Parte I: Teoría elemental de conjuntos

Capítulo 1

Conjuntos y subconjuntos

CONJUNTOS

El concepto de *conjunto* es fundamental en todas las ramas de la matemática. Intuitivamente, un conjunto es una lista, colección o clase de objetos bien definidos, objetos que, como se verá en los ejemplos, pueden ser cualesquiera: números, personas, letras, ríos, etc. Estos objetos se llaman *elementos* o *miembros* del conjunto.

Si bien los conjuntos se estudian como entidades abstractas, enumeremos diez ejemplos particulares de conjuntos.

Ejemplo 1-1: Los números 1, 3, 7 y 10.
Ejemplo 1-2: Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x - 2 = 0$.
Ejemplo 1-3: Las vocales del alfabeto: a, e, i, o, u.
Ejemplo 1-4: Las personas que habitan la Tierra.
Ejemplo 1-5: Los estudiantes Tomás, Ricardo y Enrique.
Ejemplo 1-6: Los estudiantes ausentes de la escuela.
Ejemplo 1-7: Los países Inglaterra, Francia y Dinamarca.
Ejemplo 1-8: Las ciudades capitales de Europa.
Ejemplo 1-9: Los números 2, 4, 6, 8, ...
Ejemplo 1-10: Los ríos de los Estados Unidos.

Nótese que los conjuntos de los ejemplos impares vienen *definidos*, o sea presentados, enumerando de hecho sus elementos, y que los conjuntos de los ejemplos pares se definen enunciando propiedades, o sea reglas, que deciden si un objeto particular es o no elemento del conjunto.

NOTACION

Es usual denotar los conjuntos por letras mayúsculas

$$A, B, X, Y, \ldots$$

Los elementos de los conjuntos se representan por letras minúsculas

$$a, b, x, y, \ldots$$

Al definir un conjunto por la efectiva enumeración de sus elementos, por ejemplo, el A, que consiste en los números 1, 3, 7 y 10, se escribe

$$A = \{1, 3, 7, 10\}$$

separando los elementos por comas y encerrándolos entre llaves $\{\ \}$. Esta es la llamada *forma tabular* de un conjunto. Pero si se define un conjunto enunciando propiedades que deben tener sus elementos como, por ejemplo, el B, conjunto de todos los números pares, entonces se emplea una letra, por lo general x, para representar un elemento cualquiera y se escribe

$$B = \{x \mid x \text{ es par}\}$$

lo que se lee «B es el conjunto de los números x tales que x es par». Se dice que ésta es la forma de definición por comprensión o *constructiva* de un conjunto. Téngase en cuenta que la barra vertical «|» se lee «tales que».

Para aclarar el empleo de la anterior notación, se escriben de nuevo los conjuntos de los Ejemplos 1-1 al 1-10, designando los conjuntos por $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, respectivamente.

Ejemplo 2-1: $A_1 = \{1, 3, 7, 10\}$.
Ejemplo 2-2: $A_2 = \{x \mid x^2 - 3x - 2 = 0\}$.
Ejemplo 2-3: $A_3 = \{a, e, i, o, u\}$.
Ejemplo 2-4: $A_4 = \{x \mid x$ es una persona que habita en la Tierra$\}$.
Ejemplo 2-5: $A_5 = \{$Tomás, Ricardo Enrique$\}$.
Ejemplo 2-6: $A_6 = \{x \mid x$ es estudiante y x está ausente de la escuela$\}$.
Ejemplo 2-7: $A_7 = \{$Inglaterra, Francia, Dinamarca$\}$.
Ejemplo 2-8: $A_8 = \{x \mid x$ es una ciudad capital y x está en Europa$\}$.
Ejemplo 2-9: $A_9 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
Ejemplo 2-10: $A_{10} = \{x \mid x$ es un río y x está en los Estados Unidos$\}$.

Si un objeto x es elemento de un conjunto A, es decir, si A contiene a x como uno de sus elementos, se escribe

$$x \in A$$

que se puede leer también «x pertenece a A» o «x está en A». Si por el contrario, un objeto x no es elemento de un conjunto A, es decir, si A no contiene a x entre sus elementos, se escribe

$$x \notin A$$

Es costumbre en los escritos matemáticos poner una línea vertical «|» u oblicua «/» tachando un símbolo para indicar lo opuesto o la negación del significado del símbolo.

Ejemplo 3-1: Si $A = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $a \in A$, $b \notin A$, $e \in A$, $f \notin A$.
Ejemplo 3-2: Si $B = \{x \mid x$ es par$\}$, entonces $3 \notin B$, $6 \in B$, $11 \notin B$, $14 \in B$.

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Los conjuntos pueden ser *finitos* o *infinitos*. Intuitivamente, un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar. Si no, el conjunto es infinito. Posteriormente se dará una definición precisa de conjuntos infinito y finito.

Ejemplo 4-1: Si M es el conjunto de los días de la semana, entonces M es finito.
Ejemplo 4-2: Si $N = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, N es infinito.
Ejemplo 4-3: Si $P = \{x \mid x$ es un río de la Tierra$\}$, P es también finito aunque sea difícil contar los ríos del mundo.

IGUALDAD DE CONJUNTOS

El conjunto A es *igual* al conjunto B si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento que pertenece a A pertenece también a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A. Se denota la igualdad de los conjuntos A y B por

$$A = B$$

Ejemplo 5-1: Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 1, 4, 2\}$. Entonces $A = B$, es decir, $\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\}$, pues cada uno de los elementos 1, 2, 3 y 4 de A pertenece a B y cada uno de los elementos 3, 1, 4 y 2 de B pertenece a A. Obsérvese, por tanto, que un conjunto no cambia al reordenar sus elementos.

Ejemplo 5-2: Sean $C = \{5, 6, 5, 7\}$ y $D = \{7, 5, 7, 6\}$. Entonces $C = D$, es decir, $\{5, 6, 5, 7\} = \{7, 5, 7, 6\}$, ya que cada elemento de C pertenece a D y que cada elemento de D pertenece a C. Nótese que un conjunto no cambia si se repiten sus elementos. Así que el conjunto $\{5, 6, 7\}$ es igual al C y al D.

Ejemplo 5-3: Sean $E = \{x \mid x^2 - 3x = -2\}$, $F = \{2, 1\}$ y $G = \{1, 2, 2, 1\}$. Resulta $E = F = G$.

CONJUNTO VACIO

Conviene introducir el concepto de *conjunto vacío*, es decir, de un conjunto que carece de elementos. Este conjunto se suele llamar *conjunto nulo*. Aquí diremos de un conjunto semejante que es *vacío* y se le denotará por el símbolo $\emptyset$.

Ejemplo 6-1: Si A es el conjunto de personas vivientes mayores de 200 años, A es vacío según las estadísticas conocidas.

Ejemplo 6-2: Sea $B = \{x \mid x^2 = 4, x \text{ es impar}\}$. B es entonces un conjunto vacío.

SUBCONJUNTOS

Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un *subconjunto* de B. Más claro: A es un subconjunto de B si $x \in A$ implica $x \in B$. Se denota esta relación escribiendo

$$A \subset B$$

que también se puede leer «A está contenido en B».

Ejemplo 7-1: El conjunto $C = \{1, 3, 5\}$ es un subconjunto del $D = \{5, 4, 3, 2, 1\}$, ya que todo número 1, 3 y 5 de C pertenece también a D.

Ejemplo 7-2: El conjunto $E = \{2, 4, 6\}$ es un subconjunto del $F = \{6, 2, 4\}$, pues cada número 2, 4 y 6 que pertenece a E pertenece también a F. Obsérvese en particular que $E = F$. De la misma manera se puede mostrar que todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Ejemplo 7-3: Sean $G = \{x \mid x \text{ es par}\}$, es decir, $G = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ y $F = \{x \mid x \text{ es potencia entera positiva de } 2\}$, es decir, $F = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$. Entonces $F \subset G$, o sea que F está contenido en G.

Con la anterior definición de subconjunto se puede dar de otra manera la definición de la igualdad de dos conjuntos:

Definición 1-1: Dos conjuntos A y B son iguales, $A = B$, si, y solo si, $A \subset B$ y $B \subset A$.

Si A es un subconjunto de B, se puede escribir también

$$B \supset A$$

que se lee «B es un superconjunto de A» o «B contiene a A». Y se escribe, además,

$$A \not\subset B \quad \text{o} \quad B \not\supset A$$

si A no es subconjunto de B.

Para concluir, se tiene:

Observación 1-1: El conjunto vacío $\emptyset$ se considera subconjunto de todo conjunto.

Observación 1-2: Si A no es subconjunto de B, es decir, si $A \not\subset B$, entonces hay por lo menos un elemento de A que no es elemento de B.

SUBCONJUNTO PROPIO

Puesto que todo conjunto A es un subconjunto de sí mismo, se dirá que B es un *subconjunto propio* de A si, en primer lugar, B es un subconjunto de A y, en segundo lugar, B no es igual a A. Más brevemente, B es un subconjunto propio de A si

$$B \subset A \quad \text{y} \quad B \neq A$$

En algunos libros «B es un subconjunto de A» se denota por

$$B \subseteq A$$

y «B es un subconjunto propio de A» se denota por

$$B \subset A$$

Aquí se seguirá la notación ya vista que no distingue entre subconjunto y subconjunto propio.

COMPARABILIDAD

Dos conjuntos A y B se dicen *comparables* si

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \subset A$$

esto es, si uno de los conjuntos es subconjunto del otro. En cambio, dos conjuntos A y B se dicen *no comparables* si

$$A \not\subset B \quad \text{y} \quad B \not\subset A$$

Nótese que si A no es comparable con B, entonces hay en A un elemento que no está en B y hay también en B un elemento que no está en A.

Ejemplo 8-1: Sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Entonces A es comparable con B, pues A es un subconjunto de B.

Ejemplo 8-2: Si $C = \{a, b\}$ y $D = \{b, c, d\}$, C y D no son comparables, pues $a \varepsilon C$ y $a \not\varepsilon D$ y $c \varepsilon D$ y $c \not\varepsilon C$.

TEOREMA Y DEMOSTRACION

En matemáticas puede demostrarse la verdad de muchas afirmaciones mediante suposiciones y definiciones previas. De hecho, la esencia de las matemáticas consiste en teoremas y sus demostraciones. Demostremos nuestro primer

Teorema 1-1: Si A es un subconjunto de B y B es un subconjunto de C, entonces A es un subconjunto de C, esto es,

$$A \subset B \text{ y } B \subset C \text{ implican } A \subset C$$

Demostración, (Téngase en cuenta que debemos demostrar que todo elemento de A es también un elemento de C.) Sea x un elemento de A, esto es, $x \varepsilon A$. Como A es un subconjunto de B, x pertenece también a B, es decir, $x \varepsilon B$. Pero, por hipótesis, $B \subset C$; por tanto, todo elemento de B, en el cual está x, es un elemento de C. Hemos demostrado que $x \varepsilon A$ implica $x \varepsilon C$. En consecuencia, por definición, $A \subset C$.

