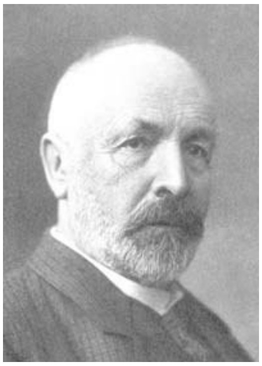
CAPÍTULO 6

TEORÍA DE CONJUNTOS



Colección de David Eugene Smith, Universidad de Columbia

Georg Cantor
(1845-1918)

A fines del siglo XIX, Georg Cantor fue el primero en darse cuenta de la utilidad potencial de investigar propiedades de los conjuntos en general, a diferencia de las propiedades de los elementos de que se componen. Muchos matemáticos de su tiempo se resistieron a aceptar la validez del trabajo de Cantor. Sin embargo, ahora, la abstracta teoría de conjuntos es considerada como el fundamento del pensamiento matemático. Todos los objetos matemáticos (¡aún los números!) pueden definirse en términos de conjuntos y el lenguaje de la teoría de conjuntos se utiliza en todos los temas matemáticos.

En este capítulo agregamos las definiciones básicas y la notación de la teoría de conjuntos que se introdujeron en el capítulo 1 y se muestra cómo establecer propiedades de los conjuntos mediante el uso de demostraciones y contraejemplos. También presentamos la noción del álgebra booleana, que explica cómo deducir sus propiedades y analizar las relaciones entre las equivalencias lógicas e identidades de conjuntos. El capítulo termina con un análisis de una famosa "paradoja" de la teoría de conjuntos y su relación con la ciencia computacional.

6.1 Teoría de conjuntos: definiciones y el método del elemento de demostración

La introducción de abstracciones adecuadas es nuestra única ayuda mental para organizar y dominar la complejidad. —E. W. Dijkstra, 1930-2002

Las palabras *conjunto* y *elemento* son términos indefinidos de la teoría de conjuntos tales como *frase*, *verdadero* y *falso* son términos indefinidos de la lógica. El fundador de la teoría de conjuntos, Georg Cantor, sugirió imaginar a un conjunto como una "colección M de todos los objetos definidos y separados de nuestra intuición o de nuestro pensamiento. Estos objetos se llaman los elementos de M". Cantor utilizó la letra M porque es la primera letra de la palabra conjunto en alemán: *Menge*.

Siguiendo el espíritu de la notación de Cantor (aunque no la letra), sea S un conjunto y a un elemento de S. Entonces, como se indica en la sección 1.2, $a \in S$ significa que a es un elemento de S, $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S, $\{1, 2, 3\}$ se refiere al conjunto cuyos elementos son 1, 2 y 3 y $\{1, 2, 3, \ldots\}$ se refiere al conjunto de todos los enteros positivos. Si S es un conjunto y $P(x)$ es una propiedad que los elementos de S pueden o no pueden satisfacer, entonces se podrá definir un conjunto al escribir

¡Precaución! No olvide incluir las palabras "el conjunto de todos".

$$A = \{x \in S \mid P(x)\},$$

el conjunto de todos   tal que

que se lee "el conjunto de todos los x en S tales que P de x".

Subconjuntos: demostración y refutación

Empezamos por reescribir lo que significa que un conjunto A sea un subconjunto de un conjunto B como un enunciado condicional universal formal:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \text{ si } x \in A \text{ entonces } x \in B.$$

La negación es, por tanto, existencial:

$$A \nsubseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \notin B.$$

Un *subconjunto propio* de un conjunto es un subconjunto que no es igual al conjunto que lo contiene. Por tanto,

> A es un **subconjunto propio** de B $\Leftrightarrow$
>
> 1) $A \subseteq B$ y
> 2) existe al menos un elemento en B que no está en A.

Ejemplo 6.1.1 Demostración de si un conjunto es un subconjunto de otro

Sea $A = \{1\}$ y $B = \{\mathbf{1}, \{1\}\}$.

a. ¿Es $A \subseteq B$?

b. Si es así, ¿es A un subconjunto propio de B?

Solución

Nota Un conjunto como $\{1\}$, con sólo un elemento, se llama un **conjunto unitario o singleton**.

a. Ya que $A = \{1\}$, A tiene un único elemento, a saber, el símbolo 1. Este elemento también es uno de los elementos en el conjunto de B. Por tanto cada elemento en A está en B y así $A \subseteq B$.

b. B tiene dos elementos distintos, el símbolo 1 y el conjunto $\{1\}$ cuyo único elemento es 1. Ya que $1 \neq \{1\}$, el conjunto $\{1\}$ no es un elemento de A y así hay un elemento de B que no es un elemento de A. Por lo que A es un subconjunto propio de B. ■

Ya que hemos definido lo que significa para un conjunto ser un subconjunto de otro por medio de un enunciado condicional universal, podemos utilizar el método de demostración directa para establecer una relación de subconjunto. Esta demostración se llama *argumento del elemento* y es la técnica de demostración esencial de la teoría de conjuntos.

> **Argumento del elemento: el método básico para demostrar que un conjunto es un subconjunto de otro**
>
> Sean los conjuntos X y Y dados. Para demostrar que $X \subseteq Y$,
>
> 1. **suponga** que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de X,
> 2. **demuestre** que x es un elemento de Y.

Ejemplo 6.1.2 Demostrando y refutando relaciones de subconjunto

Defina los conjuntos A y B de la siguiente manera:

$$A = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 6r + 12 \text{ para alguna } r \in \mathbf{Z}\}$$

$$B = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 3s \text{ para alguna } s \in \mathbf{Z}\}$$

a. Diseñe una demostración para $A \subseteq B$. b. Demuestre que $A \subseteq B$.
c. Refute que $B \subseteq A$.

Solución

a. **Diseño de una demostración:**
Suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de A.

.
.
.

Por tanto, x es un elemento de B.

b. **Demostración:**
Suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de A.
[Debemos demostrar que $x \in B$. Por definición de B, esto significa que debemos demostrar que $x = 3 \cdot$ (algún entero).]

Por definición de A, existe un entero r tal que $x = 6r + 12$.
[Considerando que $x = 6r + 12$, ¿podemos expresar a x como $3 \cdot$ (algún entero)? Es decir, ¿es $6r + 12 = 3 \cdot$ (algún entero)? Sí, $6r + 12 = 3 \cdot (2r + 4)$.]

Sea $s = 2r + 4$.
[Debemos comprobar que s es un número entero.]

Entonces, s es un entero porque productos y sumas de enteros son enteros.
[Ahora debemos comprobar que $x = 3s$.]

También $3s = 3(2r + 4) = 6r + 12 = x$,
Así, por definición de B, x es un elemento de B,
[que es lo que se quería demostrar].

c. Refutar un enunciado significa mostrar que es falso y para demostrar que es falso que $B \subseteq A$, debe encontrar un elemento de B que no sea un elemento de A. Por las definiciones de A y B, esto significa que debe encontrar un entero x de la forma $3 \cdot$ (algún entero) que no se puede escribir en forma $6 \cdot$ (algún entero) $+ 12$. Un poco de experimentación revela que funcionan distintos números. Por ejemplo, puede hacer $x = 3$. Entonces $x \in B$ porque $3 = 3 \cdot 1$, pero $x \notin A$ porque no hay ningún entero r tal que $3 = 6r + 12$. Por si existiera dicho entero, entonces,

Nota Recuerde que la notación $P(x) \Rightarrow Q(x)$ significa que cada elemento que hace que $P(x)$ sea verdadero también hace que $Q(x)$ sea verdadero.

$$\begin{aligned} & 6r + 12 = 3 && \text{por suposición} \\ \Rightarrow\ & 2r + 4 = 1 && \text{dividiendo ambos lados por 3} \\ \Rightarrow\ & 2r = 3 && \text{restando 4 de ambos lados} \\ \Rightarrow\ & r = 3/2 && \text{dividiendo ambos lados por 2,} \end{aligned}$$

pero $3/2$ no es un entero. Por tanto, $3 \in B$ pero $3 \notin A$ y así $B \not\subseteq A$. ■

Igualdad de conjuntos

Recuerde que por el axioma de extensión, A y B son iguales si y sólo si, tienen exactamente los mismos elementos. Reiteramos esto como una definición que utiliza el idioma de los subconjuntos.

• Definición

Dados los conjuntos A y B, A **es igual a** B, que se escribe $\boldsymbol{A = B}$, si y sólo si, cada elemento de A está en B y cada elemento de B está en A.

Simbólicamente:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Esta versión de la definición de igualdad implica lo siguiente:

> Para decir que un conjunto A es igual a un conjunto B, se debe cumplir que $A \subseteq B$ y se debe cumplir que $B \subseteq A$.

Ejemplo 6.1.3 Igualdad de conjuntos

Se definen los conjuntos A y B de la siguiente manera:

$$A = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 2a \text{ para algún entero } a\}$$

$$B = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 2b - 2 \text{ para algún entero } b\}$$

¿es, $A = B$?

Solución Sí. Para probar esto, deben demostrarse ambas relaciones de subconjunto $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$.

Parte 1. Demostración de que $A \subseteq B$:

Suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de A.

[Debemos demostrar que $x \in B$. Por definición de B, esto significa que tenemos que demostrar que $x = 2 \cdot$ (algún entero) $- 2$.]

Por definición, de A, existe un entero tal que $x = 2a$.

[Dado que $x = 2a$, ¿también se puede expresar a x como $2 \cdot$ (algún entero) $- 2$? Es decir, ¿existe un número entero, digamos b, tal que $2a = 2b - 2$? Resuelva para b para obtener $b = (2a + 2)/2 = a + 1$. Compruebe para ver si esto funciona.]

Sea $b = a + 1$.

[Primero compruebe que b es un número entero.]

Entonces, b es un entero, ya que es una suma de números enteros.

[A continuación, compruebe que $x = 2b - 2$.]

También $2b - 2 = 2(a + 1) - 2 = 2a + 2 - 2 = 2a = x$,

Así, por definición de B, x es un elemento de B

[que es lo que se quería demostrar].

Parte 2. Demostración de que $B \subseteq A$: Esta parte de la demostración se deja como ejercicio 2 al final de esta sección. ■

Diagramas de Venn

Real sociedad de Londres

John Venn
(1834-1923)

Si los conjuntos A y B se representan como regiones en el plano, las relaciones entre A y B se pueden representar por dibujos, llamados **diagramas de Venn**, que fueron introducidos por el matemático británico John Venn en 1881. Por ejemplo, la relación $A \subseteq B$ se puede representar en una de las dos formas, que se muestran en la figura 6.1.1.

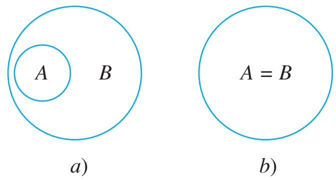


Figura 6.1.1 $\quad A \subseteq B$

La relación $A \nsubseteq B$ se puede representar de tres formas diferentes con diagramas de Venn, como se muestra en la figura 6.1.2.

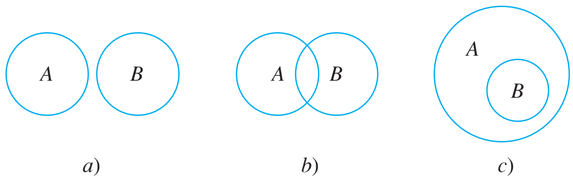


Figure 6.1.2 $\quad \boldsymbol{A \nsubseteq B}$

Si permitimos la posibilidad de que algunas subregiones de los diagramas de Venn no contengan ningún punto, entonces, la figura 6.1.1 diagrama *b*) se puede ver como un caso especial de *a*) si imaginamos que la parte de B fuera de A no contiene ningún punto. Del mismo modo, los diagramas *a*) y *c*) de figura 6.1.2 se pueden ver como casos especiales del diagrama *b*). Para obtener *a*) de *b*), imagine que la región que se superpone entre A y B no contiene ningún punto. Para obtener *c*), imagine que la parte de B que se encuentra fuera de A no contiene ningún punto. Sin embargo, en todos los tres diagramas sería necesario especificar que hay un punto en A que no está en B.

Ejemplo 6.1.4 Relaciones entre conjuntos de números

Dado que $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ son los conjuntos de los números enteros, números racionales y números reales, respectivamente, $\mathbf{Z}$ es un subconjunto de $\mathbf{Q}$ porque cada entero es racional (cualquier entero n se puede escribir en la forma $\frac{n}{1}$) y $\mathbf{Q}$ es un subconjunto de $\mathbf{R}$ porque cualquier número racional es real (cualquier número racional se puede representar como una longitud en la recta numérica). $\mathbf{Z}$ es un subconjunto propio de $\mathbf{Q}$ porque hay números racionales que no son enteros (por ejemplo, $\frac{1}{2}$) y $\mathbf{Q}$ es un subconjunto propio de $\mathbf{R}$ porque hay números reales que no son racionales (por ejemplo, $\sqrt{2}$). En la figura 6.1.3, esto se muestra con diagramas.

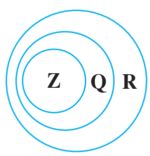


Figura 6.1.3

Operaciones con conjuntos

La mayoría de los análisis matemáticos se realizan dentro de algún contexto. Por ejemplo, en una determinada situación todos los conjuntos que se consideran podrían ser conjuntos de números reales. En esta situación, para este análisis el conjunto de números reales se llamaría el **conjunto universo** o **universo del discurso**.

• Definición

Sean A y B subconjuntos de un conjunto universo U.

1. La **unión** de A y B, que se denota por $\boldsymbol{A \cup B}$, es el conjunto de todos los elementos que se encuentran en al menos uno de A o B.
2. La **intersección** de A y B, que se denota por $\boldsymbol{A \cap B}$, es el conjunto de todos los elementos que son comunes a ambos, a A y a B.
3. La **diferencia** de B menos A (o **complemento relativo** de A en B), que se denota por $\boldsymbol{B - A}$, es el conjunto de todos los elementos que se encuentran en B y que no están en A.
4. El **complemento** de A, que se denota por $\boldsymbol{A^c}$, es el conjunto de todos los elementos en U que no están en A.

