manera similar, el subconjunto $\{4, 5, 7\}$ implica que mediante $\mathcal{R}$, $[4] = [5] = [7] = \{4, 5, 7\}$ y que, como relación de equivalencia, $\mathcal{R}$ debe contener a $\{4, 5, 7\} \times \{4, 5, 7\}$.

De hecho, $\mathcal{R} = (\{1, 2\} \times \{1, 2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) \cup (\{4, 5, 7\} \times \{4, 5, 7\}) \cup (\{6\} \times \{6\})$ y $|\mathcal{R}| = 2^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 = 15$.

Los resultados de los ejemplos 7.53, 7.54, 7.55 y 7.58 nos llevan a lo siguiente.

TEOREMA 7.7 Si A es un conjunto, entonces

a) cualquier relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre A induce una partición de A; y
b) cualquier partición de A da lugar a una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre A.

Demostración: La parte (a) se sigue de las partes (a) y (c) del teorema 7.6. Para la parte (b), dada una partición $\{A_i\}_{i \in I}$ de A, definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre A como $x \mathcal{R} y$, si x y y están en la misma celda de la partición. Dejaremos al lector los detalles de la verificación de que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Con base en este teorema y los ejemplos analizados, enunciamos el siguiente resultado, cuya demostración se esboza en el ejercicio 18 del final de esta sección.

TEOREMA 7.8 Para cualquier conjunto A, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de relaciones de equivalencia sobre A y el conjunto de particiones de A.

Nos interesa principalmente el uso de este resultado para conjuntos finitos.

Ejemplo 7.59

a) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ¿cuántas relaciones sobre A son relaciones de equivalencia?
Resolveremos este problema contando las particiones de A, observando que una partición de A es una distribución de los elementos (distintos) de A en recipientes idénticos, sin que quede ninguno vacío. De la sección 5.3 sabemos, por ejemplo, que existen $S(6, 2)$ particiones de A en dos recipientes idénticos no vacíos. Si usamos los números de Stirling del segundo tipo, como el número de recipientes varía de 1 a 6, tenemos $\sum_{i=1}^{6} S(6, i) = 203$ particiones diferentes de A. En consecuencia, existen 203 relaciones de equivalencia sobre A.

b) ¿Cuántas de las relaciones de equivalencia de la parte (a) satisfacen que $1, 2 \in [4]$?
Si identificamos 1, 2 y 4 como el "mismo" elemento en esta relación de equivalencia, contamos, como en la parte (a), para el conjunto $B = \{1, 3, 5, 6\}$ y tenemos que existen $\sum_{i=1}^{4} S(4, i) = 15$ relaciones de equivalencia sobre A para las que $[1] = [2] = [4]$.

Concluimos con la observación de que si A es un conjunto finito con $|A| = n$, entonces para cualquier $n \leq r \leq n^2$, existe una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre A tal que $|\mathcal{R}| = r$ si y sólo si existen $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}^+$ tales que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ y $\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = r$.