CONJUNTOS DE CONJUNTOS

Ocurre a veces que los elementos de un conjunto son a su vez conjuntos; por ejemplo, el conjunto de todos los subconjuntos de A. Para evitar decir «conjuntos de conjuntos», se suele decir «familia de conjuntos» o «clase de conjuntos». En tales casos y para evitar confusiones, se emplean letras inglesas

$$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$$

para designar familias o clases de conjuntos, ya que las mayúsculas denotan sus elementos.

Ejemplo 9-1: En geometría es corriente hablar de «familias de rectas» o «familias de curvas», pues rectas y curvas ya son ellas mismas conjuntos de puntos.

Ejemplo 9-2: El conjunto $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ es una familia de conjuntos. Sus elementos son los conjuntos $\{2, 3\}$, $\{2\}$ y $\{5, 6\}$.

En teoría es posible que un conjunto tenga entre sus elementos algunos que sean a su vez conjuntos y otros que no lo sean, pero en las aplicaciones de la teoría de conjuntos este caso se presenta rara vez.

Ejemplo 9-3: Sea $A = \{2, \{1, 3\}, 4, \{2, 5\}\}$. A no es, pues, una familia de conjuntos; algunos elementos de A son conjuntos y otros no.

CONJUNTO UNIVERSAL

En toda aplicación de la teoría de conjuntos todos los conjuntos que se consideran serán muy probablemente subconjuntos de un mismo conjunto dado. Este conjunto se llamará *conjunto universal* o *universo del discurso* y se denotará por U.

Ejemplo 10-1: En geometría plana el conjunto universal es el de todos los puntos del plano.

Ejemplo 10-2: En los estudios sobre población humana el conjunto universal es el de todas las gentes del mundo.

CONJUNTO POTENCIA

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto S se llama conjunto potencia de S. Se le designa por

$$2^S$$

Ejemplo 11-1: Si $M = \{a, b\}$, entonces

$$2^M = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \varnothing\}$$

Ejemplo 11-2: Si $T = \{4, 7, 8\}$, entonces

$$2^T = \{T, \{4, 7\}, \{4, 8\}, \{7, 8\}, \{4\}, \{7\}, \{8\}, \varnothing\}$$

Si un conjunto S es finito, digamos que S tenga n elementos, entonces el conjunto potencia de S tendrá 2^n elementos, como se puede demostrar. Esta es una razón para llamar conjunto de potencia de S la clase de los subconjuntos de S y para denotarla por 2^S.

CONJUNTOS DISJUNTOS

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir, si ningún elemento de A está en B y si ningún elemento de B está en A, se dice que A y B son disjuntos.

Ejemplo 12-1: Sean $A = \{1, 3, 7, 8\}$ y $B = \{2, 4, 7, 9\}$; A y B no son disjuntos entonces, pues 7 está en ambos conjuntos, o sea que $7 \in A$ y $7 \in B$.

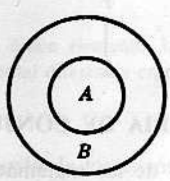
Ejemplo 12-2: Sean A el conjunto de los números positivos y B el de los números negativos. Entonces A y B son disjuntos, pues ningún número es positivo y negativo.

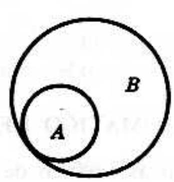
Ejemplo 12-3: Si $E = \{x, y, z\}$ y $F = \{r, s, t\}$, E y F son disjuntos.

DIAGRAMAS DE VENN-EULER

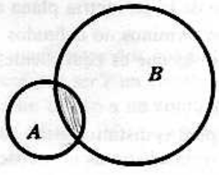
Se logra ilustrar de manera sencilla e instructiva las relaciones entre conjuntos mediante los llamados diagramas de Venn-Euler, o de Venn, simplemente, que representan un conjunto con un área plana, por lo general delimitada por un círculo.

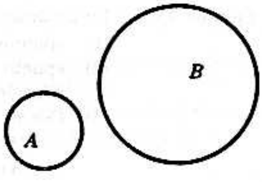
Ejemplo 13-1: Supóngase $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces A y B se describen con uno de los diagramas:



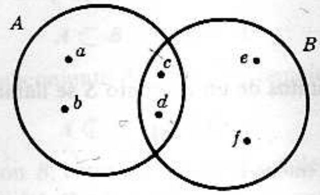


Ejemplo 13-2: Si A y B no son comparables se les puede representar por el diagrama de la derecha si son disjuntos o por el de la izquierda si no lo son.





Ejemplo 13-3: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$. Se ilustran estos conjuntos con un diagrama de Venn de la forma

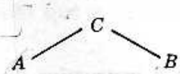


DIAGRAMAS LINEALES

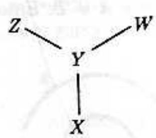
Otra manera útil e instructiva para ilustrar las relaciones entre conjuntos es el empleo de los llamados diagramas lineales. Si $A \subset B$, se escribe entonces B más arriba que A y se les conecta por un segmento

Si $A \subset B$ y $B \subset C$, se pone

Ejemplo 14-1: Sean $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ y $C = \{a, b\}$. El diagrama lineal de A, B y C es entonces



Ejemplo 14-2: Sean $X = \{x\}$, $Y = \{x, y\}$, $Z = \{x, y, z\}$ y $W = \{x, y, w\}$. Aquí el diagrama lineal de X, Y, Z y W es



DESARROLLO AXIOMATICO DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

En un desarrollo axiomático de una rama de las matemáticas, se comienza por:

(1) Términos no definidos.
(2) Relaciones no definidas.
(3) Axiomas que relacionan los términos no definidos y las relaciones no definidas.

Entonces se desarrollan teoremas basados en los axiomas y definiciones.

Ejemplo 15-1: En un desarrollo axiomático de la geometría plana euclidiana:

(1) «puntos» y «rectas» son términos no definidos.
(2) «punto en una recta» o, lo que es equivalente, «recta que contiene un punto», es una relación no definida.
(3) Dos de los axiomas son:
Axioma 1: Dos puntos distintos están sobre una y misma recta.
Axioma 2: Dos rectas distintas no pueden tener más de un punto común.

En un desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos:

(1) «Elemento» y «conjunto» son términos no definidos.
(2) «Pertenencia de un elemento a un conjunto» es la relación no definida.
(3) Dos de los axiomas son:

Axioma de extensión: Dos conjuntos A y B son iguales si, y solamente si, todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A.

Axioma de especificación: Sea $P(x)$ una afirmación y sea A un conjunto. Existe entonces un conjunto

$$B = \{a \mid a \in A,\ P(a) \text{ es cierta}\}$$

Aquí, $P(x)$ es un enunciado en una variable, para la cual $P(a)$ es verdadero o falso con $a \in A$. Por ejemplo, $P(x)$ podría ser el enunciado «$x^2 = 4$» o «x es un miembro de las Naciones Unidas»

Hay otros axiomas que no se enuncian aquí porque los axiomas tocan con conceptos que se estudiarán luego. Y, por otra parte, como aquí se trata la teoría de conjuntos sobre todo intuitivamente, en especial en la Parte I, nos abstendremos de hacer más consideraciones sobre el desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos.

Problemas resueltos

NOTACION

1. Escribir las afirmaciones siguientes en notación conjuntista:

(1) x no pertenece a A.
(2) R es superconjunto de S.
(3) d es elemento de E.
(4) F no es subconjunto de G.
(5) H no incluye a D.

Solución:

(1) $x \notin A$, (2) $R \supset S$, (3) $d \in E$, (4) $F \not\subset G$, (5) $H \not\supset D$.

2. Si $A = \{x \mid 2x = 6\}$ y $b = 3$, ¿es $b = A$?

Solución:

A es un conjunto que consta del único elemento 3, es decir, $A = \{3\}$. El número 3 es elemento de A, pero no es igual a A. Hay una fundamental diferencia entre un elemento x y el conjunto $\{x\}$.

3. Sea $M = \{r, s, t\}$. Es decir, M consta de los elementos r, s y t. Dígase cuáles de las afirmaciones son correctas o incorrectas. Si alguna es incorrecta, decir por qué.

$$(a)\ r \in M \quad (b)\ r \subset M \quad (c)\ \{r\} \in M \quad (d)\ \{r\} \subset M$$

Solución:

(*a*) Correcta.
(*b*) Incorrecta. El símbolo $\subset$ debe estar entre dos conjuntos, pues indica que un conjunto es subconjunto del otro. Así que $r \subset M$ es incorrecta por ser r un elemento de M, no un subconjunto.
(*c*) Incorrecta. El símbolo $\in$ vincula un objeto a un conjunto, pues indica que el objeto es elemento del conjunto. Así que $\{r\} \in M$ es incorrecta, ya que $\{r\}$ es un subconjunto de M, no un elemento de M.
(*d*) Correcta.

4. Enunciar con palabras y luego escribir en forma tabular:

(1) $A = \{x \mid x^2 = 4\}$.
(2) $B = \{x \mid x - 2 = 5\}$.
(3) $C = \{x \mid x$ es positivo, x es negativo$\}$.
(4) $D = \{x \mid x$ es una letra de la palabra «correcto»$\}$.

Solución:

(1) Se lee «A es el conjunto de los x tales que x al cuadrado es igual a cuatro». Los únicos números que elevados al cuadrado dan cuatro son 2 y -2; así que $A = \{2, -2\}$.

(2) Se lee «B es el conjunto de los x tales que x menos 2 es igual a 5». La única solución es 7, de modo que $B = \{7\}$.

(3) Se lee «C es el conjunto de los x tales que x es positivo y x es negativo». No hay ningún número que sea positivo y negativo, así que C es vacío, es decir, $C = \varnothing$.

(4) Se lee «D es el conjunto de los x tales que x es una letra de la palabra *correcto*». Las letras indicadas son c, o, r, e y t; así, pues, $D = \{$c, o, r, e, t$\}$.

5. Escribir estos conjuntos en una forma constructiva:

(1) El A que consiste de las letras a, b, c, d y e.
(2) El $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
(3) El conjunto C de todos los países de las Naciones Unidas.
(4) El conjunto $D = \{3\}$.
(5) Sea E los presidentes Truman, Eisenhower y Kennedy.