Simbólicamente:

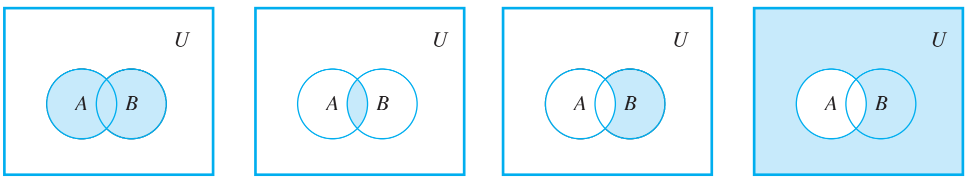
$$A \cup B = \{x \in U \,|\, x \in A \text{ o } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in U \,|\, x \in A \text{ y } x \in B\},$$
$$B - A = \{x \in U \,|\, x \in B \text{ y } x \notin A\},$$
$$A^c = \{x \in U \,|\, x \notin A\}.$$

Stock Montage

Giuseppe Peano (1858-1932)

Los símbolos $\in$, $\cup$ y $\cap$ se introdujeron en 1889 por el matemático italiano Giuseppe Peano.

En la figura 6.1.4, se muestran las representaciones del diagrama de Venn para la unión, intersección, diferencia y complemento.



La región sombreada representa $A \cup B$. La región sombreada representa $A \cap B$. La región sombreada representa $B - A$. La región sombreada representa A^c.

Figura 6.1.4

Ejemplo 6.1.5 Uniones, intersecciones, diferencias y complementos

Sea el conjunto universo, el conjunto $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y sea $A = \{a, c, e, g\}$ y $B = \{d, e, f, g\}$. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$ y A^c.

Solución

$$A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\} \qquad A \cap B = \{e, g\}$$
$$B - A = \{d, f\} \qquad A^c = \{b, d, f\}$$

■

Una notación conveniente para subconjuntos de los números reales son los intervalos.

• Notación

Dados los números reales a y b con $a \leq b$:

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\} \qquad [a,\ b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\} \qquad [a,\ b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Los símbolos ∞ y $-\infty$ se utilizan para indicar intervalos no acotados ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\} \qquad [a, \infty) \ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\} \qquad [-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}.$$

Nota El símbolo ∞ no representa un número. Sólo indica lo ilimitado del intervalo.

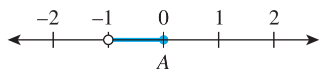
Observe que la notación para el intervalo (a, b) es idéntica a la notación para el par ordenado (a, b). Sin embargo, el contexto hace que no se puedan confundir.

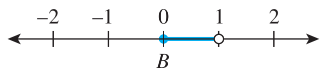
Ejemplo 6.1.6 Un ejemplo con intervalos

Sea el conjunto universo el conjunto $\mathbf{R}$ de todos los números reales y sea

$$A = (-1, 0] = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leq 0\} \text{ y } B = [0, 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < 1\}.$$

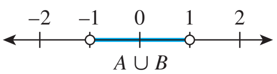
Estos conjuntos se muestran en las rectas numéricas que se presentan a continuación



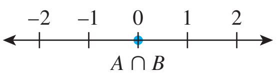


Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$ y A^c.

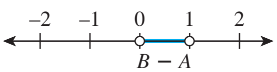
Solución

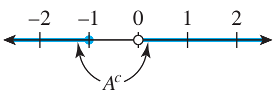


$$A \cup B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in (-1, 0] \text{ o } x \in [0, 1)\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in (-1, 1)\} = (-1, 1).$$



$$A \cap B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in (-1, 0] \text{ y } x \in [0, 1)\} = \{0\}.$$





$$B - A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in [0, 1) \text{ y } x \notin (-1, 0]\} = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\} = (0, 1)$$

$$\begin{aligned} A^c &= \{x \in \mathbf{R} \mid \text{este no es el caso que } x \in (-1, 0]\} \\ &= \{x \in \mathbf{R} \mid \text{este no es el caso que } (-1 < x \text{ y } x \leq 0)\} && \text{por definición de la doble desigualdad} \\ &= \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq -1 \text{ o } x > 0\} = \{-\infty, -1] \cup (0, \infty) && \text{por las leyes de De Morgan} \end{aligned}$$

■

Las definiciones de uniones e intersecciones para más de dos conjuntos son muy similares a las definiciones de dos conjuntos.

• Definición

Uniones e intersecciones de una colección indexada de conjuntos

Dados los conjuntos de $A_0, A_1, A_2, \ldots$ que son subconjuntos de un conjunto universo U y dado un número entero no negativo n,

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para al menos una } i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para al menos un entero no negativo } i\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para todo } i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para todo enteros no negativos } i\}.$$

Nota $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ se lee "la unión de A-subíndice i desde i igual a cero hasta n".

Una notación alternativa para $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ es $A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$ y una notación alternativa para $\bigcap_{i=0}^{n} A_i$ es $A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n$.

Ejemplo 6.1.7 Determinación de uniones e intersecciones de más de dos conjuntos.

Para cada entero positivo i sea $A_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\right\} = A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$.

a. Determine $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ y $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

b. Determine $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Solución

a. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ está en al menos uno de los intervalos } (-1, 1), \text{ o } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ o } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$

$= \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 1\}$ ya que todos los elementos en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ están en $(-1, 1)$

$= (-1, 1)$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ está en todos los intervalos } (-1, 1), \text{ y } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$

$= \left\{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\right\}$ porque $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \subseteq \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subseteq (-1, 1)$

$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

b. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ está en al menos uno de los intervalos } \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right), \text{ donde } i \text{ es un entero positivo}\right\}$

$= \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 1\}$ porque todos los elementos de cada intervalo $\left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$ están en $(-1, 1)$

$= (-1, 1)$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ está en todos los intervalos } \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right), \text{ donde } i \text{ es un entero positivo}\right\}$

$= \{0\}$ ya que el único elemento en cada intervalo es 0

■

Conjunto vacío

Hemos establecido que un conjunto está definido por los elementos que lo componen. Si esto es así ¿puede existir un conjunto que no tenga elementos? Resulta que es conveniente contar con dicho conjunto. Por otra parte, cada vez que queríamos tomar la intersección de dos conjuntos o definir un conjunto especificando una propiedad, teníamos que comprobar que el resultado tuviera elementos y, por tanto, se clasificaría como un "conjunto cubierto". Por ejemplo, si $A = \{1, 3\}$ y $B = \{2, 4\}$, entonces $A \cap B$ no tiene elementos. Tampoco $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = -1\}$ ya que ningún número real tienen cuadrados negativos.

Es algo inquietante hablar de un conjunto sin elementos, pero en matemáticas a menudo ocurre que las definiciones formuladas para adaptarse a un conjunto cuyas circunstancias son satisfechas por algunos casos extremos no previstos originalmente. Pero cambiar las definiciones para excluir los casos perjudicará gravemente la simplicidad y elegancia de la teoría de conjuntos.

En la sección 6.2 se mostrarán que hay sólo un conjunto sin elementos. Ya que es único, podemos darle un nombre especial. Se le llama **conjunto vacío** (o **conjunto nulo**) y se denota por el símbolo $\emptyset$. Por tanto $\{1, 3\} \cap \{2, 4\} = \emptyset$ y $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset$.

Ejemplo 6.1.8 Un conjunto sin elementos

Describa el conjunto $D = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x < 2\}$.

Solución Recuerde que $a < x < b$ significa que $a < x$ y $x < b$. Por tanto D consiste en todos los números reales que son tanto mayores de 3 como menores de 2. Ya que no hay tales números, D no tiene elementos y así $D = \emptyset$. ■

Particiones de conjuntos

En muchas aplicaciones de la teoría de conjuntos, los conjuntos se dividen en piezas no superpuestas (o *disjuntas*). Esa división se llama una *partición*.

• **Definición**

Dos conjuntos se llaman **disjuntos** si y sólo si, no tienen elementos en común.
Simbólicamente:

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$$

Ejemplo 6.1.9 Conjuntos disjuntos

Sea $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. ¿Son A y B disjuntos?

Solución Sí. Por inspección de A y B no tienen elementos en común, o, en otras palabras, $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$. ■

• Definición

Sean $A_1, A_2, A_3\ldots$ **mutuamente disjuntos** (o por **pares disjuntos** que **no se superponen**) si y sólo si, ninguno de dos conjuntos A_i y A_j con subíndices distintos tienen elementos en común. Más precisamente, para toda $i, j = 1, 2, 3, \ldots$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ siempre que } i \neq j.$$

Ejemplo 6.1.10 Conjuntos mutuamente disjuntos

a. Sea $A_1 = \{3, 5\}$, $A_2 = \{1, 4, 6\}$ y $A_3 = \{2\}$. ¿Son A_1, A_2 y A_3 mutuamente disjuntos?

b. Sea $B_1 = \{2, 4, 6\}$, $B_2 = \{3, 7\}$ y $B_3 = \{4, 5\}$. ¿Son B_1, B_2, y B_3 mutuamente disjuntos?

Solución

a. Sí. A_1 y A_2 no tienen elementos en común, A_1 y A_3 no tienen elementos en común y A_2 y A_3 no tienen elementos en común.

b. No. B_1 y B_3 contienen ambos al 4. ■

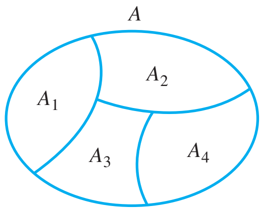


Figura 6.1.5 Una partición de un conjunto

Suponga que A, A_1, A_2, A_3 y A_4, son los conjuntos de puntos representados por las regiones que se muestran en figura 6.1.5. Entonces, A_1, A_2, A_3 y A_4, son subconjuntos de A y $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Supongamos además que las cotas se asignan a las regiones que representan a A_2, A_3 y A_4, de tal manera que estos conjuntos son mutuamente disjuntos. Entonces A se le llama a una *unión de subconjuntos mutuamente disjuntos* y la colección de conjuntos $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ se dice que es una *partición* de A.

• Definición

Una colección finita o infinita de conjuntos no vacíos $\{A_1, A_2, A_3 \ldots\}$ es una **partición** de un conjunto A si y sólo si,

1. A es la unión de todo A_i,
2. Los conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son mutuamente disjuntos.

Ejemplo 6.1.11 Particiones de conjuntos

a. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$ y $A_3 = \{5, 6\}$. ¿Es $\{A_1, A_2, A_3\}$ una partición del A?

b. Sea $\mathbf{Z}$ el conjunto de todos los enteros y sea

$$T_0 = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 3k, \text{ para algunos enteros } k\},$$
$$T_1 = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 3k + 1, \text{ para algunos enteros } k\} \text{ y}$$
$$T_2 = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 3k + 2, \text{ para algunos enteros } k\}.$$

¿Es $\{T_0, T_1, T_2\}$ una partición de $\mathbf{Z}$?

Solución

a. Sí. Por inspección, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ y los conjuntos A_1, A_2, A_3 son mutuamente disjuntos.

b. Sí. Por el teorema de cociente-residuo, cada entero n se puede representar en exactamente una de las tres formas

$$n = 3k \quad \text{o} \quad n = 3k + 1 \quad \text{o} \quad n = 3k + 2,$$

para algún entero k. Esto implica que ningún entero puede estar en cualquiera de dos de los conjuntos T_0, T_1 o T_2. Por lo que T_0, T_1 y T_2 son mutuamente disjuntos. También implica que cada número entero está en uno de los conjuntos T_0, T_1 o T_2. Así $\mathbf{Z} = T_0 \cup T_1 \cup T_2$. ■

Conjunto potencia

Existen diversas situaciones en que es útil considerar al conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado. El **axioma del conjunto potencia** garantiza que se trata de un conjunto.

• Definición

Dado un conjunto A, el **conjunto potencia** de A, que se denota con $\mathscr{P}$ **(A)**, es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

Ejemplo 6.1.12 Conjunto potencia de un conjunto

Determine el conjunto potencia del conjunto $\{x, y\}$. Es decir, encuentre $\mathscr{P}(\{x, y\})$.

Solución $\mathscr{P}(\{x, y\})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{x, y\}$. En la sección 6.2 se mostrará que $\emptyset$ es un subconjunto de cada conjunto y por tanto $\emptyset \in \mathscr{P}(\{x, y\})$. También cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo, así $\{x, y\} \in \mathscr{P}(\{x, y\})$. Los únicos otros subconjuntos de $\{x, y\}$ son $\{x\}$ y $\{y\}$, por lo que

$$\mathscr{P}(\{x, y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{\{x, y\}\}$$ ■

Productos cartesianos

Recuerde que la definición de un conjunto no se ve afectada por el orden en el que se listan sus elementos o por el hecho de que algunos elementos pueden ser listados más de una vez. Por tanto $\{a, b\}$, $\{b, a\}$ y $\{a, a, b\}$ todos representan el mismo conjunto. La notación de una *n-tupla ordenada* es una generalización de la notación para un par ordenado. (Vea la sección 1.2.) Que considera tanto el orden como la multiplicidad.

• Definición

Sea n un entero positivo y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos (no necesariamente distintos). La ***n*-tupla ordenada** $(\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n})$, formada por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ junto con el orden: primero x_1, después, x_2 y así sucesivamente hasta x_n. Una 2-tupla se llama un **par ordenado** y una 3-tupla ordenada es una **tripleta ordenada**.

Dos n-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son **iguales** si y sólo si, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

Simbólicamente:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

En particular,

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ y } b = d.$$

Ejemplo 6.1.13 *n*-tuplas ordenadas

a. ¿Es $(1, 2, 3, 4) = (1, 2, 4, 3)$?

b. ¿Es $\left(3, (-2)^2, \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{9}, 4, \frac{3}{6}\right)$?

Solución

a. No. Por definición de igualdad de 4-tuplas ordenadas,

$$(1, 2, 3, 4) = (1, 2, 4, 3) \Leftrightarrow 1 = 1,\ 2 = 2,\ 3 = 4 \text{ y } 4 = 3$$

Pero $3 \neq 4$, por lo que las 4-tuplas ordenadas no son iguales.

b. Sí. Por definición de igualdad de tripletas ordenadas,

$$\left(3, (-2)^2, \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{9}, 4, \frac{3}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \sqrt{9} \text{ y } (-2)^2 = 4 \text{ y } \frac{1}{2} = \frac{3}{6},$$

Ya que estas ecuaciones son todas verdaderas, las dos tripletas ordenadas son iguales. ■

• Definición

Dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, el **producto cartesiano** de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que se denota por $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}$, es el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

Simbólicamente:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

En particular,

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \text{ y } a_2 \in A_2\}$$

es el producto cartesiano de A_1 y A_2.