EJERCICIOS 7.4

1. Determine si cada una de las siguientes colecciones de conjuntos es una partición para el conjunto dado A. Si la colección no es una partición, indique por qué.
   a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$: $A_1 = \{4,5,6\}$, $A_2 = \{1,8\}$, $A_3 = \{2,3,7\}$.
   b) $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$: $A_1 = \{d,e\}$, $A_2 = \{a,c,d\}$, $A_3 = \{f,h\}$, $A_4 = \{b,g\}$.
   c) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$: $A_1 = \{1,3,4,7\}$, $A_2 = \{2,6\}$, $A_3 = \{5,8\}$.
2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. ¿De cuántas formas podemos dividir a A como $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, de modo que
   a) $1,2 \in A_1$, $3,4 \in A_2$, y $5,6,7 \in A_3$?
   b) $1,2 \in A_1$, $3,4 \in A_2$, $5,6 \in A_3$, y $|A_1| = 3$?
   c) $1,2 \in A_1$, $3,4 \in A_2$, y $5,6 \in A_3$?
3. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\mathscr{R}$ es la relación de equivalencia sobre A que induce la partición $A = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\}$, ¿qué es $\mathscr{R}$?
4. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathscr{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ es una relación de equivalencia sobre A.
   a) ¿Qué son [1],[2] y [3] en esta relación de equivalencia?
   b) ¿Qué partición de A induce $\mathscr{R}$?
5. Si $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$ y $A_3 = \{5\}$, defina la relación $\mathscr{R}$ sobre A como $x \mathscr{R} y$ si x y y están en el mismo subconjunto A_i, para $1 \le i \le 3$. ¿Es $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia?
6. Para $A = \mathbf{R}^2$, defina $\mathscr{R}$ sobre A como $(x_1, y_1) \mathscr{R} (x_2, y_2)$ si $x_1 = x_2$.
   a) Verifique que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre A.
   b) Describa geométricamente las clases de equivalencia y la partición de A inducida por $\mathscr{R}$.
7. Tome $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y defina $\mathscr{R}$ sobre A como $(x_1, y_1) \mathscr{R} (x_2, y_2)$ si $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.
   a) Verifique que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre A.
   b) Determine las clases de equivalencia $[(1, 3)]$, $[(2, 4)]$ y $[(1, 1)]$.
   c) Determine la partición de A inducida por $\mathscr{R}$.
8. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, defina $\mathscr{R}$ sobre A como $(x, y) \in \mathscr{R}$ si $x - y$ es un múltiplo de 3.
   a) Muestre que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre A.
   b) Determine las clases de equivalencia y partición de A inducida por $\mathscr{R}$.
9. Para $A = \{(-4, -20), (-3, -9), (-2, -4), (-1, -11), (-1, -3), (1, 2), (1, 5), (2, 10), (2, 14), (3, 6), (4, 8), (4, 12)\}$, defina la relación $\mathscr{R}$ sobre A como $(a, b) \mathscr{R} (c, d)$ si $ad = bc$.
   a) Verifique que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre A.
   b) Encuentre las clases de equivalencia $[(2, 14)]$, $[(-3, 9)]$ y $[(4, 8)]$.
   c) ¿Cuántas celdas tiene la partición de A inducida por $\mathscr{R}$?
10. Defina la relación $\mathscr{R}$ sobre $\mathbf{Z}^+$ como $x \mathscr{R} y$ si $x/y = 2^n$ para algún $n \in \mathbf{Z}$.
    a) Verifique que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{Z}^+$.
    b) ¿Cuántas clases de equivalencia distintas encontramos entre [1], [2], [3] y [4]?
    c) ¿Cuántas clases de equivalencia distintas encontramos entre [6], [7], [21], [24], [28], [35], [42] y [48]?
11. Sea A un conjunto no vacío y B un conjunto fijo tal que $B \subseteq A$. Defina la relación $\mathscr{R}$ sobre $\mathscr{P}(A)$ como $X \mathscr{R} Y$, para $X, Y \subseteq A$ si $B \cap X = B \cap Y$.
    a) Verifique que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathscr{P}(A)$.
    b) Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$, encuentre la partición de $\mathscr{P}(A)$ inducida por $\mathscr{R}$.
    c) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, encuentre $[X]$ si $X = \{1, 3, 5\}$.
    d) Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, ¿cuántas clases de equivalencia hay en la partición inducida por $\mathscr{R}$?
12. Definimos la relación $\mathscr{R} \in \mathbf{Z}^+$ como $a \mathscr{R} b$ si $\mathrm{mcm}(a, 16) = \mathrm{mcm}(b, 16)$.
    a) Verifique que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{Z}^+$.

b) Determine cada una de las siguientes clases de equivalencia: [1], [2], [3], [10], [16], [25], [32], [33], [48] y [64].

13. ¿Cuántas de las relaciones de equivalencia sobre $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ tienen (a) exactamente dos clases de equivalencia de tamaño 3? (b) exactamente una clase de equivalencia de tamaño 3? (c) una clase de equivalencia de tamaño 4? (d) al menos una clase de equivalencia con tres o más elementos?