Solución:

Nótese en primer lugar que la descripción de un conjunto, o sea su forma constructiva, no es necesariamente única. Lo único que se requiere es que toda descripción defina el mismo conjunto. Se dan aquí algunas de las muchas respuestas posibles a este problema.

(1) $A = \{x \mid x$ está antes de f en el alfabeto$\}$
$= \{x \mid x$ es una de las primeras cinco letras del alfabeto$\}$.
(2) $B = \{x \mid x$ es par y positivo$\}$.
(3) $C = \{x \mid x$ es un país, x está en las Naciones Unidas$\}$.
(4) $D = \{x \mid x - 2 = 1\} = \{x \mid 2x = 6\}$.
(5) $E = \{x \mid x$ fue presidente después de Franklin D. Roosevelt$\}$.

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

6. ¿Cuáles conjuntos son finitos?

(1) Los meses del año.
(2) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$.
(3) Las gentes que viven en la tierra.
(4) $\{x \mid x$ es par$\}$.
(5) $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Solución:

Los tres primeros conjuntos son finitos. Aunque pueda ser físicamente imposible contar el número de personas que hay en la Tierra, el conjunto es ciertamente finito. Los dos últimos conjuntos son infinitos. Si se tratara de contar los números pares jamás se llegaría al fin.

IGUALDAD DE CONJUNTOS

7. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales: $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, r\}$, $\{s, r, s, t\}$?

Solución:

Son todos iguales entre sí. Obsérvese que el orden o la repetición no cambia un conjunto.

8. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?

(1) $\{x \mid x$ es una letra en la palabra «tocata»$\}$.
(2) Las letras de la palabra «tacto».
(3) $\{x \mid x$ es una letra de la palabra «cota»$\}$.
(4) Las letras a, c, o, t.

Solución:

Escribiendo los conjuntos en forma tabular es fácil averiguar si son o no iguales. Una vez escritos los cuatro conjuntos en forma tabular se ve que todos son iguales al conjunto $\{a, c, o, t\}$.

CONJUNTO VACIO

9. ¿Cuál de estas palabras es distinta de las otras y por qué?: (1) vacío, (2) cero, (3) nulo.

Solución:

La primera y la tercera se refieren al conjunto sin elementos; la palabra cero se refiere a un número particular y es, por tanto, la palabra diferente.

10. Entre los conjuntos que siguen, ¿cuáles son diferentes?: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$.

Solución:

Cada uno es diferente de los otros. El conjunto $\{0\}$ contiene un elemento, el número cero. El conjunto $\varnothing$ no tiene elementos, es el conjunto vacío. El conjunto $\{\varnothing\}$ tiene también un elemento que es el conjunto vacío: es un conjunto de conjuntos.

11. ¿Cuáles de estos conjuntos son vacíos?

(1) $A = \{x \mid x$ es una letra anterior a a en el alfabeto$\}$.
(2) $B = \{x \mid x^2 = 9 \text{ y } 2x = 4\}$.
(3) $C = \{x \mid x \neq x\}$.
(4) $D = \{x \mid x + 8 = 8\}$.

Solución:

(1) Como a es la primera letra del alfabeto, el conjunto A carece de elementos; por tanto, $A = \varnothing$.
(2) No hay número que satisfaga a ambas ecuaciones $x^2 = 9$ y $2x = 4$; así que B es también vacío.
(3) Se da por sentado que todo objeto es él mismo, de modo que C es vacío. Tanto es así que algunos libros definen de esta manera el conjunto vacío, es decir,

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

(4) El número cero satisface a la ecuación $x + 8 = 8$, así que D consta del elemento cero. Por tanto, D no es vacío.

SUBCONJUNTOS

12. Dado $A = \{x, y, z\}$, ¿cuántos subconjuntos hay en A y cuáles son?

Solución:

Haciendo la lista de todos los subconjuntos posibles de A resultan ser: $\{x, y, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$, $\{x, y\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$ y el conjunto vacío $\varnothing$. Hay ocho subconjuntos en A.

13. Definir los siguientes conjuntos de figuras del plano euclidiano:

$Q = \{x \mid x$ es un cuadrilátero$\}$. $\quad H = \{x \mid x$ es un rombo$\}$.
$R = \{x \mid x$ es un rectángulo$\}$. $\quad S = \{x \mid x$ es un cuadrado$\}$.

Decir qué conjuntos son subconjuntos propios de los otros.

Solución:

Como un cuadrado tiene 4 ángulos rectos, es un rectángulo; y como tiene 4 lados iguales, es un rombo; y puesto que tiene 4 lados, es un cuadrilátero. Según eso $S \subset Q$, $S \subset R$, $S \subset H$, es decir, S es un subconjunto de los otros tres. Y, además, como hay rectángulos, rombos y cuadriláteros que no son cuadrados, resulta ser S un subconjunto propio de los otros tres. De manera análoga se ve que R es un subconjunto propio de Q, y que H es un subconjunto propio de Q. No hay otras relaciones entre los conjuntos.

14. ¿Tiene todo conjunto un subconjunto propio?

Solución:

El conjunto vacío $\emptyset$ no tiene subconjunto propio. Cualquier otro conjunto tiene al $\emptyset$ como subconjunto propio. En algunos libros no se llama subconjunto propio al conjunto vacío; y entonces los conjuntos que tienen un solo elemento no tendrían un subconjunto propio.

15. Demostrar: Si A es un subconjunto del conjunto vacío $\emptyset$, entonces $A = \emptyset$.

Solución:

El conjunto vacío $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto; en particular, $\emptyset \subset A$. Por hipótesis, $A \subset \emptyset$. De modo que, por la Definición 1-1, $A = \emptyset$.

16. ¿Cómo se demuestra que un conjunto A no es un subconjunto de otro conjunto B? Demostrar que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ no es un subconjunto de $B = \{x \mid x \text{ es par}\}$.

Solución:

Hay que demostrar que hay al menos un elemento de A que no está en B. Como $3 \in A$ y $3 \notin B$, se ve que A no es un subconjunto de B, o sea que $A \not\subset B$. Nótese que no es necesario saber si hay o no otros elementos de A que no estén en B.

17. Sean $V = \{d\}$, $W = \{c, d\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ y $Z = \{a, b, d\}$. Establecer la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(1) $Y \subset X$ (3) $W \neq Z$ (5) $V \not\subset Y$ (7) $V \subset X$ (9) $X = W$
(2) $W \not\supset V$ (4) $Z \supset V$ (6) $Z \not\supset X$ (8) $Y \not\subset Z$ (10) $W \subset Y$

Solución:

(1) Como todo elemento de Y es elemento de X, resulta que $Y \subset X$ es verdadera.
(2) El único elemento de V es d, y d también está en W; así que W es un superconjunto de V y, por tanto, $W \not\supset V$ es falsa.
(3) Como $a \in Z$ y $a \notin W$, $W \neq Z$ es verdadera.
(4) Z es un superconjunto de V puesto que el único elemento de V es elemento de Z; por tanto, $Z \supset V$ es verdadera.
(5) Como $d \in V$ y $d \notin Y$, $V \not\subset Y$ es verdadera.
(6) Como $c \in X$ y $c \notin Z$, entonces Z no es un superconjunto de X, es decir, $Z \not\supset X$ es verdadera.
(7) V no es un subconjunto de X, ya que $d \in V$ y $d \notin X$; por tanto, $V \subset X$ es falsa.
(8) Todo elemento de Y lo es de Z; luego $Y \not\subset Z$ es falsa.
(9) Como $a \in X$ y $a \notin W$, $X = W$ es falsa.
(10) Como $c \in W$ y $c \notin Y$, W no es un subconjunto de Y y, por tanto, $W \supset Y$ es falsa.

18. Sean $A = \{r, s, t, u, v, w\}$, $B = \{u, v, w, x, y, z\}$, $C = \{s, u, y, z\}$, $D = \{u, v\}$, $E = \{s, u\}$ y $F = \{s\}$. Sea X un conjunto desconocido. Determinar cuáles de los conjuntos A, B, C, D, E o F pueden ser iguales a X si se dan las informaciones siguientes:

(1) $X \subset A$ y $X \subset B$ (3) $X \not\subset A$ y $X \not\subset C$
(2) $X \not\subset B$ y $X \subset C$ (4) $X \subset B$ y $X \not\subset C$

Solución:

(1) El único conjunto que es subconjunto de A y de B es D. C, E y F no son subconjuntos de B porque $s \in C$, E, F y $s \notin B$.
(2) El conjunto X puede ser igual a C, E o F, pues éstos son subconjuntos de C y, como ya se vio, no son subconjuntos de B.
(3) Solo B no es subconjunto de A o de C. D y A son subconjuntos de A; y C, E y F son subconjuntos de C. Así que $X = B$.
(4) Tanto B como D son subconjuntos de B y no lo son de C. Todos los otros conjuntos dejan de cumplir al menos una de las condiciones. Por tanto, $X = B$ o $X = D$.

19. Sea A un subconjunto de B y sea B un subconjunto de C, es decir, $A \subset B$ y $B \subset C$. Suponiendo $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, $c \varepsilon C$ y, además, $d \not\varepsilon A$, $e \not\varepsilon B$, $f \not\varepsilon C$, ¿cuáles afirmaciones serán ciertas?

$$(1)\ a \varepsilon C, \quad (2)\ b \varepsilon A, \quad (3)\ c \not\varepsilon A, \quad (4)\ d \varepsilon B, \quad (5)\ e \not\varepsilon A, \quad (6)\ f \not\varepsilon A$$

Solución:

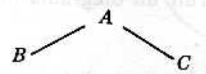
(1) Por el Teorema 1-1, A es un subconjunto de C. Luego $a \varepsilon A$ implica $a \varepsilon C$, y la afirmación es siempre cierta.
(2) Como el elemento $b \varepsilon B$ puede no ser elemento de A, la afirmación es falsa.
(3) El elemento $c \varepsilon C$ podría ser un elemento de A; por lo que $c \not\varepsilon A$ puede no ser verdad.
(4) El elemento d, que no está en A, puede no estar en B; así que la afirmación puede no ser cierta.
(5) Como $e \not\varepsilon B$ y $A \subset B$, $e \not\varepsilon A$ es siempre verdadera.
(6) Como $f \not\varepsilon C$ y $A \subset C$, $f \not\varepsilon A$ es siempre cierta.

DIAGRAMAS LINEALES

20. Hacer un diagrama lineal para los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$ y $C = \{a, c\}$.

Solución:

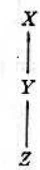
Como $A \supset B$, $A \supset C$ y B y C no son comparables, se construye así:



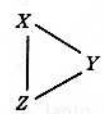
21. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ y $Z = \{b\}$.