Ejemplo 6.1.14 Productos cartesianos

Sea $A_1 = \{x, y\}$, $A_2 = \{1, 2, 3\}$ y $A_3 = \{a, b\}$.

a. Determine $A_1 \times A_2$. b. Determine $(A_1 \times A_2) \times A_3$. c. Determine $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Solución

a. $A_1 \times A_2 = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$

b. El producto cartesiano de A_1 y A_2 es un conjunto, por lo que se puede utilizar como uno de los conjuntos que constituyen otro producto cartesiano. Este es el caso para $(A_1 \times A_2) \times A_3$.

$$\begin{aligned}(A_1 \times A_2) \times A_3 &= \{(u, v) \mid u \in A_1 \times A_2 \text{ y } v \in A_3\} \quad \text{por definición de producto cartesiano}\\ &= \{((x, 1), a), ((x, 2), a), ((x, 3), a), ((y, 1), a),\\ &\quad ((y, 2), a), ((y, 3), a), ((x, 1), b), ((x, 2), b), ((x, 3), b),\\ &\quad ((y, 1), b), ((y, 2), b), ((y, 3), b)\}\end{aligned}$$

c. El producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3$ es superficialmente similar a, pero no es el mismo objeto matemático que $(A_1 \times A_2) \times A_3$. $(A_1 \times A_2) \times A_3$, es un conjunto de pares ordenados en el que uno de los elementos es en sí mismo un par ordenado, mientras que $A_1 \times A_2 \times A_3$ es un conjunto de tripletas Por definición de producto cartesiano,

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times A_3 &= \{(u, v, w) \mid u \in A_1\ v \in A_2 \text{ y } w \in A_3\} \\ &= \{(x, 1, a), (x, 2, a), (x, 3, a), (y, 1, a), (y, 2, a), \\ &\quad (y, 3, a), (x, 1, b), (x, 2, b), (x, 3, b), (y, 1, b), \\ &\quad (y, 2, b), (y, 3, b)\}. \end{aligned}$$

Un algoritmo para comprobar si un conjunto es un subconjunto de otro (opcional)

Puede obtener alguna información adicional acerca del concepto de subconjunto considerando un algoritmo para comprobar si un conjunto finito es un subconjunto de otro. Ordenar los elementos de ambos conjuntos y comparar sucesivamente cada elemento del primer conjunto con cada elemento del segundo conjunto. Si algún elemento del primer conjunto no se encuentra igual que cualquier elemento del segundo, entonces, el primer conjunto no es un subconjunto del segundo. Pero si cada elemento del primer conjunto se encuentra que es igual a un elemento del segundo conjunto, entonces el primer conjunto es un subconjunto del segundo. El siguiente algoritmo formaliza este razonamiento.

Algoritmo 6.1.1 Demostración de si $A \subseteq B$

[Las entradas de los conjuntos A y B se representan como matrices unidimensionales $a[1], a[2], \ldots, a[m]$ *y* $b[1], b[2], \ldots, b[n]$*, respectivamente. Comenzando con* $a[1]$ *y para cada sucesivo* $a[i]$ *en A, se hace una comprobación para ver si* $a[i]$ *está en B. Para esto,* $a[i]$ *se compara con los elementos sucesivos de B. Si* $a[i]$ *no es igual a cualquier elemento de B, entonces la respuesta es dar el valor de "*$A \not\subseteq B$*". Si* $a[i]$ *es igual a algún elemento de B, el siguiente elemento sucesivo en A se comprueba para ver si está en B. Si cada elemento sucesivo de A se encuentra que está en B, entonces la respuesta nunca cambia de su valor inicial "*$A \subseteq B$*".]*

Entrada: *m [un entero positivo],* $a[1], a[2], \ldots, a[m]$ *[una matriz unidimensional que representa al conjunto A], n [es un entero positivo],* $b[1], b[2], \ldots, b[n]$ *[una matriz unidimensional que representa al conjunto B]*

Cuerpo del algoritmo:

$i := 1$, *respuesta* := "$A \subseteq B$"

while ($i \leq m$ y *respuesta* = "$A \subseteq B$")

  $j := 1$, *se encuentra* := "no"

    while ($j \leq n$ y *se encuentra* = "no")

      if $a[i] = b[j]$ **then** *se encuentra* := "sí"

      $j := j + 1$

    end while

    [Si se encuentra que no ha dado el valor "si" cuando la ejecución alcanza este punto, entonces $a[i] \notin B$*.]*

    if *se encuentra* = "no" **then** *respuesta* := "$A \subseteq B$"

    $i := i + 1$

end while

Salida: *respuesta [una cadena]*

Ejemplo 6.1.15 Seguimiento del algoritmo 6.1.1

Siga la acción del algoritmo 6.1.1 en las variables i, j, *se encuentra* y *respuesta* para $m = 3$, $n = 4$ y los conjuntos A y B se representan como los arreglos $a[1] = u$, $a[2] = v$, $a[3] = w$, $b[1] = w$, $b[2] = x$, $b[3] = y$ y $b[4] = u$.

Solución

i	1					2					3
j	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
se encuentra	no			sí		no					
respuesta	$A \subseteq B$									$A \not\subseteq B$	

■

En los ejercicios al final de esta sección, se le pide que escriba un algoritmo para comprobar si un elemento dado está en un conjunto dado. Para hacer esto, puede representar al conjunto como un arreglo unidimensional y compare el elemento dado con los elementos sucesivos del arreglo para determinar si los dos elementos son iguales. Si es así, entonces el elemento está en el conjunto; si el elemento dado no es igual a cualquier elemento de la matriz, entonces, el elemento no está en el conjunto.

Autoexamen

Las respuestas del autoexamen se encuentran al final de cada sección.

1. La notación $A \subseteq B$ se lee "_____" y significa que _____.
2. Para utilizar un elemento de argumento para demostrar que un conjunto X es un subconjunto de un conjunto Y, suponga que _____ y demuestre que _____.
3. Para refutar que un conjunto X es un subconjunto de un conjunto Y, muestre que existe _____.
4. Un elemento x está en $A \cup B$ si y sólo si, _____.
5. Un elemento x está en $A \cap B$ si y sólo si, _____.
6. Un elemento x está en $B - A$ si y sólo si, _____.
7. Un elemento x está en A^c si y sólo si, _____.
8. El conjunto vacío es un conjunto con _____.
9. El conjunto potencia de un conjunto A es _____.
10. Los conjuntos A y B son disjuntos si y sólo si, _____.
11. Una colección de conjuntos no vacíos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es una partición de un conjunto A si y sólo si, _____.
12. Dados los conjuntos de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es _____.

Conjunto de ejercicios 6.1*

1. ¿En cada uno de los ejercicios *a*) al *f*), responda las preguntas siguientes: ¿es $A \subseteq B$? ¿Es $B \subseteq A$? ¿Es ya sea A o B un subconjunto propio del otro?

   a. $A = \{2, \{2\}, (\sqrt{2})^2\}$, $B = \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$

   b. $A = \{3, \sqrt{5^2 - 4^2}, 24 \, mod \, 7\}$, $B = \{8 \, mod \, 5\}$

   c. $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

   d. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

   e. $A = \{\sqrt{16}, \{4\}\}$, $B = \{4\}$

   f. $A = \{x \in \mathrm{R} \mid \cos x \in \mathrm{Z}\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid \operatorname{sen} x \in \mathbf{Z}\}$

2. Complete la demostración del ejemplo 6.1.3: demuestre que $B \subseteq A$ donde

$$A = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 2a \text{ para algún entero } a\}$$

y

$$B = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 2b - 2 \text{ para algún entero } b\}$$

*Para los ejercicios con números o letras azules, las soluciones están dadas en el apéndice B. El símbolo ***H*** indica que sólo se da una sugerencia o una solución parcial. El símbolo ✶ indica que el ejercicio es más difícil de lo normal.

3. Sean los conjuntos R, S y T definidos de la siguiente manera:

$$R = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ es divisible por } 2\}$$
$$S = \{y \in \mathbf{Z} \mid y \text{ es divisible por } 3\}$$
$$T = \{z \in \mathbf{Z} \mid z \text{ es divisible por } 6\}$$

   a. ¿Es $R \subseteq T$? Explique.
   b. ¿Es $T \subseteq R$? Explique.
   c. ¿Es $T \subseteq S$? Explique.

4. Sea $A = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 5r$ para algún entero $r\}$ y $B = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 20s$ para algún entero $s\}$.
   a. ¿Es $A \subseteq B$? Explique. b. ¿Es $B \subseteq A$? Explique.

5. Sea $C = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 6r - 5$ para algún entero $r\}$ y $D = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 3s + 1$ para algún entero $s\}$.
   Demuestre o refute cada uno de los siguientes enunciados.
   a. $C \subseteq D$ b. $D \subseteq C$.

6. Sea $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 5a + 2$ para algún entero $a\}$, $B = \{y \in \mathbf{Z} \mid y = 10b - 3$ para algún entero $b\}$ y $C = \{z \in \mathbf{Z} \mid z = 10c + 7$ para algún entero $c\}$.
   Demuestre o refute cada uno de los siguientes enunciados.
   a. $A \subseteq B$ b. $B \subseteq A$. *H* c. $B = C$.

7. Sea $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 6a + 4$ para algún entero $a\}$, $B = \{y \in \mathbf{Z} \mid y = 18b - 2$ para algún entero $b\}$ y $C = \{z \in \mathbf{Z} \mid z = 18c + 16$ para algún entero $c\}$.
   Demuestre o refute cada uno de los siguientes enunciados.
   a. $A \subseteq B$ b. $B \subseteq A$. c. $B = C$.

8. Describa con palabras cómo leer cada uno de los siguientes enunciados. A continuación, escriba la notación abreviada para cada conjunto.
   a. $\{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$
   b. $\{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$
   c. $\{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$
   d. $\{x \in U \mid x \notin A\}$

9. Complete los siguientes enunciados sin utilizar los símbolos $\cup$, $\cap$, o $-$.
   a. $x \notin A \cup B$ si y sólo si, ________.
   b. $x \notin A \cap B$ si y sólo si, ________.
   c. $x \notin A - B$ si y sólo si, ________.

10. Sea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 6, 9\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Determine cada uno de los siguientes enunciados:
    a. $A \cup B$ b. $A \cap B$ c. $A \cup C$ d. $A \cap C$
    e. $A - B$ f. $B - A$ g. $B \cup C$ h. $B \cap C$

11. Sea el conjunto universo, el conjunto $\mathbf{R}$ de todos los números reales y sea $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \le 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \le x < 4\}$ y $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 \le x < 9\}$. Determine cada uno de los siguientes enunciados:
    a. $A \cup B$ b. $A \cap B$ c. A^c d. $A \cup C$
    e. $A \cap C$ f. B^c g. $A^c \cap B^c$
    h. $A^c \cup B^c$ i. $(A \cap B)^c$ j. $(A \cup B)^c$

12. Sea el conjunto universo, el conjunto $\mathbf{R}$ de todos los números reales y sea $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \le x \le 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 2\}$ y $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x \le 8\}$. Determine cada uno de los siguientes enunciados:
    a. $A \cup B$ b. $A \cap B$ c. A^c d. $A \cup C$
    e. $A \cap C$ f. B^c g. $A^c \cap B^c$
    h. $A^c \cup B^c$ i. $(A \cap B)^c$ j. $(A \cup B)^c$

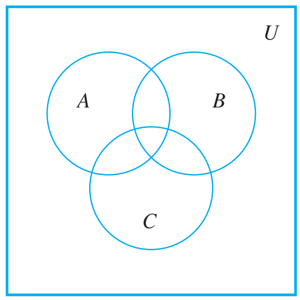
13. Indique cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas y cuáles son falsas:
    a. $\mathbf{Z}^+ \subseteq \mathbf{Q}$ b. $\mathbf{R}^- \subseteq \mathbf{Q}$
    c. $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$ d. $\mathbf{Z}^- \cup \mathbf{Z}^+ = \mathbf{Z}$
    e. $\mathbf{Z}^- \cap \mathbf{Z}^+ = \emptyset$ f. $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R} = \mathbf{Q}$
    g. $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Q}$ h. $\mathbf{Z}^+ \cap \mathbf{R} = \mathbf{Z}^+$
    i. $\mathbf{Z} \cup \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$

14. Para cada uno de los siguientes enunciados, dibuje un diagrama de Venn para los conjuntos A, B y C que satisface las condiciones dadas:
    a. $A \subseteq B$; $C \subseteq B$; $A \cap C = \emptyset$
    b. $C \subseteq A$; $B \cap C = \emptyset$

15. Dibuje los diagramas de Venn para describir los conjuntos A, B y C que satisfacen las condiciones dadas.
    a. $A \cap B = \emptyset$, $A \subseteq C$, $C \cap B \ne \emptyset$
    b. $A \subseteq B$, $C \subseteq B$, $A \cap C \ne \emptyset$
    c. $A \cap B \ne \emptyset$, $B \cap C \ne \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $A \nsubseteq B$, $C \nsubseteq B$

16. Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$ y $C = \{b, c, e\}$.
    a. Determine $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?
    b. Determine $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup C$ y $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?
    c. Determine $(A - B) - C$, $A - (B - C)$. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?

17. Considere el diagrama de Venn que se muestra a continuación. Para cada uno de los enunciados del *a*) al *f*), copie el diagrama y sombree la región correspondiente al conjunto indicado.
    a. $A \cap B$ b. $B \cup C$ c. A^c
    d. $A - (B \cup C)$ e. $(A \cup B)^c$ f. $A^c \cup B^c$



18. a. ¿Está el número 0 en $\emptyset$? ¿Por qué?
    b. ¿Es $\emptyset = \{\emptyset\}$? ¿Por qué?
    c. ¿Es $\emptyset \in \{\emptyset\}$? ¿Por qué?
    d. ¿Es $\emptyset \in \emptyset$? ¿Por qué?

19. Sea $A_i = \{i, i^2\}$ para todo entero $i = 1, 2, 3, 4$.
    a. ¿$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 =$?
    b. ¿$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 =$?
    c. ¿Son A_1, A_2, A_3 y A_4 mutuamente disjuntos? Explique.

20. Sea $B_i = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le i\}$ para todo entero $i = 1, 2, 3, 4$.
    a. ¿$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 =$?
    b. ¿$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 =$?
    c. ¿Son B_1, B_2, B_3 y B_4 mutuamente disjuntos? Explique.