14. Sea $A = \{v, w, x, y, z\}$. Determine el número de relaciones sobre A que son (a) reflexivas y simétricas; (b) relaciones de equivalencia; (c) reflexivas y simétricas pero no transitivas; (d) relaciones de equivalencia que determinan exactamente dos clases de equivalencia; (e) relaciones de equivalencia tales que $w \in [x]$; (f) relaciones de equivalencia en las que $v, w \in [x]$; (g) relaciones de equivalencia en las que $w \in [x]$ e $y \in [z]$; y (h) relaciones de equivalencia en las que $w \in [x]$, $y \in [z]$ y $[x] \neq [z]$.

15. Si $|A| = 30$ y la relación de equivalencia $\mathscr{R}$ sobre A divide a A en las clases de equivalencia (disjuntas) A_1, A_2, y A_3, de modo que $|A_1| = |A_2| = |A_3|$, ¿cuánto vale $|\mathscr{R}|$?

16. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Para cada uno de los siguientes valores de r, determine una relación de equivalencia $\mathscr{R}$ sobre A tal que $|\mathscr{R}| = r$, o explique por qué no existe dicha relación. (a) $r = 6$; (b) $r = 7$; (c) $r = 8$; (d) $r = 9$; (e) $r = 11$; (f) $r = 22$; (g) $r = 23$; (h) $r = 30$; (i) $r = 31$.

17. Proporcione los detalles de la demostración de la parte (b) del teorema 7.7.

18. Para cualquier conjunto $A \neq \emptyset$, sea $P(A)$ el conjunto de todas las particiones de A, y $E(A)$ el conjunto de todas las relaciones de equivalencia sobre A. Definimos la función $f\colon E(A) \to P(A)$ como sigue: Si $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre A, entonces $f(\mathscr{R})$ es la partición de A inducida por $\mathscr{R}$. Demuestre que f es uno a uno y sobre, como establece el teorema 7.8.

7.5 Máquinas de estados finitos: El proceso de minimización

En la sección 6.3 vimos dos máquinas de estados finitos que realizaban la misma tarea pero con diferente número de estados internos. (Véanse las Figs. 6.9 y 6.10.) La máquina con el mayor número de estados finitos contiene estados *redundantes*, esto es, estados que pueden eliminarse debido a que otros estados realizarán sus funciones. Puesto que la minimización del número de estados en una máquina reduce su complejidad y su costo, buscamos un proceso para transformar una máquina dada en otra que no tenga estados internos redundantes. Este proceso se conoce como *proceso de minimización*, y su desarrollo se basa en los conceptos de relación de equivalencia y partición.

Si partimos de una máquina de estados finitos $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$, definimos la relación E_1 sobre S como $s_1 E_1 s_2$ si $\omega(s_1, x) = \omega(s_2, x)$ para todo $x \in \mathscr{I}$. Esta relación E_1 es una relación de equivalencia sobre S, y divide a S en subconjuntos tales que dos estados están en el mismo subconjunto si producen la misma salida para cada $x \in \mathscr{I}$. En este caso, los estados s_1 y s_2 son *1-equivalentes*.

Para cualquier $k \in \mathbf{Z}^+$, decimos que los estados s_1, s_2 son *k-equivalentes* si $\omega(s_1, x) = \omega(s_2, x)$ para todo $x \in \mathscr{I}^k$. En este caso, ω es la extensión de la función de salida dada a $S \times \mathscr{I}^*$. La relación de k-equivalencia también es una relación de equivalencia sobre S; divide a S en subconjuntos de estados k-equivalentes. Escribimos $s_1 E_k s_2$ para denotar que s_1 y s_2 son k-equivalentes.

Por último, si $s_1, s_2 \in S$ y s_1, s_2 son k-equivalentes para todo $k \geq 1$, decimos que s_1 y s_2 son *equivalentes* y escribimos $s_1 E s_2$. Cuando esto ocurre, vemos que si