Solución:

Aquí $Z \subset Y$ e $Y \subset X$. Queda entonces



y no

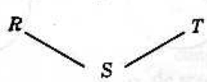


ya que el segmento de Z a X es redundante porque $Z \subset Y$ e $Y \subset X$ ya implican $Z \subset X$.

22. Construir el diagrama de los conjuntos $R = \{r, s, t\}$, $S = \{s\}$ y $T = \{s, t, u\}$.

Solución:

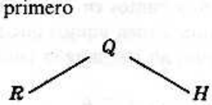
Aquí $S \subset R$ y $S \subset T$. Y como R y T no son comparables, se pone



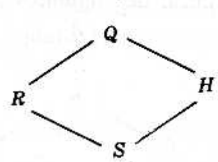
23. Sean Q, R, H y S los conjuntos del Problema 13. Hacer un diagrama lineal para estos conjuntos.

Solución:

Como $Q \supset R$ y $Q \supset H$, se construye primero



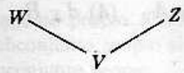
Ahora se agrega S al diagrama. Puesto que $S \subset R$ y $S \subset H$, se completa el diagrama como sigue:



24. Construir un diagrama lineal para los conjuntos V, W, X, Y y Z del Problema 17.

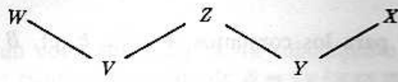
Solución:

Como $V \subset W$ y $V \subset Z$, se traza



Como $Y \subset Z$, se agrega Y al diagrama:

Por último, puesto que $Y \subset X$, se completa el diagrama como sigue:

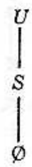


25. Sea S cualquier conjunto. Construir un diagrama lineal para los conjuntos $\emptyset$, S y el conjunto universal U.

Solución:

Ya que el conjunto vacío $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto, o sea $\emptyset \subset S$, se traza

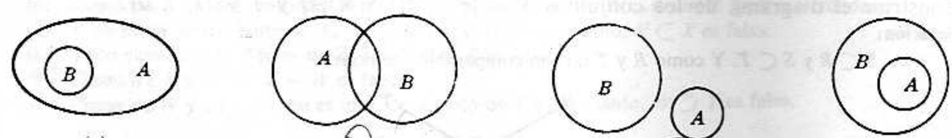
Por otra parte, como el conjunto universal U es un superconjunto de todo conjunto que incluya al S, se completa el diagrama como sigue:



$A = B$

PROBLEMAS DIVERSOS

26. Considérense las cinco afirmaciones siguientes: (1) $A \subset B$, (2) $A \supset B$, (3) $A = B$, (4) A y B son disjuntos, (5) A y B no son comparables. ¿Cuál afirmación describe mejor cada diagrama de Venn?

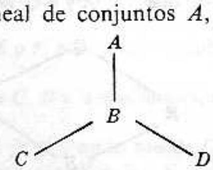


(a) (b) (c) (d)

Solución:

(a) El área de B es parte del área de A; luego $A \supset B$.
(b) Hay puntos en A que no están en B, y puntos en B que no están en A; luego A y B no son comparables. Los conjuntos no son disjuntos porque tienen puntos que pertenecen a ambos.
(c) Aquí los conjuntos son disjuntos, pues no hay ningún punto que esté en los dos conjuntos. Los conjuntos no son tampoco comparables.
(d) El área de A es parte del área de B; luego $A \subset B$.

27. Examinar el siguiente diagrama lineal de conjuntos A, B, C y D.



Escribir una afirmación que relacione cada par de conjuntos del diagrama. Debe haber seis afirmaciones.

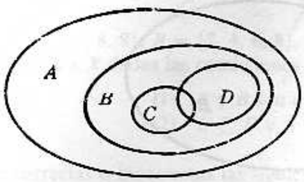
Solución:

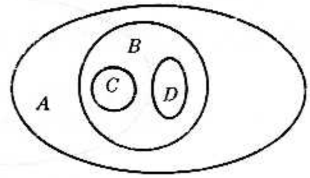
En primer lugar se ve que $C \subset B$, $D \subset B$ y $B \subset A$, pues estos conjuntos están unidos por segmentos. Por el Teorema 1-1 se deduce que $C \subset A$ y $D \subset A$. Por último, los conjuntos C y D no son comparables, ya que no están unidos por una línea ascendente.

28. Construir diagramas de Venn de los conjuntos A, B, C y D del diagrama lineal del Problema 27.

Solución:

Hagamos dos diagramas posibles:





La principal diferencia entre estos diagramas es que los conjuntos C y D aparecen disjuntos en el segundo diagrama. Pero ambos tienen el mismo diagrama lineal.

29. ¿Qué significa el símbolo $\{\{2, 3\}\}$?

Solución:

Se trata de un conjunto que tiene un elemento: el conjunto de los elementos 2 y 3. Obsérvese que $\{2, 3\}$ pertenece a $\{\{2, 3\}\}$; no es un subconjunto de $\{\{2, 3\}\}$. Así que se puede decir que $\{\{2, 3\}\}$ es un conjunto de conjuntos.

30. Dado $A = \{2, \{4, 5\}, 4\}$, ¿qué afirmaciones son incorrectas y por qué?

$$(1)\ \{4, 5\} \subset A \qquad (2)\ \{4, 5\} \in A \qquad (3)\ \{\{4, 5\}\} \subset A$$

Solución:

Los elementos de A son 2, 4 y el conjunto $\{4, 5\}$. Por tanto, (2) es correcta y (1) es incorrecta. (3) es una afirmación correcta porque el conjunto que consta del único elemento $\{4, 5\}$ es un subconjunto de A.

31. Dado $E = \{2, \{4, 5\}, 4\}$, ¿qué afirmaciones son incorrectas y por qué?

$$(1)\ 5 \in E \qquad (2)\ \{5\} \in E \qquad (3)\ \{5\} \subset E$$

$\{2\}, \{4,5\}, \{4\} \{4,2\}$
$\{2, \{4,5\}\}, \{4, \{4,5\}\} \in \phi$

Solución:

Todas son incorrectas. Los elementos de E son 2, 4 y el conjunto $\{4, 5\}$; por tanto, (1) y (2) son incorrectas. Hay ocho subconjuntos de E y $\{5\}$ no está entre ellos, de modo que (3) es incorrecta.

32. Hallar el conjunto potencia 2^S del conjunto $S = \{3, \{1, 4\}\}$.

Solución:

Observar primero que S contiene dos elementos, 3 y el conjunto $\{1, 4\}$. Por tanto, 2^S contiene $2^2 = 4$ elementos: S mismo, el conjunto vacío, $\{3\}$ y el conjunto formado por $\{1, 4\}$ solo, es decir, $\{\{1, 4\}\}$. Más breve:

$$2^S = \{S, \{3\}, \{\{1, 4\}\}, \emptyset\}$$

33. En lo que sigue, ¿qué es lo que no se define en un desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos?: (1) conjunto, (2) subconjunto de, (3) disjunto, (4) elemento, (5) es igual a, (6) pertenece a, (7) superconjunto de.

Solución:

Los únicos conceptos no definidos en la teoría de conjuntos son: conjunto, elemento y la relación «pertenece a», o sea (1), (4) y (6).

34. Demostrar: Sean A y B no vacíos, esto es, $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$. Si A y B son disjuntos, entonces A y B no son comparables.

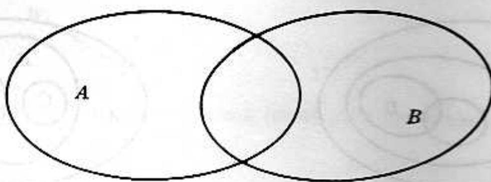
Solución:

Como A y B no son vacíos, hay elementos $a \in A$ y $b \in B$. Por otra parte, como A y B son disjuntos, $a \notin B$ y $b \notin A$. Por tanto, $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$, es decir, A y B no son comparables.

35. Dados A y B no comparables, ¿se sigue que A y B son disjuntos?

Solución:

No. Los conjuntos del siguiente diagrama de Venn no son comparables; pero tampoco son disjuntos.



Problemas propuestos

NOTACION

36. Escribir en notación conjuntista:

(1) R es un superconjunto de T.
(2) x es elemento de Y.
(3) M no es subconjunto de S.
(4) El conjunto potencia de W.
(5) z no pertenece a A.
(6) B está incluido en F.
(7) El conjunto vacío.
(8) R pertenece a $\mathscr{A}$.

37. Enunciar verbalmente:

(1) $A = \{x \mid x \text{ vive en París}\}$.
(2) $B = \{x \mid x \text{ habla danés}\}$.
(3) $C = \{x \mid x \text{ es mayor de 21 años}\}$.
(4) $D = \{x \mid x \text{ es ciudadano francés}\}$.

38. Escribir en forma tabular:

(1) $P = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$.
(2) $Q = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra «calcular»}\}$.
(3) $R = \{x \mid x^2 = 9, x - 3 = 5\}$.
(4) $S = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$.
(5) $T = \{x \mid x \text{ es una cifra del número } 2324\}$.

39. Si $E = \{1, 0\}$, decir entre las afirmaciones siguientes cuáles son correctas o incorrectas.

$$(1)\ \{0\} \in E,\ (2)\ \varnothing \in E,\ (3)\ \{0\} \subset E,\ (4)\ 0 \in E,\ (5)\ 0 \subset E$$

40. En una exposición axiomática de la teoría de conjuntos, decir cuáles de estos símbolos representan una relación no definida: (1) $\not\subset$, (2) $\in$, (3) $\supset$.

SUBCONJUNTOS

41. Si $B = \{0, 1, 2\}$, hallar todos los subconjuntos de B.

42. Si $F = \{0, \{1, 2\}\}$, hallar todos los subconjuntos de F.

43. Sean

$$A = \{2, 3, 4\} \qquad C = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$$
$$B = \{x \mid x^2 = 4,\ x \text{ es positivo}\} \qquad D = \{x \mid x \text{ es par}\}$$

Completar las siguientes afirmaciones insertando $\subset$, $\supset$ o «nc» (no comparables) entre cada par de conjuntos:

(1) $A \ldots B$, (2) $A \ldots C$, (3) $B \ldots C$, (4) $A \ldots D$, (5) $B \ldots D$, (6) $C \ldots D$.

44. Sean $A = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ y $E = \{3, 5\}$. ¿Cuáles conjuntos pueden ser iguales a X dadas las condiciones siguientes?