21. Sea $C_i = \{i, -i\}$ para todo entero no negativo i.
    a. $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{4} C_i = ?$ b. $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{4} C_i = ?$

c. ¿Son $C_0, C_1, C_2, \ldots$ mutuamente disjuntos? Explique.

d. $\bigcup_{i=0}^{n} C_i = ?$ e. $\bigcap_{i=0}^{n} C_i = ?$

f. $\bigcup_{i=0}^{\infty} C_i = ?$ g. $\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i = ?$

22. Sea $D_i = \{x \in \mathbf{R} \mid -i \le x \le i\} = [-i, i]$ para todo entero no negativo i.

a. $\bigcup_{i=0}^{4} D_i = ?$ b. $\bigcap_{i=0}^{4} D_i = ?$

c. ¿Son $D_0, D_1, D_2, \ldots$ mutuamente disjuntos? Explique.

d. $\bigcup_{i=0}^{n} D_i = ?$ e. $\bigcap_{i=0}^{n} D_i = ?$

f. $\bigcup_{i=0}^{\infty} D_i = ?$ g. $\bigcap_{i=0}^{\infty} D_i = ?$

23. Sea $V_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{i} \le x \le \frac{1}{i}\right\} = \left[-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right]$ para todo entero positivo i.

a. $\bigcup_{i=1}^{4} V_i = ?$ b. $\bigcap_{i=1}^{4} V_i = ?$

c. ¿Son $V_1, V_2, V_3, \ldots$ mutuamente disjuntos? Explique.

d. $\bigcup_{i=1}^{n} V_i = ?$ e. $\bigcap_{i=1}^{n} V_i = ?$

f. $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = ?$ g. $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = ?$

24. Sea $W_i = \{x \in \mathbf{R} \mid x > i\} = (i, \infty)$ para todo entero no negativo i.

a. $\bigcup_{i=0}^{4} W_i = ?$ b. $\bigcap_{i=0}^{4} W_i = ?$

c. ¿Son $W_0, W_1, W_2, \ldots$ mutuamente disjuntos? Explique.

d. $\bigcup_{i=0}^{n} W_i = ?$ e. $\bigcap_{i=0}^{n} W_i = ?$

f. $\bigcup_{i=0}^{\infty} W_i = ?$ g. $\bigcap_{i=0}^{\infty} W_i = ?$

25. Sea $R_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid 1 \le x \le 1 + \frac{1}{i}\right\} = \left[1, 1 + \frac{1}{i}\right]$ para todo entero positivo i.

a. $\bigcup_{i=1}^{4} R_i = ?$ b. $\bigcap_{i=1}^{4} R_i = ?$

c. ¿Son $R_1, R_2, R_3, \ldots$ mutuamente disjuntos? Explique.

d. $\bigcup_{i=1}^{n} R_i = ?$ e. $\bigcap_{i=1}^{n} R_i = ?$

f. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i = ?$ g. $\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = ?$

26. Sea $S_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 1 + \frac{1}{i}\right\} = \left(1, 1 + \frac{1}{i}\right)$ para todo entero positivo i.

a. $\bigcup_{i=1}^{4} S_i = ?$ b. $\bigcap_{i=1}^{4} S_i = ?$

c. ¿Son $S_1, S_2, S_3, \ldots$ mutuamente disjuntos? Explique.

d. $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = ?$ e. $\bigcap_{i=1}^{n} S_i = ?$

f. $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = ?$ g. $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = ?$

27. **a.** ¿Es $\{\{a, d, e\}, \{b, c\}, \{d, f\}\}$ una partición de $\{a, b, c, d, e, f\}$?
b. ¿Es $\{\{w, x, v\}, \{u, y, q\}, \{p, z\}\}$ una partición de $\{p, q, u, v, w, x, y, z\}$?
c. ¿Es $\{\{5, 4\}, \{7, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{6, 8\}\}$ una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?
d. ¿Es $\{\{3, 7, 8\}, \{2, 9\}, \{1, 4, 5\}\}$ una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?
e. ¿Es $\{\{1, 5\}, \{4, 7\}, \{2, 8, 6, 3\}\}$ una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

28. Sea E el conjunto de todos los enteros pares y O el conjunto de todos los enteros impares. ¿Es $\{E, O\}$ una partición de $\mathbf{Z}$, el conjunto de todos los enteros? Explique su respuesta.

29. Sea $\mathbf{R}$ es el conjunto de todos los números reales. ¿Es $\{\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-, \{0\}\}$ una partición de $\mathbf{R}$? Explique su respuesta.

30. Sea $\mathbf{Z}$ el conjunto de todos los enteros y sea

$A_0 = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 4k$, para algún entero $k\}$,
$A_1 = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 4k + 1$, para algún entero $k\}$,
$A_2 = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 4k + 2$, para algún entero $k\}$ y
$A_3 = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 4k + 4$, para algún entero $k\}$.

¿Es $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ una partición de $\mathbf{Z}$? Explique su respuesta.

31. Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$. Determine cada uno de los siguientes enunciados
a. $\mathscr{P}(A \cap B)$ b. $\mathscr{P}(A)$
c. $\mathscr{P}(A \cup B)$ d. $\mathscr{P}(A \times B)$

32. **a.** Suponga que $A = \{1\}$ y $B = \{u, v\}$. Encuentre $\mathscr{P}(A \times B)$
b. Suponga que $X = \{a, b\}$ y $Y = \{x, y\}$. Determine $\mathscr{P}(X \times Y)$.

33. a. Determine $\mathscr{P}(\emptyset)$. **b.** Encuentre $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))$.
c. Determine $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))$.

34. Sea $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{u, v\}$, $A_3 = \{m, n\}$. Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos:
a. $A_1 \times (A_2 \times A_3)$ b. $(A_1 \times A_2) \times A_3$
c. $A_1 \times A_2 \times A_3$

35. Sea $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{2, 3\}$. Determine cada uno de los siguientes conjuntos.
a. $A \times (B \cup C)$ **b.** $(A \times B) \cup (A \times C)$
c. $A \times (B \cap C)$ d. $(A \times B) \cap (A \times C)$

36. Siga la acción del algoritmo 6.1.1 sobre las variables i, j, *se encuentra* y *respuesta* para $m = 3$, $n = 3$ y los conjuntos A y B representados por los arreglos $a[1] = u$, $a[2] = v$, $a[3] = w$, $b[1] = w$, $b[2] = u$ y $b[3] = v$.

37. Siga la acción del algoritmo 6.1.1 sobre las variables i, j, *se encuentra* y *respuesta* para $m = 4$, $n = 4$ y los conjuntos A y B representados por los arreglos $a[1] = u$, $a[2] = v$, $a[3] = w$, $a[4] = x$, $b[1] = r$, $b[2] = u$, $b[3] = y$, $b[4] = z$.

38. Escriba un algoritmo para determinar si un elemento x pertenece a un conjunto dado, representado como un arreglo $a[1], a[2], \ldots, a[n]$.

Respuestas del autoexamen

1. el conjunto A es un subconjunto del conjunto B; para toda x, si $x \in A$, entonces, $x \in B$ (O: cada elemento de A es también un elemento de B) 2. x es cualquier elemento *[particular arbitrariamente elegido]* de X; x es un elemento de Y 3. un elemento en X que no está en Y 4. x está en A o x está en B (O: x está en al menos uno de los conjuntos A y B) 5. x está en A y x está en B (O: x está tanto en A como en B) 6. x está en B y x no está en A 7. x está en el conjunto universo y no está en A 8. no hay elementos 9. el conjunto de todos los subconjuntos de A 10. $A \cap B = \emptyset$ (O: A y B no tienen elementos en común) 11. A está en la unión de todos los conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ cada vez que $i \neq j$. 12. el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde a_i está en A_i para todo $i = 1, 2, \ldots, n$

6.2 Propiedades de conjuntos

... sólo el último renglón es un teorema verdadero —aquí todo lo demás es fantasía.
—Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach,* 1979

Es posible enumerar muchas relaciones que involucran uniones, intersecciones, complementos y diferencias de conjuntos. Algunas de éstas son verdaderas para todos los conjuntos, mientras que otros no se conservan en algunos casos. En esta sección mostramos cómo establecer propiedades básicas de los conjuntos usando *argumentos de los elementos* y analizando una variación que se utiliza para probar que un conjunto está vacío. En la siguiente sección se mostrarán cómo refutar una propiedad de conjunto propuesta mediante la construcción de un contraejemplo y cómo utilizar una técnica algebraica para deducir nuevas propiedades del conjunto a partir de la definición de propiedades de conjuntos que ya se sabe que son verdaderas.

Empezamos por listar algunas propiedades que implican relaciones de subconjunto. Conforme las lea, considere que las operaciones de unión, intersección y diferencia tienen preferencia sobre la inclusión del conjunto. Así, por ejemplo, $A \cap B \subseteq C$ significa $(A \cap B) \subseteq C$.

Teorema 6.2.1 Algunas relaciones de subconjuntos

1. *Inclusión de intersección*: Para todos los conjuntos A y B,

$$a)\ A \cap B \subseteq A \quad \text{y} \quad b)\ A \cap B \subseteq B.$$

2. *Inclusión en la unión*: Para todos los conjuntos A y B,

$$a)\ A \subseteq A \cup B \quad \text{y} \quad b)\ B \subseteq A \cup B.$$

3. *Propiedad transitiva de subconjuntos*: Para todos los conjuntos A, B y C,

$$\text{si } A \subseteq B \text{ y } B \subseteq C, \text{ entonces } A \subseteq C.$$

La conclusión de cada inciso del teorema 6.2.1 establece que un conjunto x es un subconjunto de otro conjunto Y y para demostrarlos, suponga que x es cualquier elemento *[particular arbitrariamente elegido]* de X y demuestre que x es un elemento de Y.

En la mayoría de las demostraciones de las propiedades de conjuntos, el secreto de obtener la suposición de que x está en X a la conclusión de que x está en Y es pensar en términos de las definiciones de las operaciones básicas de conjuntos. Por ejemplo, la unión de conjuntos X y Y, $X \cup Y$, se define como

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ o } x \in Y\}.$$

Esto significa que en cualquier momento se sabe que un elemento x está en $X \cup Y$, por lo que puede concluir que x debe estar en X *o* x debe estar en Y. Inversamente, en cualquier momento se sabe que un x dado está en algún conjunto X o está en algún conjunto Y, así que se puede concluir que x está en $X \cup Y$. Así, para cualesquiera conjuntos X y Y y cualquier elemento x,

$$x \in X \cup Y \quad \text{si y sólo si,} \quad x \in X \text{ o } x \in Y.$$

Versiones procesadas de las definiciones de las demás operaciones de conjunto se deducen similarmente y se resumen a continuación.

Versiones procesadas de las definiciones de conjunto

Sean X y Y subconjuntos de un conjunto universo U y supongamos que x y y son elementos de U.

1. $x \in X \cup Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X$ o $x \in Y$
2. $x \in X \cap Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X$ y $x \in Y$
3. $x \in X - Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X$ o $x \notin Y$
4. $x \in X^c \quad \Leftrightarrow \quad x \notin X$
5. $(x, y) \in X \times Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X$ y $y \in Y$

Ejemplo 6.2.1 Demostración de una relación de subconjunto

Demuestre el teorema 6.2.1(l)*a*): Para todos los conjuntos A y B $A \cap B \subseteq A$.

Solución Comenzamos por dar una demostración del enunciado y, después se explica cómo puede usted obtener una demostración.

Demostración:

Suponga que A y B son conjuntos cualesquiera y suponga que x es cualquier elemento de $A \cap B$. Entonces $x \in A$ y $x \in B$ por definición de intersección. En particular, $x \in A$. Por tanto, $A \cap B \subseteq A$.

La estructura subyacente de esta demostración no es difícil, pero es más complicada de lo que sugiere la brevedad de la demostración. Lo importante primero es darse cuenta de que el enunciado a demostrar es universal (éste dice que para *todos* los conjuntos A y B, $A \cap B \subseteq A$). La demostración, por tanto, tiene el siguiente esquema:

Punto de partida: Supongamos que A y B son conjuntos cualesquiera (particulares arbitrariamente elegidos).

Para demostrar: $A \cap B \subseteq A$,
Ahora para demostrar que $A \cap B \subseteq A$, debe demostrar que

$$\forall x, \text{ si, } x \in A \cap B \text{ entonces } x \in A.$$

Pero este enunciado también es universal. Así, para demostrarlo,

suponga que x es un elemento en $A \cap B$

y, después,

demuestre que x está en A.

Completar los pasos entre "suponga" y "demuestre" es fácil si utiliza la versión procesada de la definición de intersección: decir que x está en $A \cap B$ significa que

x está en A y x está en B.

Esto le permite finalizar la demostración al deducir que, en particular,

x está en A,

que era lo que se quería demostrar. Observe que esta deducción es sólo un caso especial de la forma de argumento válido

$$p \wedge q$$
$$\therefore p.$$

En su libro *Gödel, Escher, Bach*,* Douglas Hofstadter introduce la regla de fantasía de la demostración matemática. Hofstadter indica que al iniciar un argumento matemático con un *sí*, *sea* o *suponga*, está aumentando a un mundo de fantasía donde no son todos sólo hechos verdaderos en el mundo real, sino todo lo que está suponiendo es verdadero. Una vez que esté en ese mundo, puede suponer algo más. Que envía a un mundo de sub-fantasía donde no sólo todo está en el verdadero mundo de fantasía, sino también la cosa nueva que está suponiendo. Por supuesto puede continuar entrando en nuevos mundos de sub-fantasía de esta manera indefinidamente. Se vuelve a un nivel más cercano al mundo real cada vez que deduce una conclusión que forma todo un enunciado si-entonces o universal verdadero. Su objetivo en una demostración es continuar deduciendo dichas conclusiones hasta que vuelva al mundo desde el que hizo su primera suposición.

En ocasiones, los problemas matemáticos se establecen en la siguiente forma:

Suponga que (*enunciado* 1). Demuestre que (*enunciado* 2).

Cuando se utiliza esta expresión, el autor propone al lector agregar el enunciado 1 a su conocimiento matemático general y no hacer referencia explícita de esto en la demostración. En términos de Hofstadter, el autor invita al lector a entrar a un mundo de fantasía donde el enunciado 1 se conoce como verdadero y demostrar el enunciado 2 en este mundo de fantasía. Por tanto, el solucionador de tal problema comenzaría con una demostración con el punto de partida para una demostración del enunciado 2. Consideremos, por ejemplo, la siguiente reexpresión del ejemplo 6.2.1:

Supongamos que A y B son conjuntos arbitrariamente elegidos.
Demuestre $A \cap B \subseteq A$.

La demostración comenzará con "Suponga que $x \in A \cap B$" en el *entendido* de que A y B ya se han elegido arbitrariamente.