(1) X y B son disjuntos (3) $X \subset A$ y $X \not\subset C$.
(2) $X \subset D$ y $X \not\subset B$. (4) $X \subset C$ y $X \not\subset A$.

45. Decir si son correctas o incorrectas las siguientes afirmaciones:
(1) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.
(2) Todo subconjunto de un conjunto infinito es infinito.

PROBLEMAS DIVERSOS

46. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos A, B, C y D del Problema 43.

47. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos A, B, C, D y E del Problema 44.

48. Entre las afirmaciones siguientes decir cuáles son correctas o incorrectas:

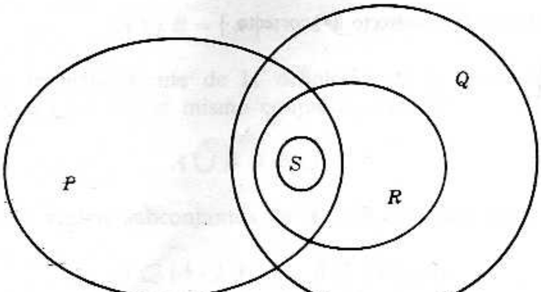
(1) $\{1, 4, 3\} = \{3, 4, 1\}$ (4) $\{4\} \subset \{\{4\}\}$
(2) $\{1, 3, 1, 2, 3, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ (5) $\emptyset \subset \{\{4\}\}$
(3) $\{4\} \in \{\{4\}\}$

49. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son finitos o infinitos:
(1) El conjunto de rectas paralelas al eje x.
(2) El conjunto de letras del alfabeto.
(3) El conjunto de números que son múltiplos de 5.
(4) El conjunto de animales que viven en la Tierra.
(5) El conjunto de números que son raíces de la ecuación $x^{38} + 42x^{23} - 17x^{18} - 2x^5 + 19 = 0$.
(6) El conjunto de círculos que pasan por el origen $(0, 0)$.

50. Entre las afirmaciones siguientes decir cuál es correcta y cuál incorrecta. Aquí S es un conjunto cualquiera no vacío.

(1) $S \in 2^S$ (2) $S \subset 2^S$ (3) $\{S\} \in 2^S$ (4) $\{S\} \subset 2^S$

51. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos del siguiente diagrama de Venn.



Respuestas a los problemas propuestos

36. (1) $R \supset T$, (2) $x \in Y$, (3) $M \not\subset S$, (4) 2^W, (5) $z \notin A$, (6) $B \subset F$, (7) $\emptyset$, (8) $R \in \mathscr{A}$.

37. (1) A es el conjunto de los x tales que x vive en París.
(2) B es el conjunto de los x tales que x habla danés.
(3) C es el conjunto de los x tales que x es mayor de 21 años.
(4) D es el conjunto de los x tales que x es ciudadano francés.

38. (1) $P = \{2, -1\}$, (2) $Q = \{a, c, l, u, r\}$, (3) $R = \emptyset$, (4) $S = \{a, e, i, o, u\}$, (5) $T = \{2, 3, 4\}$.

39. (1) incorrecto, (2) incorrecto, (3) correcto, (4) correcto, (5) incorrecto.

40. El símbolo $\in$ representa una relación no definida.

41. Hay ocho subconjuntos: B, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\emptyset$.

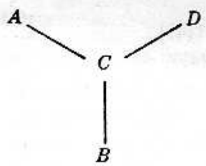
42. Hay cuatro subconjuntos: F, $\{0\}$, $\{\{1, 2\}\}$, $\emptyset$.

43. (1) $\supset$, (2) $\supset$, (3) $\subset$, (4) nc, (5) $\subset$, (6) $\subset$.

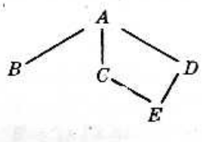
44. (1) C, E. (2) D, E. (3) A, B, D. (4) Ninguno.

45. (1) correcto, (2) incorrecto.

46.



47.

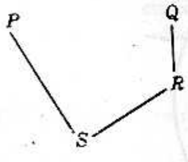


48. (1) correcto, (2) correcto, (3) correcto, (4) incorrecto, (5) correcto.

49. (1) infinito, (2) finito, (3) infinito, (4) finito, (5) finito, (6) infinito.

50. (1) correcto, (2) incorrecto (3) incorrecto, (4) correcto.

51.



Capítulo 2

Operaciones fundamentales con conjuntos

OPERACIONES CON CONJUNTOS

En aritmética se suma, resta y multiplica, es decir, a cada par de números x e y se le asigna un número $x + y$ llamado suma de x e y, un número $x - y$ llamado diferencia de x e y y un número xy llamado producto de x e y. Estas asignaciones se llaman operaciones de adición, sustracción y multiplicación de números. En este capítulo se van a definir las operaciones de *unión*, *intersección* y *diferencia* de conjuntos, es decir, se van a asignar o a hacer corresponder nuevos conjuntos a pares de conjuntos A y B. En un capítulo posterior se verá que estas operaciones entre conjuntos se comportan de manera un tanto semejante a la de las anteriores operaciones con números.

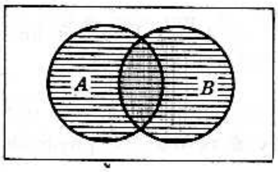
UNION

La *unión* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se denota la unión de A y B por

$$A \cup B$$

que se lee «A unión B».

Ejemplo 1-1: En el diagrama de Venn de la Figura 2-1, $A \cup B$ aparece rayado, o sea el área de A y el área de B.



$A \cup B$ lo rayado

Fig. 2-1

Ejemplo 1-2: Sean $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{f, b, d, g\}$. Entonces

$$S \cup T = \{a, b, c, d, f, g\}$$

Ejemplo 1-3: Sean P el conjunto de los números reales positivos y Q el conjunto de los números reales negativos. $P \cup Q$, unión de P y Q, consiste en todos los números reales exceptuado el cero.

La unión A y B se puede definir también concisamente así:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Observación 2-1: Se sigue inmediatamente de la definición de la unión de dos conjuntos que $A \cup B$ y $B \cup A$ son el mismo conjunto, esto es:

$$A \cup B = B \cup A$$

Observación 2-2: A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$, es decir, que:

$$A \subset (A \cup B) \quad \text{y} \quad B \subset (A \cup B)$$

En algunos libros la unión de A y B se denota por $A + B$ y se la llama suma conjuntista de A y B o simplemente A más B.

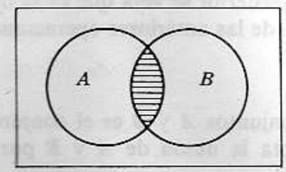
INTERSECCION

La *intersección* de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que son comunes a A y B, esto es, de aquellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B. Se denota la intersección de A y B por

$$A \cap B$$

que se lee «A intersección B».

Ejemplo 2-1: En el diagrama de Venn de la Fig. 2-2 se ha rayado $A \cap B$, el área común a ambos conjuntos A y B.



$A \cap B$ lo rayado

Fig. 2-2

Ejemplo 2-2: Sean $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{f, b, d, g\}$. Entonces

$$S \cap T = \{b, d\}$$

Ejemplo 2-3: Sea $V = \{2, 4, 6, \ldots\}$, es decir, los múltiplos de 2; y sea $W = \{3, 6, 9, \ldots\}$, o sean los múltiplos de 3. Entonces

$$V \cap W = \{6, 12, 18, \ldots\}$$

La intersección de A y B también se puede definir concisamente así:

$$A \cap B = \{x \mid x \varepsilon A,\ x \varepsilon B\}$$

Aquí la coma tiene el significado de «y».

Observación 2-3: Se sigue inmediatamente de la definición de intersección de dos conjuntos que

$$A \cap B = B \cap A$$

Observación 2-4: Cada uno de los conjuntos A y B contiene al $A \cap B$ como subconjunto, es decir,

$$(A \cap B) \subset A \text{ y } (A \cap B) \subset B$$

Observación 2-5: Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir, si A y B son disjuntos, entonces la intersección de A y B es el conjunto vacío, o sea $A \cap B = \emptyset$.

En algunos libros, sobre todo de probabilidades, la intersección de A y B se denota por AB y se llama producto conjuntista de A y B o simplemente A por B.

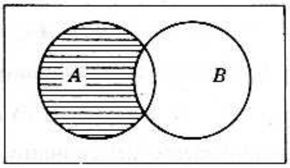
DIFERENCIA

La *diferencia* de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero no a B. Se denota la diferencia de A y B por

$$A - B$$

que se lee «A diferencia B» o simplemente «A menos B».

Ejemplo 3-1: En el diagrama de Venn de la Fig. 2-3 se ha rayado $A - B$, el área de A que no es parte de B.



$A - B$ lo rayado

Fig. 2-3

Ejemplo 3-2: Sean $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{f, b, d, g\}$. Se tiene:

$$S - T = \{a, c\}$$

Ejemplo 3-3: Sean R el conjunto de los números reales y Q el conjunto de los números racionales. Entonces $R - Q$ es el conjunto de los números irracionales.

La diferencia de A y B se puede también definir concisamente como

$$A - B = \{x \mid x \varepsilon A,\ x \notin B\}$$

Observación 2-6: El conjunto A contiene al $A - B$ como subconjunto, esto es:

$$(A - B) \subset A$$

Observación 2-7: Los conjuntos $(A - B)$, $A \cap B$ y $(B - A)$ son mutuamente disjuntos, es decir, la intersección de dos cualesquiera es vacía.

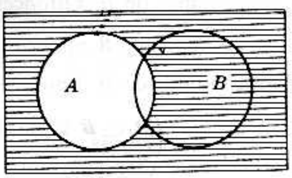
La diferencia de A y B se denota a veces por A/B o bien por $A \sim B$.

COMPLEMENTO

El complemento de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen a A, es decir, la diferencia del conjunto universal U y del A. Se denota el complemento de A por

$$A'$$

Ejemplo 4-1: En el diagrama de Venn de la Fig. 2-4 se ha rayado el complemento de A, o sea el área exterior a A. Se supone que el conjunto universal U es el área del rectángulo.



A' lo rayado

Fig. 2-4

Ejemplo 4-2: Suponiendo que el conjunto universal U sea el alfabeto, dado $T = \{a, b, c\}$, entonces

$$T' = \{d, e, f, \ldots, y, z\}$$

Ejemplo 4-3: Sea $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$, o sea los números pares. Entonces $E' = \{1, 3, 5, \ldots\}$, que son los impares. Aquí se supone que el conjunto universal es el de los números naturales, 1, 2, 3, . . .

También se puede definir el complemento de A concisamente así:

$$A' = \{x \mid x \varepsilon U,\ x \notin A\}$$

o simplemente:

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

Lo que se establece en seguida resulta directamente de la definición del complemento de un conjunto.

Observación 2-8: La unión de cualquier conjunto A y su complemento A' es el conjunto universal, o sea que

$$A \cup A' = U$$

Por otra parte, el conjunto A y su complemento A' son disjuntos, es decir,

$$A \cap A' = \emptyset$$

Observación 2-9: El complemento del conjunto universal U es el conjunto vacío $\emptyset$, y viceversa, o sea que:

$$U' = \emptyset \quad \text{y} \quad \emptyset' = U$$

Observación 2-10: El complemento del complemento de un conjunto A es el conjunto A mismo. Más breve:

$$(A')' = A$$

La siguiente observación muestra cómo la diferencia de dos conjuntos podría ser definida por el complemento de un conjunto y la intersección de dos conjuntos. En efecto, se tiene la siguiente relación fundamental:

Observación 2-11: La diferencia de A y B es igual a la intersección de A y el complemento de B, o sea:

$$A - B = A \cap B'$$

La demostración de la Observación 2-11 se sigue inmediatamente de las definiciones:

$$A - B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\} = \{x \mid x \in A,\ x \in B'\} = A \cap B'$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS COMPARABLES

Las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento tienen propiedades sencillas cuando los conjuntos de que se trata son comparables. Se pueden demostrar los teoremas siguientes.

Teorema 2-1: Sea A un subconjunto de B. Entonces la intersección de A y B es precisamente A, es decir:

$$A \subset B \text{ implica } A \cap B = A$$

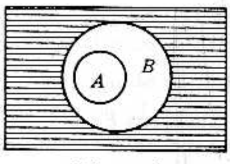
Teorema 2-2: Sea A un subconjunto de B. Entonces la unión de A y B es precisamente B, es decir:

$$A \subset B \text{ implica } A \cup B = B$$

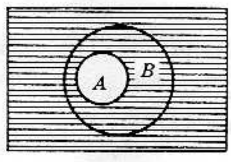
Teorema 2-3: Sea A un subconjunto de B. Entonces B' es un subconjunto de A', es decir:

$$A \subset B \text{ implica } B' \subset A'$$

Se ilustra el Teorema 2-3 con los diagramas de Venn de las Figs. 2-5 y 2-6. Nótese que el área de B' está incluida en la de A'.



B' lo rayado
Fig. 2-5



A' lo rayado
Fig. 2-6

Teorema 2-4: Sea A un subconjunto de B. Entonces la unión de A y $(B - A)$ es precisamente B, es decir:

$$A \subset B \text{ implica } A \cup (B - A) = B$$

Problemas resueltos

UNION

1. En los diagramas de Venn que siguen, rayar A unión B, o sea $A \cup B$:

(a) (b) (c) (d)

Solución:

La unión de A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se rayan entonces las áreas de A y de B como sigue:

(a) (b) (c) (d)

$A \cup B$ lo rayado

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar (a) $A \cup B$, (b) $A \cup C$, (c) $B \cup C$, (d) $B \cup B$.

Solución:

Para formar la unión de A y B se reúnen todos los elementos de A con todos los elementos de B. De modo que

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

De igual manera,

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$$
$$B \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Nótese que $B \cup B$ es precisamente B.

3. Sean A, B y C los conjuntos del Problema 2. Hallar (1) $(A \cup B) \cup C$, (2) $A \cup (B \cup C)$.

Solución:

(1) Se determina primero $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$. Entonces la unión de $A \cup B$ y C es

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 5\}$$

(2) Se determina primero $B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$. Entonces la unión de A y $B \cup C$ es

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 5\}$$

Nótese que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

4. Sean el conjunto $X = \{$Tomás, Ricardo, Enrique$\}$, el conjunto $Y = \{$Tomás, Marcos, Emilio$\}$ y $Z = \{$Marcos, Emilio, Eduardo$\}$. Hallar (a) $X \cup Y$, (b) $Y \cup Z$, (c) $X \cup Z$.

Solución:

Para hallar $X \cup Y$ se hace la lista de los nombres de X con los nombres de Y; así

$X \cup Y = \{$Tomás, Ricardo, Enrique, Marcos, Emilio$\}$

Del mismo modo $Y \cup Z = \{$Tomás, Marcos, Emilio, Eduardo$\}$

$X \cup Z = \{$Tomás, Ricardo, Enrique, Marcos, Emilio, Eduardo$\}$

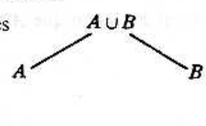
5. Sean A y B dos conjuntos que no son comparables. Hacer el diagrama lineal de los conjuntos A, B y $A \cup B$.

Solución:

Nótese primeramente, según la Observación 2-2, que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$, es decir, que

$$A \subset (A \cup B) \quad y \quad B \subset (A \cup B)$$

De acuerdo con esto, el diagrama lineal de A, B y $A \cup B$ es



6. Demostrar la Observación 2-2: A y B son subconjuntos de $A \cup B$.

Solución:

Puesto que $A \cup B = B \cup A$ solo se requiere demostrar que A es subconjunto de $A \cup B$, esto es, que $x \varepsilon A$ implica $x \varepsilon A \cup B$.

Sea x un elemento de A. Se sigue entonces que x es elemento de A o de B, es decir, que $x \varepsilon A \cup B$. Así que $A \subset (A \cup B)$.

7. Demostrar: $A = A \cup A$.

Solución:

Según la Definición 1-1, hay que demostrar que $A \subset (A \cup A)$ y que $(A \cup A) \subset A$. Según la Observación 2-2, $A \subset (A \cup A)$. Sea ahora un $x \varepsilon (A \cup A)$. Entonces, según la definición de unión, $x \varepsilon A$ o $x \varepsilon A$; así que x pertenece a A. Por tanto, $(A \cup A) \subset A$ y, por la Definición 1-1, $A = (A \cup A)$.

8. Demostrar: $U \cup A = U$, donde U es el conjunto universal.

Solución: $U \cup A = \{x / x \in U \text{ ó } x \in A\}$

Por la Observación 2-2, $U \subset (U \cup A)$. Como todo conjunto es un subconjunto del conjunto universal, $(U \cup A) \subset U$ y la conclusión se sigue de la Definición 1-1.

9. Demostrar: $\emptyset \cup A = A$.

Solución:

Por la Observación 2-2, $A \subset (A \cup \emptyset)$. Sea ahora un $x \varepsilon (A \cup \emptyset)$, entonces $x \varepsilon A$ o $x \varepsilon \emptyset$. Por la definición de conjunto vacío, $x \notin \emptyset$; de modo que $x \varepsilon A$. Se ha demostrado que $x \varepsilon (A \cup \emptyset)$ implica $x \varepsilon A$, es decir, que $(A \cup \emptyset) \subset A$. Por la Definicion 1-1, $A = \emptyset \cup A$.

10. Demostrar: $A \cup B = \emptyset$ implica $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$.

Solución:

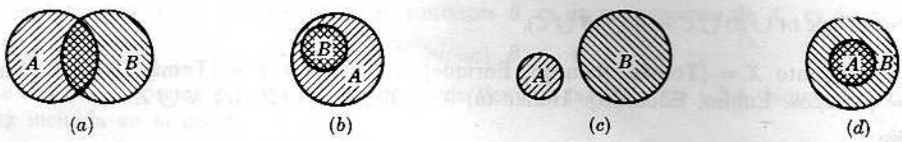
Por la Observación 2-2, $A \subset (A \cup B)$, es decir, $A \subset \emptyset$. Pero $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto; en particular, $\emptyset \subset A$. Luego, por la Definición 1-1, $A = \emptyset$. De igual manera se puede demostrar que $B = \emptyset$.

INTERSECCION

11. En los diagramas de Venn del Problema 1, rayar la intersección de A y B, esto es, de $A \cap B$.

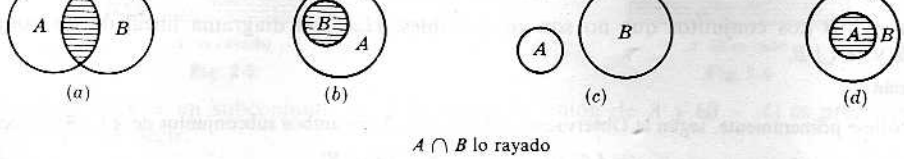
Solución:

La intersección de A y B consiste en el área que es común tanto a A como a B. Para encontrar $A \cap B$, se raya primero A con trazos oblicuos hacia la derecha (////) y luego se raya B con trazos oblicuos inclinados a la izquierda (\\\\) como se ve en la figura:



(a) (b) (c) (d)

Entonces $A \cap B$ es el área que tiene los dos rayados. El resultado final, que es $A \cap B$, se raya ahora con líneas horizontales, como sigue:



(a) (b) (c) (d)

$A \cap B$ lo rayado

Nótese que $A \cap B$ es vacía en (c) en que A y B son disjuntos.

12. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar (*a*) $A \cap B$, (*b*) $A \cap C$, (*c*) $B \cap C$, (*d*) $B \cap B$.

Solución:

Para formar la intersección de A y B se inscriben todos los elementos comunes a A y B; así $A \cap B = \{2, 4\}$. De igual manera, $A \cap C = \{3, 4\}$, $B \cap C = \{4, 6\}$ y $B \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$. Nótese que $B \cap B$ es efectivamente B.

13. Sean A, B y C los conjuntos del Problema 12. Hallar (*a*) $(A \cap B) \cap C$, (*b*) $A \cap (B \cap C)$.

Solución:

(*a*) $A \cap B = \{2, 4\}$. Así que la intersección de $\{2, 4\}$ con C es $(A \cap B) \cap C = \{4\}$.

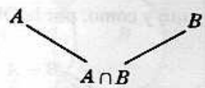
(*b*) $B \cap C = \{4, 6\}$. La intersección de este conjunto con el A es $\{4\}$, esto es, $A \cap (B \cap C) = \{4\}$.

Nótese que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

14. Sean A y B dos conjuntos no comparables. Hacer el diagrama lineal de A, B y $A \cap B$.

Solución:

Por la Observación 2-4, $A \cap B$ es un subconjunto tanto de A como de B, esto es, $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$. De acuerdo con esto se tiene el siguiente diagrama lineal:



15. Demostrar la Observación 2-4: $A \cap B$ es un subconjunto de A y de B.

Solución:

Sea x un elemento cualquiera de $A \cap B$. Por definición de la intersección, x pertenece a ambos conjuntos A y B; en particular, $x \in A$. Se ha demostrado que $x \in (A \cap B)$ implica $x \in A$, esto es, que $(A \cap B) \subset A$. De igual modo, $(A \cap B) \subset B$.