La demostración del ejemplo 6.2.1 se llama un argumento del elemento ya que muestra un conjunto que es un subconjunto de otro para demostrar que todos los elementos de un conjunto son también un elemento en el otro. En matemáticas superiores, los argumentos de los elementos son el método estándar para establecer relaciones entre conjuntos. A los estudiantes de secundaria a menudo se les permite justificar la definición de las propiedades usando diagramas de Venn. Este método es atractivo, pero ser matemáticamente riguroso puede ser más complicado que lo que se podría esperar. Los diagramas de Venn apropiados pueden dibujarse para dos o tres conjuntos, pero las explicaciones verbales necesarias para justificar las conclusiones inferidas a partir de ellos son normalmente tan largas como la prueba de un simple elemento.

En general, los diagramas de Venn no son muy útiles cuando el número de conjuntos es de cuatro o más. Por ejemplo, si se cumple el requisito de que un diagrama de Venn debe mostrar toda intersección posible de los conjuntos, es imposible dibujar un diagrama de Venn simétrico para cuatro conjuntos o, de hecho, para cualquier número de conjuntos no primo. En 2002, el equipo de científicos y matemáticos formado por Carla Savage, Jerrold Griggs y por el estudiante Charles Killian resolvieron un problema abierto desde hace mucho tiempo demostrando que es posible dibujar un diagrama de Venn simétrico para cualquier número primo de conjuntos. Sin embargo, para $n > 5$, las imágenes resultantes son ¡muy complicadas! La existencia de tales diagramas simétricos tiene aplicaciones en el área de ciencias de la computación llamado teoría de códigos.

***Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (Nueva York: Basic Books, 1979).

Identidades de conjuntos

Una **identidad** es una ecuación que es universalmente válida para todos los elementos de un conjunto. Por ejemplo, la ecuación $a + b = b + a$ es una identidad para números reales, porque es verdadera para todos los números reales a y b. La colección de propiedades del conjunto en el teorema siguiente consiste completamente de identidades de conjuntos. Es decir, son ecuaciones que son verdaderas en todos los conjuntos en algún conjunto universo.

Teorema 6.2.2 Identidades de conjuntos

Sean todos los conjuntos que se refieren a continuación subconjuntos de un conjunto universo U.

1. *Leyes conmutativas:* Para todos los conjuntos A y B,

$$a)\ A \cup B = B \cup A \quad \text{y} \quad b)\ A \cap B = B \cap A.$$

2. *Leyes asociativas:* Para todos los conjuntos A, B y C,

$$a)\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{y}$$
$$b)\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. *Leyes distributivas:* En todos los conjuntos, A, B y C,

$$a)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{y}$$
$$b)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. *Leyes de identidad:* Para todos los conjuntos A,

$$a)\ A \cup \emptyset = A \quad \text{y} \quad b)\ A \cap U = A.$$

5. *Leyes de complemento:*

$$a)\ A \cup A^c = U \quad \text{y} \quad b)\ A \cap A^c = \emptyset.$$

6. *Ley de complemento doble:* Para todos los conjuntos A,

$$(A^c)^c = A.$$

7. *Leyes de idempotencia:* Para todos los conjuntos A,

$$a)\ A \cup A = A \quad \text{y} \quad b)\ A \cap A = A.$$

8. *Leyes de universos acotados:* Para todos los conjuntos A,

$$a)\ A \cup U = U \quad \text{y} \quad b)\ A \cap \emptyset = \emptyset.$$

9. *Leyes de De Morgan:* Para todos los conjuntos A y B,

$$a)\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{y} \quad b)\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

10. *Leyes de absorción:* Para todos los conjuntos A y B,

$$a)\ A \cup (A \cap B) = A \quad \text{y} \quad b)\ A \cap (A \cup B) = A.$$

11. *Complementos de U y $\emptyset$:*

$$a)\ U^c = \emptyset \quad \text{y} \quad b)\ \emptyset^c = U.$$

12. *Ley de diferencia de conjuntos:* Para todos los conjuntos A y B,

$$A - B = A \cap B^c.$$

Demostración de identidades de conjunto

La conclusión de cada parte del teorema 6.2.2 es que un conjunto es igual a otro conjunto. Como notamos en la sección 6.1,

Dos conjuntos son iguales $\Leftrightarrow$ cada uno de ellos es un subconjunto del otro.

El método derivado de este hecho es el modo más básico para demostrar la igualdad de conjuntos.

> **Método básico para demostrar que los conjuntos son iguales**
>
> Sean los conjuntos X y Y. Para demostrar que $X = Y$:
>
> 1. Demuestre que $X \subseteq Y$.
> 2. Demuestre que $Y \subseteq X$.

Ejemplo 6.2.2 Demostración de una ley distributiva

Demuestre que para todos los conjuntos A, B y C,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Solución La demostración de este hecho es un poco más complicada que la demostración en el ejemplo 6.2.1, por lo que primero deduzca su estructura lógica, después encuentre los argumentos del núcleo y termine con una demostración formal como un resumen. Como en el ejemplo 6.2.1, el enunciado a ser probado es universal y por tanto, por el método de la generalización de lo particular a lo genérico, la demostración tiene el siguiente esquema:

Punto de partida: Supongamos que A, B y C son conjuntos arbitrariamente elegidos.

A demostrar: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ahora dos conjuntos son iguales si y sólo si, cada uno es un subconjunto del otro. Por tanto, deben demostrarse los siguientes dos enunciados:

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

y

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

Demostrar la primera expresión requiere demostrar que

$$\forall x, \text{ si } x \in A \cup (B \cap C) \text{ entonces } x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Demostrar la segunda expresión requiere demostrar que

$$\forall x, \text{ si } x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ entonces } x \in A \cup (B \cap C).$$

Observe que ambas instrucciones son universales. Por lo que para demostrar la primera expresión,

suponga que se tiene cualquier elemento x en $A \cup (B \cap C)$,

y después, **demuestre** que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Y para demostrar la segunda expresión,

suponga que se tiene cualquier elemento x en $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

y después, **demuestre** que: $x \in A \cup (B \cap C)$.

En la figura 6.2.1, la estructura de la demostración se ilustra por el tipo de diagrama que se utiliza a menudo en relación con programas estructurados. El análisis en el diagrama reduce la demostración a dos tareas concretas: complete los pasos indicados por puntos en los centros de los dos cuadros de la figura 6.2.1.

Suponga que A, B y C son conjuntos. *[Demuestre $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Es decir, demuestre $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.]*

> Demuestre $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. *[Es decir, demuestre que $\forall x$, si $x \in A \cup (B \cap C)$ entonces $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.]*
>
> > Suponga $x \in A \cup (B \cap C)$. *[Demuestre $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.]*
> >
> > $\vdots$
> >
> > Por lo que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
>
> Por tanto $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

> Demuestre $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. *[Es decir, demuestre que $\forall x$, si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ entonces $x \in A \cup (B \cap C)$.]*
>
> > Suponga $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. *[Demuestre $x \in A \cup (B \cap C)$.]*
> >
> > $\vdots$
> >
> > Por lo que $x \in A \cup (B \cap C)$.
>
> Por tanto $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Por lo que $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

Figura 6.2.1

Completar los pasos que faltan en el cuadro superior:

Para completar estos pasos, se irá de la suposición de que $x \in A \cup (B \cap C)$ a la conclusión de que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ahora cuando $x \in A \cup (B \cap C)$, entonces por definición de unión, $x \in A$ o $x \in (B \cap C)$. Pero cualquiera de estas posibilidades podrían ser el caso ya que se supone que x se elige arbitrariamente del conjunto de $A \cup (B \cap C)$. Así que hay que demostrar que puede llegar a la conclusión de que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ independientemente de si x se encuentra en A o x se encuentra en $B \cap C$. Esto conduce a separar su análisis en dos casos: $x \in A$ y $x \in (B \cap C)$.

En el caso $x \in A$, su objetivo es mostrar que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, que significa que $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$ (por definición de intersección). Pero cuando $x \in A$, ambos enunciados $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$ son verdaderos en virtud de x que se está en A.

Similarmente, para el caso de que $x \in (B \cap C)$, su objetivo también es demostrar que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, que significa que $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$. Pero cuando $x \in (B \cap C)$, entonces $x \in B$ y $x \in C$ (por definición de intersección) y por tanto $x \in A \cup B$ (en virtud de estar en B) y $x \in A \cup C$ (en virtud de estar en C).

Este análisis muestra que, independientemente de si $x \in A$ o $x \in B \cap C$, se obtiene la conclusión $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Por tanto puede completar los pasos que se indican en el cuadro interior anterior.

Completando los pasos que faltan en el cuadro inferior:

Para completar estos pasos, necesita ir de la suposición de que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ a la conclusión de que $x \in A \cup (B \cap C)$.

Cuando $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ es natural considerar los dos casos $x \in A$ y $x \notin A$. porque cuando x se encuentra en A, entonces el enunciado "$x \in A$ o $x \in B \cap C$" es sin duda verdadero y así x está en $A \cup (B \cap C)$ por definición de unión. Por tanto, sólo se necesita demostrar que aún en el caso cuando x no está en A y $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y, entonces, $x \in A \cup (B \cap C)$.

Así suponiendo que x no está en A. Ahora digamos que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ significa que $x \in A \cup B$ y que $x \in A \cup C$ (por definición de intersección). Pero cuando $x \in A \cup B$, entonces x está en al menos uno de A o B, así que puesto que x no está en A entonces, x debe estar en B. Similarmente, cuando $x \in A \cup C$, entonces x está al menos en uno en A o en C, así como x no está en A, entonces, x debe estar en C. Por tanto, cuando x no está en A y $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, entonces x está tanto en B como en C, lo que significa que $x \in B \cap C$. Se deduce que el enunciado "$x \in A$ o $x \in B \cap C$" es verdadero y por tanto $x \in A \cup (B \cap C)$ por definición de unión.

Este análisis muestra que si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, entonces independientemente de si $x \in A$ o $x \notin A$, se puede concluir que $x \in A \cup (B \cap C)$. Por tanto, puede completar los pasos del cuadro interior de la parte inferior.

A continuación se muestra una demostración formal.

Teorema 6.2.2(3)*a*) Una ley distributiva para conjuntos

Para todos los conjuntos A, B y C,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Demostración:

Supongamos que A y B son conjuntos.

Demostración de que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

Suponga que $x \in A \cup (B \cap C)$. Por definición de unión, $x \in A$ o $x \in B \cap C$.

Caso 1 ($x \in A$): Ya que $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$ por definición de unión y también $x \in A \cup C$ por definición de unión. Por tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ por definición de intersección.

Caso 2 ($x \in B \cap C$): Dado que $x \in B \cap C$, entonces $x \in B$ y $x \in C$ por definición de intersección. Ya que $x \in B$, $x \in A \cup B$ y puesto que $x \in C$, $x \in A \cup C$, ambos por la definición de unión. Por tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ por definición de intersección.

En ambos casos, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Por tanto $A \cup (B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ por definición del subconjunto.

Demostración de que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$:

Suponga que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Por definición de intersección, $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$. Considere los dos casos $x \in A$ y $x \notin A$.

Caso 1 ($x \in A$): Dado que $x \in A$, podemos inmediatamente concluir que $x \in A \cup (B \cap C)$ por definición de unión.

Caso 2 ($x \notin A$): Ya que $x \in A \cup B$, x está en al menos uno de A o B. Pero x no está en A; por tanto, x está en B. Similarmente, puesto que $x \in A \cup C$, x está al menos en uno de A o C. Pero x no está en A; por tanto x está en C. Hemos demostrado que tanto $x \in B$ y $x \in C$ y por tanto por definición de intersección, $x \in B \cap C$. Se deduce por definición de unión que $x \in A \cup (B \cap C)$.

En ambos casos $x \in A \cup (B \cap C)$. Por tanto, por definición de subconjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Conclusión: Dado que se han demostrado ambas relaciones de subconjuntos, se deduce por definición de igualdad de conjuntos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

■

En el estudio de inteligencia artificial, los tipos de razonamiento utilizados anteriormente para obtener la demostración de la ley distributiva se llaman *encadenamiento hacia adelante* y *encadenamiento hacia atrás*. Lo primero que se muestra es visto como un objetivo a ser alcanzado a partir de una cierta posición inicial: el punto de partida. El análisis de este objetivo conduce a la realización de que si se logra un determinado puesto, entonces se alcanzará el objetivo. Llame a este trabajo sub-objetivo 1: SG_1. (Por ejemplo, si el objetivo es mostrar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, entonces SG_1 mostraría que cada conjunto es un subconjunto del otro.) Análisis de SG_1 muestra que cuando aún se ha completado otro puesto, SG_1 se alcanzará. Llame a este sub-objetivo de trabajo 2: SG_2. Continuando de este modo, se construye una cadena de argumento que conduce hacia atrás del objetivo.

$$\boxed{\text{punto de partida}} \qquad\qquad \rightarrow SG_3 \rightarrow SG_2 \rightarrow SG_1 \rightarrow \boxed{\text{objetivo}}$$

En cierto momento, el encadenamiento hacia atrás se hace difícil, pero el análisis del actual sub-objetivo sugiere que puede ser accesible por una línea directa de argumento, llamado encadenamiento hacia adelante, desde el punto de partida. Con la información que se presenta en el punto de partida, se deduce otra pieza de información, I_1, de esa otra pieza de información, se deduce I_2 y así sucesivamente hasta que finalmente se alcanza uno de los sub-objetivos. Esto completa la cadena y demuestra el teorema. Una cadena completa se ilustra a continuación.

$$\boxed{\text{punto de partida}} \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow SG_3 \rightarrow SG_2 \rightarrow SG_1 \rightarrow \boxed{\text{objetivo}}$$

Ya que el conjunto complemento se define en términos de *no* y ya que las uniones e intersecciones se definen en términos de *o* y *y*, no es de extrañar que existen análogos de leyes de De Morgan de la lógica para conjuntos.

Ejemplo 6.2.3 Demostración de una de las leyes de De Morgan para conjuntos

Demuestre que para todos los conjuntos A y B $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Solución Como en los ejemplos anteriores, el enunciado a demostrar es universal, por lo que el punto de partida de la demostración y la conclusión que se muestra son las siguientes:

Punto de partida: Supongamos que A y B son conjuntos arbitrariamente elegidos.

A demostrar: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Para hacer esto, se debe demostrar que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ y que $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. Demostrar la primera expresión significa demostrar que

$$\forall x, \text{ si } x \in (A \cup B)^c \text{ entonces } x \in A^c \cap B^c.$$

Y demostrar la segunda expresión significa demostrar que,

$$\forall x, \text{ si } x \in A^c \cap B^c \text{ entonces } x \in (A \cup B)^c.$$

Puesto que cada uno de estos enunciados es universal y condicional, para la primera expresión,

suponga que $x \in (A \cup B)^c$,

y, después **demuestre** que $x \in A^c \cap B^c$.

Y para la segunda expresión,

suponga $x \in A^c \cap B^c$,

y, después, **demuestre** que $x \in (A \cup B)^c$.

Para completar los pasos de estos argumentos, utilice las versiones procesadas de las definiciones de complemento, unión e intersección y en qué puntos cruciales utiliza las leyes de De Morgan de lógica.

Teorema de 6.2.2(9)*a*) Una ley de De Morgan para conjuntos

Para todos los conjuntos A y B $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Demostración:
Suponga que A y B son conjuntos.

Demostración de que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$:
[Debemos demostrar que $\forall x$, si $x \in (A \cup B)^c$ entonces $x \in A^c \cap B^c$.]
Supongamos que $x \in (A \cup B)^c$. *[Debemos demostrar que $x \in A^c \cap B^c$.]* Por definición de complemento,

$$x \notin A \cup B.$$

Pero decir que $x \notin A \cup B$ significa que

es falso que (x está en A o x está en B).

Por las leyes de De Morgan de la lógica, esto implica que

x no está en A y x no está en B,

que se puede escribir $\quad x \notin A \quad \text{y} \quad x \notin B.$

Así $x \in A^c$ y $x \in B^c$ por definición de complemento. Se deduce, por definición de intersección, que $x \in A^c \cap B^c$ *[como se quería demostrar]*. Así $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ por definición de subconjunto.

Demostración de que $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$:
[Debemos demostrar que $\forall x$, si $x \in A^c \cap B^c$ entonces $x \in (A \cup B)^c$.]
Suponga que $x \in A^c \cap B^c$. *[Debemos demostrar que $x \in (A \cup B)^c$.]* Por definición de intersección, $x \in A^c$ y $x \in B^c$ y por definición de complemento,

$$x \notin A \quad \text{y} \quad x \notin B.$$

En otras palabras, x no está en A y x no está en B.

Por las leyes de lógica de De Morgan, esto implica que

$$\text{es falso que } (x \text{ está en } A \text{ o } x \text{ está en } B),$$

que se puede escribir como $\qquad x \notin A \cup B$

por definición de unión. Por tanto, por definición de complemento, $x \in (A \cup B)^c$ *[como se quería demostrar]*. Se deduce que $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ por definición del subconjunto.

Conclusión: Ya que ambas expresiones de conjuntos se han demostrado $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ por definición de la igualdad del conjunto.

La propiedad del conjunto en el siguiente teorema dice que, si un conjunto es un sub-conjunto del otro, entonces su intersección es el menor de los dos conjuntos y su unión es la más grande de los dos conjuntos.

Teorema de 6.2.3 Intersección y unión con un sub-conjunto

Para cualesquiera conjuntos A y B, si $A \subseteq B$, entonces

$$a)\ A \cap B = A \quad \text{y} \quad b)\ A \cup B = B.$$

Demostración:

Parte a): Suponga que A y B son conjuntos con $A \subseteq B$. Para demostrar la parte *a*) debemos demostrar que tanto $A \cap B \subseteq A$ y que $A \subseteq A \cap B$. Ya sabemos $A \cap B \subseteq A$ por inclusión de la propiedad de intersección. Para demostrar que $A \subseteq A \cap B$, sea $x \in A$. *[Debemos demostrar que $x \in A \cap B$.]* Ya que $A \subseteq B$, entonces también $x \in B$. Por tanto

$$x \in A \quad \text{y} \quad x \in B$$

y por tanto $\qquad x \in A \cap B$

por definición de intersección *[como se quería demostrar]*.

Demostración:

Parte b): La demostración de la parte *b*) se deja como ejercicio.

■

Conjunto vacío

En la sección 6.1 se introdujo el concepto de un conjunto sin elementos y se prometió que en esta sección mostraríamos que es un conjunto único. Para ello, empezamos con la más básica (y la más extraña) propiedad de un conjunto sin elementos: es un subconjunto de todo conjunto. Para ver por qué esto es verdadero, sólo pregúntese, ¿podría ser falso?, ¿podría haber un conjunto sin elementos que *no* sea un sub-conjunto de un conjunto dado? El hecho fundamental es que la negación de un enunciado universal es existencial: si un conjunto B no es un sub-conjunto de un conjunto A, entonces existe un elemento en B que no está en A. Pero si B no tiene algún elemento, entonces no puede existir algún elemento.

Teorema 6.2.4 Un conjunto sin elementos es un subconjunto de cada conjunto

Si E es un conjunto sin elementos y A es cualquier conjunto, entonces, $E \subseteq A$.

Demostración (por contradicción):

Supongamos que no. *[Tomemos la negación del teorema y supongamos que es verdadera.]* Supongamos que existe un conjunto E sin elementos y un conjunto A tal que $E \nsubseteq A$. *[Debemos deducir una contradicción.]* Entonces habría un elemento de E que no es un elemento de A *[por definición de sub-conjunto]*. Pero no puede haber algún elemento ya que E no tiene elementos. Esto es una contradicción. *[Por tanto la suposición de que hay conjuntos E y A, donde E no tiene elementos y $E \nsubseteq A$, es falso y por tanto el teorema es verdadero.]*

La veracidad del teorema 6.2.4 también puede entenderse apelando la noción de verdad vacía. Si E es un conjunto sin elementos y A es cualquier conjunto, entonces decir que $E \subseteq A$ es lo mismo que decir que

$$\forall x, \text{ si } x \in E, \text{ entonces } x \in A.$$

Pero puesto que E no tiene elementos, este enunciado condicional es vacuamente verdadero.

¿Cuántos conjuntos sin elementos existen? Sólo uno.

Corolario 6.2.5 Unicidad del conjunto vacío

Hay sólo un conjunto sin elementos.

Demostración:

Suponga que E_1 y E_2 son dos conjuntos sin elementos. Por el teorema 6.2.4, $E_1 \subseteq E_2$ puesto que E_1 no tiene elementos. E_2 tampoco tiene elementos. Por tanto, $E_1 = E_2$ por definición de igualdad de conjuntos.

Se deduce del corolario 6.2.5 que el conjunto de los elefantes rosa es igual al conjunto de todos los números reales cuyo cuadrado es -1 ¡porque cada conjunto no tiene elementos! Dado que sólo hay un conjunto sin elementos, se justifica llamarlo por un nombre especial, conjunto vacío (o conjunto nulo) y se denota con el símbolo especial $\emptyset$.

Observe que mientras $\emptyset$ es el conjunto sin elementos, el conjunto $\{\emptyset\}$ tiene un elemento, el conjunto vacío. Esto es similar a la convención en la programación en los lenguajes de computadora LISP y Scheme, en los que ( ) indica la lista vacía y (( )) denota la lista cuyo único elemento es la lista vacía.

Suponga que necesita mostrar que un cierto conjunto equivale al conjunto vacío. Por el corolario 6.2.5 es suficiente para demostrar que el conjunto no tiene elementos. Ya que puesto que sólo hay un conjunto sin elementos (a saber, $\emptyset$), si el conjunto dado no tiene elementos y, entonces, debe ser igual a $\emptyset$.

Método del elemento para demostrar que un conjunto es igual al conjunto vacío

Demostrar que un conjunto X es igual al conjunto vacío $\emptyset$, equivale a demostrar que X no tiene elementos. Para esto, suponga que X tiene un elemento y se deduce una contradicción.

Ejemplo 6.2.4 Demostración de que un conjunto es vacío

Demuestre el teorema de 6.2.2(8)b). Es decir, demuestre que para cualquier conjunto A, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Solución Sea A un conjunto *[particular arbitrariamente elegido]*. Para demostrar que $A \cap \emptyset = \emptyset$, es suficiente para demostrar que $A \cap \emptyset$ no tiene elementos *[por el método del elemento para la demostración de un conjunto igual al conjunto vacío]*. Suponga que no. Es decir, suponga que hay un elemento x tal que $x \in A \cap \emptyset$. Entonces, por definición de intersección, $x \in A$ y $x \in \emptyset$. En particular, $x \in \emptyset$. Pero esto es imposible, ya que $\emptyset$ no tiene elementos. *[Esta contradicción demuestra que la suposición de que hay un elemento x en $A \cap \emptyset$ es falso. Por lo que $A \cap \emptyset$ no tiene elementos, como se quería demostrar.]* Por tanto $A \cap \emptyset = \emptyset$. ■

Ejemplo 6.2.5 Una demostración para un enunciado condicional

Demuestre que para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C^c$, entonces $A \cap C = \emptyset$.

Solución Puesto que el enunciado es universal y condicional, se inicia con el método de demostración directa:

Suponga que A, B y C son conjuntos arbitrariamente elegidos
que satisfacen la condición: $A \subseteq B$ y $B \subseteq C^c$.

Demuestre que $A \cap C = \emptyset$.

Dado que la conclusión de que se muestra es que un conjunto dado está vacío, puede utilizar el principio por demostrar que un conjunto es igual al conjunto vacío. A continuación se muestra una demostración completa.

Proposición 6.2.6

Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C^c$, entonces, $A \cap C = \emptyset$.

Demostración:

Suponga que A, B y C son conjuntos cualesquiera tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C^c$. Debemos demostrar que $A \cap C = \emptyset$. Supongamos que no. Es decir, supongamos que hay un elemento x en $A \cap C$. Por definición de intersección, $x \in A$ y $x \in C$. Entonces, ya que $A \subseteq B$, $x \in B$ por definición de subconjunto. También, puesto que $B \subseteq C^c$, entonces también por definición de subconjunto $x \in C^c$. De la definición de complemento se tiene que $x \notin C$. Por tanto, $x \in C$ y $x \notin C$, que es una contradicción. Por tanto la suposición de que hay un elemento x en $A \cap C$ es falsa y así $A \cap C = \emptyset$ *[como se quería demostrar]*.

■

Ejemplo 6.2.6 Una ley distributiva generalizada

Demuestre que para todos los conjuntos A y $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$,

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i).$$

Solución Compare esta demostración con la que se da en el ejemplo 6.2.2. Aunque la notación es más compleja, las ideas básicas son las mismas.

Demostración:

Supongamos que A y $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ son conjuntos cualesquiera.

Parte 1. Demostración de que $\boldsymbol{A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)}$**:**

Suponga que x es cualquier elemento en $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$. *[Debemos demostrar que x está en* $\bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$ *.]*

Por definición de unión, $x \in A$ o $x \in \bigcap_{i=1}^{n} B_i$.

Caso 1. $\boldsymbol{x \in A}$**:** En este caso, es verdadero por definición de unión que para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, $x \in A \cup B_i$. Por tanto $x \in \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$.

Caso 2. $\boldsymbol{x \in \bigcap_{i=1}^{n} B_i}$ **:** En este caso, por definición de intersección general, tenemos que para todos los enteros $i = 1, 2, \ldots, n$, $x \in B_i$. Por tanto, por definición de unión, para todos los enteros $i = 1, 2, \ldots, n$, $x \in A \cup B_i$ y por tanto, por definición de intersección general, $x \in \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$. Por tanto, en cualquier caso, $x \in \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$ *[como se quería demostrar].*

Parte 2. Demostración de que $\bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i) \subseteq A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$**:**

Suponga que x es cualquier elemento en $\bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$. *[Tenemos que demostrar que x está en* $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$*.]*

Por definición de intersección, $x \in A \cup B_i$ para todo entero $i = 1, 2, \ldots, n$. Ya sea $x \in A$ o $x \notin A$.

Caso 1. $\boldsymbol{x \in A}$**:** En este caso, $x \in A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$, por definición de unión.

Caso 2. $\boldsymbol{x \notin A}$**:** Por definición de intersección, $x \in A \cup B_i$ para todo entero $i = 1, 2, \ldots, n$. Ya que $x \notin A$, x debe estar en cada B_i para cada entero $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto, por definición de intersección, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} B_i$ y así, por definición de unión, $x \in A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$.

Conclusión**:** Puesto que ambos conjuntos de expresiones están demostradas, se deduce por definición de igualdad de conjuntos que $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$. ■

Autoexamen

1. Demuestre que un conjunto X es un subconjunto de un conjunto $A \cap B$, suponga que x es cualquier elemento de X y demuestre que $x \in A$ _____ $x \in B$.
2. Demuestre que un conjunto X es un subconjunto de un conjunto $A \cup B$, suponga que x es cualquier elemento de X y demuestre que $x \in A$ _____ $x \in B$.
3. Demuestre que un conjunto $A \cup B$ es un subconjunto de un conjunto X, comience con cualquier elemento x en $A \cup B$ y considere los dos casos _____ y _____. A continuación, demuestre que en ambos casos _____.
4. Demuestre que un conjunto $A \cap B$ es un subconjunto de un conjunto X, suponga que _____ y demuestre que _____.
5. Demuestre que un conjunto X es igual a un conjunto Y, demuestre que _____ y que _____.
6. Demuestre que un conjunto X que no es igual a un conjunto Y, necesita encontrar un elemento que esté en _____ y no _____ o que se encuentra en _____ y no _____.

Conjunto de ejercicios 6.2

1. **a.** Decir que un elemento está en $A \cap (B \cup C)$ significa que está en __(1)__ y __(2)__.
   b. Decir que un elemento está en $(A \cap B) \cup C$ significa que está en __(1)__ o en __(2)__.
   c. Decir que un elemento está en $A - (B \cup C)$ significa que está en __(1)__ y no en __(2)__.
2. Los siguientes son dos demostraciones que para todos los conjuntos A y B, $A - B \subseteq A$. La primera es menos formal y la segunda es más formal. Complete los espacios en blanco.
   a. **Demostración**: Suponga que A y B son conjuntos cualesquiera. Para demostrar que $A - B \subseteq A$, tenemos que demostrar que cada elemento en __(1)__ está en __(2)__. Pero cualquier elemento

en $A - B$ está en $\underline{\ \ (3)\ \ }$ y no en $\underline{\ \ (4)\ \ }$ (por definición de $A - B$). En particular, dicho elemento está en A.

b. **Demostración:** Suponga que A y B son conjuntos cualesquiera y que $x \in A - B$. *[Debemos demostrar que* $\underline{\ \ (1)\ \ }$*.]* Por definición de diferencia, $x \in \underline{\ \ (2)\ \ }$ y $x \notin \underline{\ \ (3)\ \ }$. En particular, $x \in \underline{\ \ (4)\ \ }$ *[que es lo que se quería demostrar]*.