16. Demostrar: $A \cap A = A$.

Solución:

Por la Observación 2-4, $(A \cap A) \subset A$. Sea x un elemento cualquiera de A; entonces es obvio que x pertenece a los conjuntos A y A, es decir, x pertenece a $A \cap A$. Se demuestra así que $x \in A$ implica $x \in (A \cap A)$, es decir, que $A \subset (A \cap A)$. Por la Definición 1-1, $A \cap A = A$.

17. Demostrar: $U \cap A = A$, donde U es el conjunto universal.

Solución:

Por la Observación 2-4, $(U \cap A) \subset A$. Sea x un elemento cualquiera de A. Como U es el conjunto universal x pertenece también a U. Como $x \in A$ y $x \in U$, por la definición de intersección, $x \in (U \cap A)$. Se ha demostrado que $x \in A$ implica $x \in (U \cap A)$, es decir, que se ha demostrado que $A \subset (U \cap A)$. Por la Definición 1-1, $U \cap A = A$.

18. Demostrar: $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Solución:

Por la Observación 2-4, $(A \cap \varnothing) \subset \varnothing$. Pero el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto; en particular, $\varnothing \subset A \cap \varnothing$. Por tanto, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

DIFERENCIA

19. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar (*a*) $(A - B)$, (*b*) $(C - A)$, (*c*) $(B - C)$, (*d*) $(B - A)$, (*e*) $(B - B)$.

Solución:

(*a*) El conjunto $A - B$ consiste en los elementos de A que no están en B. Como $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $2, 4 \in B$, entonces $A - B = \{1, 3\}$.

(*b*) Los únicos elementos de C que no están en A son 5 y 6; por tanto, $C - A = \{5, 6\}$.

(*c*) $B - C = \{2, 8\}$. (*d*) $B - A = \{6, 8\}$. (*e*) $B - B = \varnothing$

20. En los diagramas de Venn del Problema 1, rayar A menos B, o sea $A - B$.

Solución:

En cada caso el conjunto $A - B$ consiste en los elementos de A que no están en B, es decir, el área en A que no está en la de B.

$A - B$ lo rayado

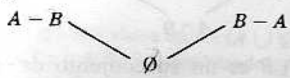
Nótese que, como en (c), $A - B = A$ si A y B son disjuntos. Nótese también que, como en (d), $A - B = \varnothing$ si A es subconjunto de B.

21. Dados dos conjuntos A y B no comparables, construir el diagrama lineal de los conjuntos A, B, $(A - B)$, $(B - A)$, $\varnothing$ y el universal U.

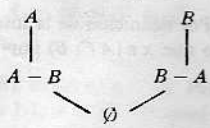
Solución:

Notar primero, según la Observación 2-6, que $(A - B) \subset A$ y que $(B - A) \subset B$.

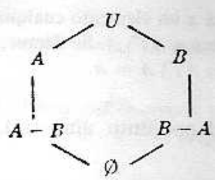
Como $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto y como, por la Observación 2-7, $(A - B)$ y $(B - A)$ no son comparables, se puede trazar primero



Como $A \supset (A - B)$ y $B \supset (B - A)$, se añaden A y B al diagrama como sigue:



Como U contiene a todo conjunto, se completa el diagrama así:



Si no se incluyera U o $\varnothing$ en el diagrama, entonces el diagrama lineal no se cerraría.

22. Demostrar la Observación 2-6: $(A - B) \subset A$.

Solución:

Sea x cualquier elemento del conjunto $A - B$. Por definición de diferencia, $x \in A$ y $x \notin B$; en particular, x pertenece a A. Se ha demostrado que $x \in (A - B)$ implica $x \in A$; es decir, que $(A - B) \subset A$.

23. Demostrar: $(A - B) \cap B = \varnothing$.

Solución:

Sea x perteneciente a $(A - B) \cap B$. Por la definicion de intersección, $x \in (A - B)$ y $x \in B$. Pero por la definición de diferencia, $x \in A$ y $x \notin B$. Como no hay ningún elemento que cumpla $x \in B$ y $x \notin B$, entonces $(A - B) \cap B = \varnothing$.

COMPLEMENTO

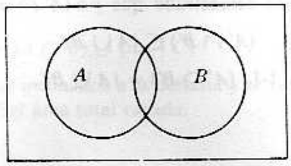
24. Sean $U = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar (a) A', (b) B', (c) $(A \cap C)'$, (d) $(A \cup B)'$, (e) $(A')'$, (f) $(B - C)'$.

Solución:

(a) El conjunto A' consiste en los elementos que están en U pero no en A. Por tanto, $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

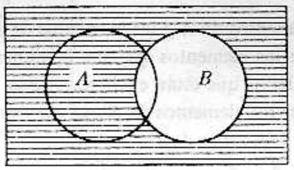
(*b*) El conjunto de los elementos de U que no están en B es $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
(*c*) $(A \cap C) = \{3, 4\}$ y entonces $(A \cap C)' = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
(*d*) $(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ y entonces $(A \cup B)' = \{5, 7, 9\}$.
(*e*) $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y entonces $(A')' = \{1, 2, 3, 4\}$, es decir, $(A')' = A$.
(*f*) $(B - C) = \{2, 8\}$ y entonces $(B - C)' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

25. En el diagrama de Venn siguiente, rayar (*a*) B', (*b*) $(A \cup B)'$, (*c*) $(B - A)'$, (*d*) $A' \cap B'$.



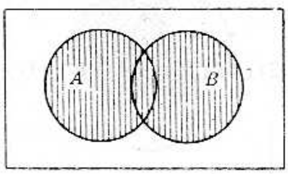
Solución:

(*a*) Como B', complemento de B, consta de los elementos que no están en B, se raya el área exterior a B.

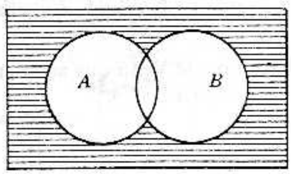


B' lo rayado

(*b*) Primero se raya el área $A \cup B$; luego, $(A \cup B)'$ es el área exterior a $(A \cup B)$.

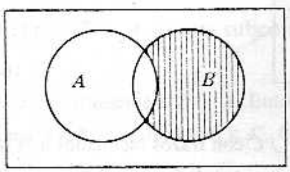


$A \cup B$ lo rayado

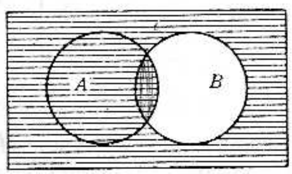


$(A \cup B)'$ lo rayado

(*c*) Primero se raya $B - A$; y así $(B - A)'$ es el área exterior a $B - A$.

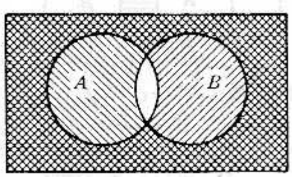


$B - A$ lo rayado

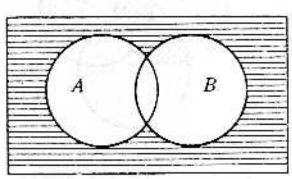


$(B - A)'$ lo rayado

(*d*) Primero se raya A', el área exterior a A, con trazos oblicuos inclinados a la derecha (////) y se raya B' con trazos oblicuos inclinados a la izquierda (\\\\), entonces $A' \cap B'$ resulta ser el área con doble rayado.



A' y B' con doble rayado



$A' \cap B'$ lo rayado

Nótese que el área de $(A \cup B)'$ es la misma que la de $A' \cap B'$.

26. Demostrar el Teorema de De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

$x \in (A \cup B)'$, $x \notin A$, $x \notin B$ $x \in A^c$ $x \in B^c$

Solución:

Sea $x \in (A \cup B)'$; así, pues, x no pertenece a $A \cup B$. Por tanto, $x \notin A$ y $x \notin B$, es decir, $x \in A'$ y $x \in B'$ y, por la definición de intersección, x pertenece a $A' \cap B'$. Se ha demostrado que $x \in (A \cup B)'$ implica $x \in (A' \cap B')$, es decir, que

$$(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$$

Sea ahora $y \in A' \cap B'$; entonces y pertenece a A' e y pertenece a B'. Así que $y \notin A$ e $y \notin B$ y, por tanto, $y \notin A \cup B$, o sea que $y \in (A \cup B)'$. Queda demostrado que $y \in (A' \cap B')$ implica $y \in (A \cup B)'$, es decir, que

$$(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$$

Por consiguiente, por la Definición 1-1, $(A' \cap B') = (A \cup B)'$.

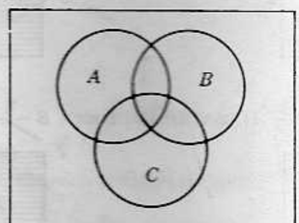
PROBLEMAS DIVERSOS

27. Sean $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, d\}$ y $B = \{b, d, e\}$. Hallar (*a*) $A \cup B$, (*b*) $B \cap A$, (*c*) B', (*d*) $B - A$, (*e*) $A' \cap B$, (*f*) $A \cup B'$, (*g*) $A' \cap B'$, (*h*) $B' - A'$, (*i*) $(A \cap B)'$, (*j*) $(A \cup B)'$.

Solución:

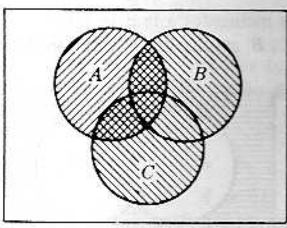
(*a*) La unión de A y B consta de los elementos de A y los elementos de B, es decir, $A \cup B = \{a, b, d, e\}$.
(*b*) La intersección de A y B consta de los elementos que son comunes a A y B, es decir, $A \cap B = \{b, d\}$.
(*c*) El complemento de B consta de las letras que están en U pero no en B; así que $B' = \{a, c\}$.
(*d*) El conjunto $B - A$ está formado por los elementos de B que no están en A, esto es, $B - A = \{e\}$.
(*e*) $A' = \{c, e\}$ y $B = \{b, d, e\}$; así que $A' \cap B = \{e\}$.
(*f*) $A = \{a, b, d\}$ y $B' = \{a, c\}$; así que $A \cup B' = \{a, b, c, d\}$.
(*g*) $A' = \{c, e\}$ y $B' = \{a, c\}$; entonces $A' \cap B' = \{c\}$.
(*h*) $B' - A' = \{a\}$.
(*i*) Según (*b*), $A \cap B = \{b, d\}$; luego $(A \cap B)' = \{a, c, e\}$.
(*j*) Según (*a*), $A \cup B = \{a, b, d, e\}$; luego $(A \cup B)' = \{c\}$.

28. En el diagrama de Venn que sigue, rayar (1) $A \cap (B \cup C)$, (2) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, (3) $A \cup (B \cap C)$, (4) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

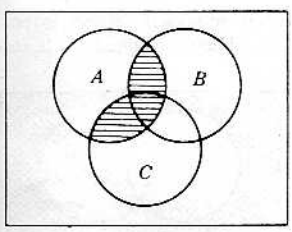


Solución:

(1) Primero rayar A con trazos inclinados a la derecha y rayar $B \cup C$ con trazos inclinados a la izquierda; entonces $A \cap (B \cup C)$ es el área con doble rayado.

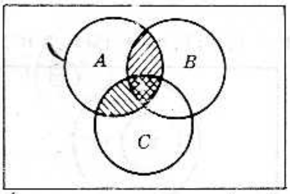


A y $B \cup C$ aparecen rayados

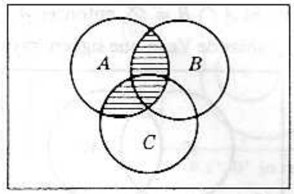


$A \cap (B \cup C)$ lo rayado

(2) Primero rayar $A \cap B$ con trazos inclinados a la derecha y $A \cap C$ con trazos inclinados a la izquierda; entonces $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ resulta ser el área total rayada como se muestra en seguida.



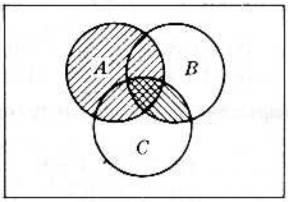
$A \cap B$ y $A \cap C$ lo rayado



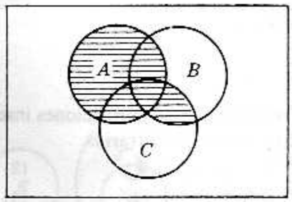
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ lo rayado

Nótese que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(3) Primero se raya A con trazos inclinados a la derecha y se raya $B \cap C$ con trazos inclinados a la izquierda; así resulta ser $A \cup (B \cap C)$ el área total rayada.

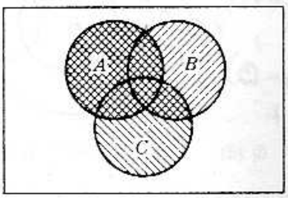


A y $B \cap C$ lo rayado

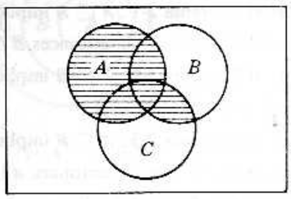


$A \cup (B \cap C)$ lo rayado

(4) Primero se raya $A \cup B$ con trazos inclinados a la derecha y se raya $A \cup C$ con trazos inclinados a la izquierda; $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ es el área con doble rayado.



$A \cup B$ y $A \cup C$ lo rayado



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ lo rayado

Nótese que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$X \in B \quad X \notin A$

29. Demostrar: $B - A$ es un subconjunto de A'.

$X \in A'$

Solución:

Sea x perteneciente a $B - A$. Entonces $x \in B$ y $x \notin A$; por tanto, x es elemento de A'. $B - A = A'$

Como $x \notin B - A$ implica $x \in A'$, $B - A$ es subconjunto de A'. $B - A \subseteq A'$

30. Demostrar: $B - A' = B \cap A$. $X \in B \quad X \notin A'$

$X \in A$

Solución: X

$$B - A' = \{x \mid x \in B,\ x \notin A'\} = \{x \mid x \notin B,\ x \notin A\} = B \cap A.$$

$B \cap A$

Problemas propuestos

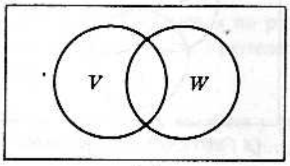
31. Sea el conjunto universal $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, g\}$ y $C = \{b, e, f, g\}$. Hallar:

(1) $A \cup C$	(3) $C - B$	(5) $A' - B$	(7) $(A - C)'$	(9) $(A - B')'$
(2) $B \cap A$	(4) B'	(6) $B' \cup C$	(8) $C' \cap A$	(10) $(A \cap A')'$

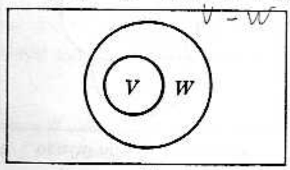
32. Demostrar: Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \subset B'$.

33. En los diagramas de Venn que siguen, rayar (1) $V \cap W$, (2) W', (3) $W - V$, (4) $V' \cup W$, (5) $V \cap W'$, (6) $V' - W'$.

V = W



(*a*)



(*b*)

34. Hacer un diagrama de Venn con tres conjuntos no vacíos A, B y C de modo que A, B y C tengan las siguientes características:

(1) $A \subset B,\ C \subset B,\ A \cap C = \emptyset$
(2) $A \subset B,\ C \not\subset B,\ A \cap C \neq \emptyset$
(3) $A \subset C,\ A \neq C,\ B \cap C = \emptyset$
(4) $A \subset (B \cap C),\ B \subset C,\ C \neq B,\ A \neq C$

35. Determinar:

(1) $U \cap A$ (2) $A \cup A$ (3) $\emptyset'$ (4) $\emptyset \cup A$ (5) $A' \cap A$ (6) U' (7) $U \cup A$ (8) $A' \cup A$ (9) $A \cap A$ (10) $\emptyset \cap A$.

36. Completar las siguientes afirmaciones insertando $\subset$, $\supset$ o nc (no comparables) entre cada par de conjuntos. Aquí A y B son conjuntos arbitrarios.

(1) A .⊃. $A - B$
(2) A .⊃. $A \cap B$
(3) A' .⊃. $B - A$
(4) A .⊂. $A \cup B$
(5) A' .NC. $A - B$
(6) A .NC. $B - A$

37. La fórmula $A - B = A \cap B'$ puede definir la diferencia de dos conjuntos mediante las solas operaciones de intersección y complemento. Encontrar una fórmula que defina la unión de dos conjuntos, $A \cup B$, mediante estas dos operaciones de intersección y complemento.

38. Demostrar: $A - B$ es un subconjunto de $A \cup B$. $x \in A \quad x \notin B$

39. Demostrar el Teorema 2-1: $A \subset B$ implica $A \cap B = A$. $x \in (A \cup B)$

40. Demostrar: Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $B \cap A' = B$. $x \in A,\ x \notin B.$

41. Demostrar el Teorema 2-2: $A \subset B$ implica $A \cup B = B$. $x \in (A - B)$

42. Demostrar: $A' - B' = B - A$. $x \in A \quad A \cup B.$

43. Demostrar el Teorema 2-3: $A \subset B$ implica $B' \subset A'$.

44. Demostrar: Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cup B' = B'$.

45. Demostrar: $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

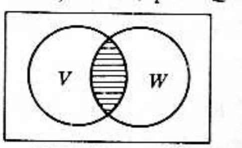
46. Demostrar el Teorema 2-4: $A \subset B$ implica $A \cup (B - A) = B$.

Respuestas a los problemas propuestos

31. (1) U (2) $\{a, c, e\}$ (3) $\{b, f\}$ (4) $\{b, d, f\}$ (5) $\{f\}$ (6) $\{b, d, f, e, g\}$ (7) $C = \{b, e, f, g\}$ (8) $\{a, c, d\}$ (9) $\{b, d, f, g\}$ (10) U

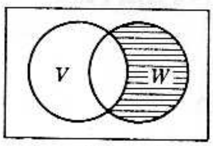
32. Demostración: Sea $x \in A$. Como A y B son disjuntos, $x \notin B$; luego x pertenece a B'. Queda demostrado que $x \in A$ implica $x \in B'$, es decir, que $A \subset B'$.

33. (*a*) (1)



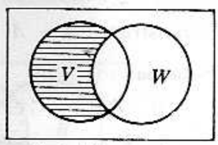
$V \cap W$ lo rayado

(3)



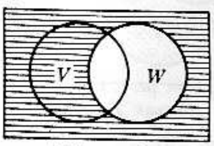
$W - V$ lo rayado

(5)



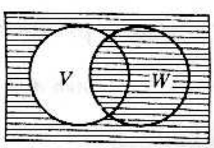
$V \cap W'$ lo rayado

(2)



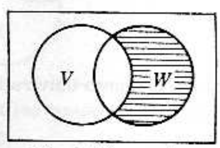
W' lo rayado

(4)



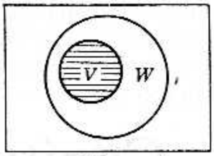
$V' \cup W$ lo rayado

(6)



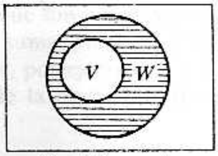
$V' - W'$ lo rayado

(b) (1)



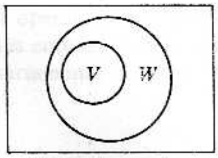
$V \cap W$ lo rayado

(3)



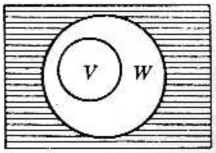
$W - V$ lo rayado

(5)



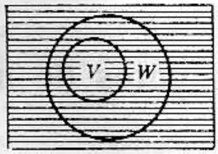
$V \cap W'$ lo rayado

(2)



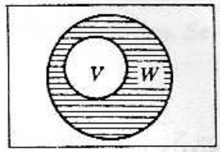
W' lo rayado

(4)



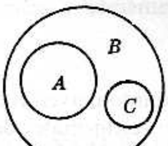
$V' \cup W$ lo rayado

(6)

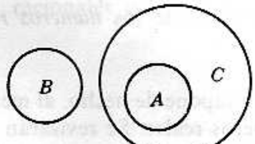


$V' - W'$ lo rayado

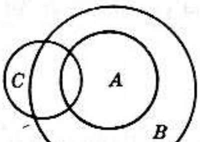
34. (1)



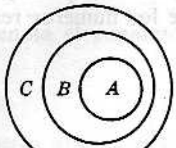
(3)



(2)



(4)



35. (1) A (2) A (3) U (4) A (5) $\emptyset$ (6) $\emptyset$ (7) U (8) U (9) A (10) $\emptyset$

36. (1) $\supset$ (2) $\supset$ (3) $\supset$ (4) $\subset$ (5) nc (6) nc

37. $A \cup B = (A' \cap B')'$.