3. La siguiente es una demostración que para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$. Complete los espacios en blanco.

Demostración: Supongamos que A, B y C son conjuntos y $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Para mostrar que $A \subseteq C$, tenemos que demostrar que cada elemento en $\underline{\ \ (a)\ \ }$ está en $\underline{\ \ (b)\ \ }$. Pero dado cualquier elemento en A, ese elemento está también en $\underline{\ \ (c)\ \ }$ (porque $A \subseteq B$), por lo que ese elemento está también en $\underline{\ \ (d)\ \ }$ (porque $\underline{\ \ (e)\ \ }$). Por tanto $A \subseteq C$.

4. La siguiente es una demostración que para todos los conjuntos A y B. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B \subseteq B$. Complete los espacios en blanco.

Demostración: Suponga que A y B son conjuntos cualesquiera y $A \subseteq B$. *[Tenemos que demostrar que* $\underline{\ \ (a)\ \ }$*.]* Sea que $x \in \underline{\ \ (b)\ \ }$. *[Tenemos que demostrar que* $\underline{\ \ (c)\ \ }$*.]* Por definición de unión, $x \in \underline{\ \ (d)\ \ }\ \underline{\ \ (e)\ \ }\ x \in \underline{\ \ (f)\ \ }$. En caso de que $x \in \underline{\ \ (g)\ \ }$, entonces ya que $A \subseteq B$, $x \in \underline{\ \ (h)\ \ }$. En caso de que $x \in B$, entonces claramente $x \in B$. Así en cualquier caso, $x \in \underline{\ \ (i)\ \ }$ *[como se quería demostrar]*.

5. Demuestre que para todos los conjuntos A y B $(B - A) = B \cap A^c$.

H **6.** La siguiente es una demostración de que para cualesquiera conjuntos A, B y C, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Complete los espacios en blanco.

Demostración: Supongamos que A, B y C son conjuntos cualesquiera.

1) Demostración de que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$:
Sea $x \in A \cap (B \cup C)$. *[Debemos demostrar que* $x \in \underline{\ \ (a)\ \ }$*.]* Por definición de intersección, $x \in \underline{\ \ (b)\ \ }$ y $x \in \underline{\ \ (c)\ \ }$. Por tanto, $x \in A$ y, por definición de unión, $x \in B$ o $\underline{\ \ (d)\ \ }$.

***Caso 1* ($x \in A$ *y* $x \in B$):** en este caso, por definición de intersección, $x \in \underline{\ \ (e)\ \ }$ y así, por definición de unión, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

***Caso 2* ($x \in A$ *y* $x \in C$):** En este caso, $\underline{\ \ (f)\ \ }$.
Así en cualquier caso, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *[como se quería demostrar]*.
[Así $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ por definición de subconjunto.]

2) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$:
Sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. *[Debemos demostrar que* $\underline{\ \ (a)\ \ }$*.]* Por definición de unión, $x \in A \cap B$ $\underline{\ \ (b)\ \ }$ $x \in A \cap C$.

***Caso 1* $x \in (A \cap B)$:** En este caso, por definición de intersección, $x \in A$ $\underline{\ \ (c)\ \ }$ $x \in B$. Ya que $x \in B$, entonces, por definición de unión, $x \in B \cup C$. Por lo que $x \in A$ y $x \in B \cup C$ y así, por definición de intersección, $x \in \underline{\ \ (d)\ \ }$.

***Caso 2* ($x \in A \cap C$):** En este caso, $\underline{\ \ (e)\ \ }$.
En cualquier caso, $x \in A \cap (B \cup C)$ *[como se quería demostrar]. [Así $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ por definición de subconjunto.]*

3) *Conclusión*: *[Ya que se han demostrado ambas relaciones del subconjunto, se deduce, por definición de igualdad de conjuntos, que* $\underline{\ \ (a)\ \ }$*.]*

Use un argumento de elemento para demostrar cada enunciado en los ejercicios del 7 al 19. Suponga que todos los conjuntos son subconjuntos de un conjunto universo U.

H **7.** Para todos los conjuntos A y B $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

8. Para todos los conjuntos A y B $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.

H **9.** Para todos los conjuntos A, B y C

$$(A - B) \cup (C - B) = (A \cup C) - B.$$

10. Para todos los conjuntos A, B y C

$$(A - B) \cap (C - B) = (A \cap C) - B.$$

H **11.** Para todos los conjuntos A y B $A \cup (A \cap B) = A$.

12. Para todo conjunto A, $A \cup \emptyset = A$.

13. Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ entonces $A \cap C \subseteq B \cap C$.

14. Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$.

15. Para todos los conjuntos A y B, si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$.

H **16.** Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$ entonces $A \subseteq B \cap C$.

17. Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ entonces $A \cup B \subseteq C$.

18. Para todos los conjuntos A, B y C

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

19. Para todos los conjuntos A, B y C

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

20. Encuentre el error en la siguiente "demostración" que para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

"**Demostración:** Suponga que A, B y C son conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Ya que $A \subseteq B$, hay un elemento x tal que $x \in A$ y $x \in B$. Ya que $B \subseteq C$, hay un elemento x tal que $x \in B$ y $x \in C$. Por lo que hay un elemento x tal que $x \in A$ y $x \in C$ y por tanto $A \subseteq C$".

H **21.** Encuentre el error en la siguiente "demostración".

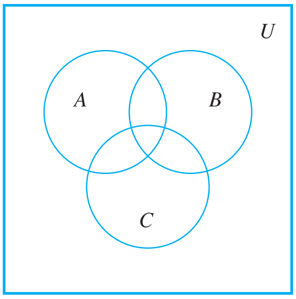
"**Teorema**": Para todos los conjuntos A y B, $A^c \cup B^c \subseteq (A \cup B)^c$.

"**Demostración:** Supongamos que A y B son conjuntos y $x \in A^c \cup B^c$. Entonces $x \in A^c$ o $x \in B^c$ por definición de unión. Se deduce que $x \notin A$ o $x \notin B$ por definición de complemento y así $x \notin A \cup B$ por definición de unión. Por lo que, $x \in (A \cup B)^c$ por definición de complemento y por tanto $A^c \cup B^c \subseteq (A \cup B)^c$".

22. Determine el error en la siguiente "demostración" que para todos los conjuntos A y B $(A - B) \cup (A \cap B) \subseteq A$.

"**Demostración:** Suponga que A y B son conjuntos y suponga que $x \in (A - B) \cup (A \cap B)$. Si $x \in A$ entonces $x \in A - B$. Entonces, por definición de diferencia $x \in A$ y $x \notin B$. Por tanto $x \in A$ y así por definición de subconjunto $(A - B) \cup (A \cap B) \subseteq A$".

23. Considere el siguiente diagrama de Venn.



a. En una copia del diagrama, ilustre una de las leyes distributivas sombreando la región correspondiente $A \cup (B \cap C)$ y en otra $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
b. En una copia del diagrama ilustre la otra ley distributiva sombreando la región correspondiente a $A \cap (B \cup C)$ y en otra $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
c. En una copia del diagrama ilustre una de las leyes de De Morgan sombreando la región correspondiente a $(A \cup B)^c$ y en otra $A^c \cap B^c$. (Quite al conjunto C de sus diagramas.)
d. En una copia del diagrama ilustre otra de las leyes de De Morgan sombreando la región correspondiente a $(A \cap B)^c$ y en otra $A^c \cup B^c$. (Quite al conjunto C de sus diagramas.)

24. Complete los espacios en blanco en la siguiente demostración que para todos los conjuntos A y B, $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$.

Demostración: Sean A y B conjuntos cualesquiera y suponga que $(A - B) \cap (B - A) \neq \emptyset$. Es decir, suponga que hay un elemento x en __(a)__. Por definición de __(b)__, $x \in A - B$ y $x \in$ __(c)__. Entonces, por definición de diferencia, $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \in$ __(d)__ y $x \notin$ __(e)__. En particular $x \in A$ y $x \notin$ __(f)__ que es una contradicción. Por tanto *[la suposición de que $(A - B) \cap (B - A) \neq \emptyset$ es falso y así]* __(g)__.

Utilice el método del elemento probando que un conjunto es igual al conjunto vacío para demostrar cada enunciado de los ejercicios 25 al 35. Se supone que todos los conjuntos son subconjuntos de un conjunto universo U.

25. Para todos los conjuntos A y B, $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$.

26. Para todos los conjuntos A, B y C,

$$(A - C) \cap (B - C) \cap (A - B) = \emptyset.$$

27. Para todos los subconjuntos A de un conjunto universo U, $A \cap A^c = \emptyset$.

28. Si U denota un conjunto universo, entonces $U^c = \emptyset$.

29. Para todos los conjuntos A, $A \times \emptyset = \emptyset$.

30. Para todos los conjuntos A y B, si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B^c = \emptyset$.

31. Para todos los conjuntos A y B, si $B \subseteq A^c$ entonces $A \cap B = \emptyset$.

32. Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \cap C = \emptyset$ entonces $A \cap C = \emptyset$.

33. Para todos los conjuntos A, B y C, si $C \subseteq B - A$, entonces, $A \cap C = \emptyset$.

34. Para todos los conjuntos A, B y C,

$$\text{si } B \cap C \subseteq A, \text{ entonces } (C - A) \cap (B - A) = \emptyset.$$

35. Para todos los conjuntos A, B, C y D,

$$\text{si } A \cap C = \emptyset, \text{ entonces } (A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset.$$

Demuestre cada enunciado de los ejercicios del 36 al 41.

H 36. Para todos los conjuntos A y B,
a. $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$
b. Los conjuntos $(A - B)$, $(B - A)$ y $(A \cap B)$ son mutuamente disjuntos.

37. Para todo entero $n \geq 1$, si A y $B_1, B_2, B_3, \ldots$ son conjuntos cualesquiera, entonces,

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i).$$

H 38. Para todo entero $n \geq 1$, si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ y B son conjuntos cualesquiera, entonces,

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i - B) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - B.$$

39. Para todo entero $n \geq 1$, si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ y B son conjuntos cualesquiera, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} (A_i - B) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) - B.$$

40. Para todo entero $n \geq 1$, si A y $B_1, B_2, B_3, \ldots$ son conjuntos cualesquiera, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A \times B_i) = A \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right).$$

41. Para todo entero $n \geq 1$, si A y $B_1, B_2, B_3, \ldots$ son conjuntos cualesquiera, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} (A \times B_i) = A \times \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right).$$

Respuestas del autoexamen

1. y 2. o 3. $x \in A$; $x \in B$; $x \in X$ 4. $x \in A \cap B$ (O: x es un elemento tanto de A como de B); $x \in X$ 5. $X \subseteq Y$; $Y \subseteq X$
6. X; en Y; Y; en X

6.3 Refutaciones, demostraciones algebraicas y álgebra booleana

Si un hecho está en contra del sentido común y, sin embargo, nos vemos obligados a aceptar y hacer frente a este hecho, aprendemos a alterar nuestra noción del sentido común.
—*La experiencia matemática*, Phillip J. Davis y Reuben Hersh, 1981

En la sección 6.2 dimos ejemplos sólo de propiedades de conjuntos que eran verdaderas. Sin embargo, en ocasiones, una propiedad propuesta es falsa. Comenzamos esta sección analizando cómo refutar una propiedad propuesta. Después demostraremos un teorema importante sobre el conjunto potencia de un conjunto y después analizamos un método "algebraico" para deducir propiedades nuevas de conjuntos a partir de las propiedades que ya se sabe que son verdaderas. Finalizamos la sección con una introducción al álgebra booleana.

Refutación de una supuesta propiedad de un conjunto

Recuerde que para demostrar que un enunciado universal es falso, es suficiente con encontrar un ejemplo (llamado un contraejemplo) para el cual es falso.

Ejemplo 6.3.1 Determinación de un contraejemplo para un conjunto identidad

¿Es verdadera la siguiente propiedad de conjuntos?

Para todos los conjuntos A, B y C $(A - B) \cup (B - C) = A - C$.

Solución Observe que la propiedad es verdadera si y sólo si,

la igualdad dada se cumple para *todos* los conjuntos A, B y C.

Por lo que es falsa si y sólo si,

hay conjuntos A, B y C para los que la igualdad *no* se cumple.

Una forma de resolver este problema es imaginar los conjuntos A, B y C mediante la elaboración de un diagrama de Venn como el que se muestra en figura 6.3.1. Si supone que cualquiera de las ocho regiones del diagrama puede estar vacía de puntos, entonces, el diagrama es muy general.

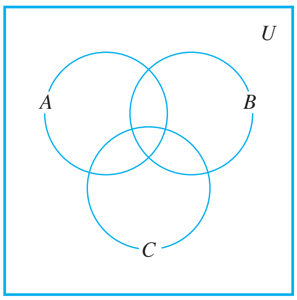
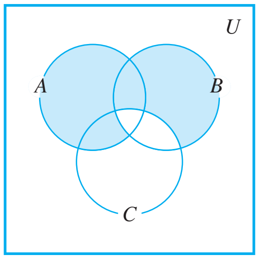


Figura 6.3.1

Encuentre y sombree la región correspondiente a $(A - B) \cup (B - C)$. Después sombree la región correspondiente a $A - C$. Éstas se muestran en la figura 6.3.2 en la siguiente página.

Comparando las regiones sombreadas parece indicar que la propiedad es falsa. Por ejemplo, si hay un elemento en B que no está en A o en C, entonces este elemento estaría en $(A - B) \cup (B - C)$ (ya que está en B y no en C) pero no estaría en $A - C$ ya que $A - C$ no contiene nada fuera de A. Del mismo modo, un elemento que está en A y en C pero no en B estaría en $(A - B) \cup (B - C)$ (ya que está en A y no en B), pero no estaría en $A - C$ (ya que estaría tanto en A como en C).



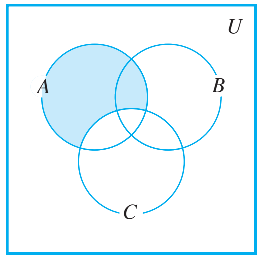


Figura 6.3.2

Construya un contraejemplo concreto para confirmar su respuesta y asegúrese de que no ha cometido un error en el dibujo o al analizar los diagramas. Una forma es poner uno de los enteros, de los ejercicios 1 al 7 en cada una de las siete subregiones encerradas por los círculos que representan a A, B y C. Si la propiedad propuesta del conjunto implica complementos del conjunto, también sería útil etiquetar la región fuera de los círculos y por tanto ponemos el número 8 ahí. (Vea la figura 6.3.3.) Después, defina conjuntos discretos A, B y C de todos los números en sus respectivas sub-regiones.

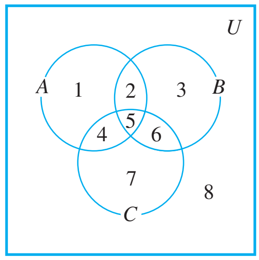


Figura 6.3.3

Contraejemplo 1: Sea $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ y $C = \{4, 5, 6, 7\}$. Entonces,

$$A - B = \{1, 4\}, \quad B - C = \{2, 3\} \quad \text{y} \quad A - C = \{1, 2\}.$$

Por tanto

$$(A - B) \cup (B - C) = \{1, 4\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \text{mientras que} \quad A - C = \{1, 2\}.$$

Ya que $\{1, 2, 3, 4\} \neq \{1, 2\}$, tenemos que $(A - B) \cup (B - C) \neq A - C$.

Un contraejemplo más económico se puede obtener mediante la observación de que mientras el conjunto B contenga un elemento, como por ejemplo 3, que no se encuentre en A, entonces independientemente de si B contiene otros elementos e independientemente de que A y C contengan algún elemento $(A - B) \cup (B - C) \neq A - C$.

Contraejemplo 2: Sea $A = \emptyset$, $B = \{3\}$ y $C = \emptyset$. Entonces,

$$A - B = \emptyset, \quad B - C = \{3\} \quad \text{y} \quad A - C = \emptyset.$$

Por tanto $\quad (A - B) \cup (B - C) \neq \emptyset \cup \{3\} = \{3\}, \quad$ mientras que $\quad A - C = \emptyset$.

Ya que $\{3\} \neq \emptyset$, tenemos que $(A - B) \cup (B - C) \neq A - C$.

Nota Compruebe que cuando $A = C = \{4\}$ y $B = \emptyset$, $(A - B) \cup (B - C) \neq A - C$.

Otro contraejemplo económico requiere sólo que $A = C =$ a conjunto singleton, como $\{4\}$, mientras que B es el conjunto vacío.

Estrategia de solución de problemas

¿Cómo se puede descubrir si un enunciado universal dado acerca de los conjuntos es verdadero o falso? Existen dos enfoques básicos: el optimista y el pesimista. En el enfoque optimista, simplemente sumérjase y comience tratando de demostrar el enunciado, preguntando, ¿qué necesito demostrar? y ¿cómo demostrarlo? En el enfoque pesimista, se inicia buscando en su mente un conjunto de condiciones que deben cumplirse para construir un contraejemplo. Con estos enfoques puede comenzar y tener éxito inmediatamente o puede tener dificultad. El truco consiste en estar listo para cambiar al otro planteamiento si lo que intenta no parece prometedor. Para preguntas más difíciles, puede alternar varias veces entre los dos enfoques antes de llegar a la respuesta correcta.

El número de subconjuntos de un conjunto

El teorema siguiente establece el hecho importante que si un conjunto tiene n elementos, su conjunto potencia tiene 2^n elementos. La demostración utiliza inducción matemática y se basa en las siguientes observaciones. Suponga que X es un conjunto y z es un elemento de X.

1. Los subconjuntos de X se pueden dividir en dos grupos: aquellos que no contienen a z y los que contienen a z.
2. Los subconjuntos de X que no contienen a z son los mismos que los subconjuntos de $X - \{z\}$.
3. Los subconjuntos de X que no contienen a z pueden coincidir hasta uno por uno con los subconjuntos de X que contienen a z haciendo coincidir cada subconjunto A que no contiene a z con el subconjunto $A \cup \{z\}$ que contiene a z. Por tanto, hay muchos subconjuntos de X que contienen a z como subconjuntos existen de X que no contienen a z. Por ejemplo, si $X = \{x, y, z\}$, la tabla siguiente muestra la correspondencia entre subconjuntos de X que no contienen a z y subconjuntos de X que contienen a z.

Subconjuntos de X que no contienen a z		**Subconjuntos de X que contienen a z**
$\emptyset$	$\longleftrightarrow$	$\emptyset \cup \{z\} = \{z\}$
$\{x\}$	$\longleftrightarrow$	$\{x\} \cup \{z\} = \{x, z\}$
$\{y\}$	$\longleftrightarrow$	$\{y\} \cup \{z\} = \{y, z\}$
$\{x, y\}$	$\longleftrightarrow$	$\{x, y\} \cup \{z\} = \{x, y, z\}$

Teorema 6.3.1

Para todos los enteros $n \geq 0$, si un conjunto X tiene n elementos entonces, $\mathscr{P}(X)$ tiene 2^n elementos.

Demostración (por inducción matemática):

Sea la propiedad $P(n)$ la frase

Cualquier conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos. $\leftarrow P(n)$

Demostración de que P(0) es verdadera:
Para establecer $P(0)$, debemos demostrar que

Cualquier conjunto con 0 elementos tiene 2^0 subconjuntos. $\leftarrow P(0)$

continúa en la página 370

Pero el único conjunto con cero elementos es el conjunto vacío y el único subconjunto del conjunto vacío es el mismo. Por tanto, un conjunto con cero elementos tiene un subconjunto. Puesto que $1 = 2^0$, tenemos que $P(0)$ es verdadero.

Demostración de que para todo entero k ≥ 0, si P(k) es verdadero, entonces P(k + 1) también es verdadero:
[Supongamos que P(k) es verdadero para un entero dado pero arbitrariamente elegido k ≥ 0. Es decir:]
Suponga que k es cualquier entero con $k \geq 0$ tal que

Cualquier conjunto con k elementos tiene 2^k subconjuntos. $\leftarrow P(k)$ hipótesis inductiva

[Tenemos que demostrar que P(k + 1) es verdadero. Es decir:] Debemos demostrar que

Cualquier conjunto con $k + 1$ elementos tiene 2^{k+1} subconjuntos. $\leftarrow P(k + 1)$

Sea X un conjunto con $k + 1$ elementos. Ya que $k + 1 \geq 1$, podemos elegir un elemento z en X. Observe que cualquier subconjunto de X contiene a z o no. Además, cualquier subconjunto de X que no contiene a z es un subconjunto de $X - \{z\}$. Y cualquier subconjunto A de $X - \{z\}$ puede coincidir con un subconjunto B, igual a $A \cup \{z\}$, de X que contiene a z. En consecuencia, hay tantos subconjuntos de X que contienen a z como los que no la contienen y por tanto hay dos veces más subconjuntos de X como subconjuntos hay de $X - \{z\}$. Pero $X - \{z\}$ tiene k elementos y por tanto

el número de subconjuntos de $X - \{z\} = 2^k$ por hipótesis inductiva.

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\text{el número de subconjuntos de } X &= 2 \cdot (\text{el número de subconjuntos de } X - \{z\}) \\
&= 2 \cdot (2^k) && \text{por sustitución} \\
&= 2^{k+1} && \text{por álgebra básica.}
\end{aligned}
$$

[Esto es lo que se quería demostrar.]
[Puesto que hemos demostrado tanto el paso básico como el paso inductivo, concluimos que el teorema es verdadero.]

Demostraciones "algebraicas" de identidades de conjuntos

Sea U el conjunto universo y considere el conjunto potencia de U, $\mathscr{P}(U)$. Las identidades del conjunto dadas en el teorema 6.2.2 conservan todos los elementos de $\mathscr{P}(U)$. Una vez que se ha establecido un cierto número de identidades y otras propiedades, se pueden deducir nuevas propiedades algebraicamente sin tener que utilizar argumentos de método del elemento. Resulta que sólo las identidades (1-5) del teorema 6.2.2 son necesarias para demostrar cualquier otra identidad que implique uniones, intersecciones y complementos. Con la identidad de adición (12), la ley del conjunto diferencia, se puede establecer cualquier identidad de conjunto que implica uniones, intersecciones, complementos y conjuntos diferencia.

Para utilizar propiedades conocidas para deducir nuevas, es necesario utilizar el hecho de que estas propiedades son enunciados universales. Como las leyes del álgebra para números reales, que se aplican a una gran variedad de situaciones diferentes. Se supone que todos los conjuntos son subconjuntos de $\mathscr{P}(U)$, entonces por ejemplo, una de las leyes distributivas establece que

para todos los conjuntos A, B y C, $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Esta ley se puede ver como un modelo general en el que se pueden colocar cualesquiera tres conjuntos dados. Así, por ejemplo, si A_1, A_2 y A_3 representan conjuntos dados, entonces

$$\underbrace{A_1}_{A} \cap (\underbrace{A_2}_{B} \cup \underbrace{A_3}_{C}) = (\underbrace{A_1}_{A} \cap \underbrace{A_2}_{B}) \cup (\underbrace{A_1}_{A} \cap \underbrace{A_3}_{C}),$$

donde A_1 desempeña la función de A, A_2 desempeña el papel de B y A_3 desempeña el papel de C. Del mismo modo, si W, X, Y y Z son conjuntos cualesquiera dados, entonces, por la ley distributiva,

$$\underbrace{(W \cap X)}_{\updownarrow\, A} \cap (\underbrace{Y}_{\updownarrow\, B} \cup \underbrace{Z}_{\updownarrow\, C}) = (\underbrace{(W \cap X)}_{\updownarrow\, A} \cap \underbrace{Y}_{\updownarrow\, B}) \cup (\underbrace{(W \cap X)}_{\updownarrow\, A} \cap \underbrace{Z}_{\updownarrow\, C}),$$

donde $W \cap X$ desempeña el papel de A, Y desempeña el papel de B y Z desempeña el papel de C.

Ejemplo 6.3.2 Deducción de una propiedad de diferencia de conjuntos

Construya una demostración algebraica de que para todos los conjuntos A, B y C,

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C).$$

Mencione una propiedad del teorema 6.2.2 para cada paso de la demostración.

Solución Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Entonces,

$$\begin{aligned}
(A \cup B) - C &= (A \cup B) \cap C^c && \text{por la ley de la diferencia de conjuntos}\\
&= C^c \cap (A \cup B) && \text{por la ley conmutativa para } \cap\\
&= (C^c \cap A) \cup (C^c \cap B) && \text{por la ley distributiva}\\
&= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) && \text{por la ley conmutativa para } \cap\\
&= (A - C) \cup (B - C) && \text{por la ley de la diferencia de conjuntos} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.3.3 Deducción de una identidad de conjuntos utilizando propiedades de $\emptyset$

Construya una demostración algebraica para todos los conjuntos A y B

$$A - (A \cap B) = A - B.$$

Mencione una propiedad de teorema 6.2.2 para cada paso de la demostración.

Solución Suponga que A y B son conjuntos cualesquiera. Entonces

$$\begin{aligned}
A - (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)^c && \text{por la ley de la diferencia de conjuntos}\\
&= A \cap (A^c \cup B^c) && \text{por las leyes de De Morgan}\\
&= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) && \text{por la ley distributiva}\\
&= \emptyset \cup (A \cap B^c) && \text{por la ley de complemento}\\
&= (A \cap B^c) \cup \emptyset && \text{por la ley conmutativa para } \cup\\
&= A \cap B^c && \text{por la ley de identidad para } \cup\\
&= A - B && \text{por la ley de la diferencia de conjuntos} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Para muchas personas una demostración algebraica parece más atractiva que un elemento de demostración, pero con frecuencia la demostración de un elemento es realmente más simple. Por ejemplo, en el ejemplo 6.3.3 anterior, puede ver inmediatamente que $A - (A \cap B) = A - B$ porque un elemento que está en $A - (A \cap B)$ significa que está en A y no en ambos, A y B y esto equivale a decir que está en A y no en B.

Ejemplo 6.3.4 Deducción de una ley asociativa generalizada

¡Precaución! Cuando se realizan problemas similares a los ejemplos del 6.3.2 al 6.3.4, asegúrese de utilizar la definición de propiedades exactamente como se establecieron.

Demuestre que para conjuntos cualesquiera A_1, A_2, A_3 y A_4,

$$((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup A_4 = A_1 \cup ((A_2 \cup A_3) \cup A_4).$$

Mencione una propiedad de teorema 6.2.2 para cada paso de la demostración.

Solución Sea A_1, A_2, A_3 y A_4 conjuntos cualesquiera. Entonces

$((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup A_4 = (A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) \cup A_4$ por la ley asociativa para $\cup$ con A_1 jugando el papel de A, A_2 interpretando el papel de B y A_3 juega el papel de C

$= A_1 \cup ((A_2 \cup A_3) \cup A_4)$ por la ley asociativa para $\cup$ con A_1 en el papel de A, $A_2 \cup A_3$, interpretando el papel de B y A_4, jugando el papel de C. ■

Autoexamen

1. Dada una identidad de conjuntos propuesta que implique a las variables A, B y C, la forma más común para demostrar que la ecuación en general no se cumple es encontrar conjuntos concretos A, B y C que, cuando se sustituyen por las variables del conjunto en la ecuación, _____.

2. Cuando se utiliza el método algebraico para demostrar una identidad definida, es importante _____ en cada paso.

3. Cuando se aplica una propiedad del teorema 6.2.2, se debe utilizar _____ como está establecida.

Conjunto de ejercicios 6.3

Para cada uno de los ejercicios del 1 al 4 buscar un contraejemplo para demostrar que el enunciado es falso. Suponga que todos los conjuntos son subconjuntos de un conjunto universo U.

1. Para todos los conjuntos A, B y C $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

2. Para todos los conjuntos A y B $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

3. Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq C$ entonces $A \not\subseteq C$.

4. Para todos los conjuntos A, B y C, si $B \cap C \subseteq A$ entonces
$$(A - B) \cap (A - C) = \emptyset.$$

Para cada uno de los ejercicios del 5 al 21 demuestre cada enunciado que sea verdadero y encuentre un contraejemplo para cada enunciado sea falso. Suponga que todos los conjuntos son subconjuntos de un conjunto universo U.

5. Para todos los conjuntos A, B y C, $A - (B - C) = (A - B) - C$.

6. Para todos los conjuntos A y B, $A \cap (A \cup B) = A$.

7. Para todos los conjuntos A, B y C
$$(A - B) \cap (C - B) = A - (B \cup C).$$

8. Para todos los conjuntos A y B, si $A^c \subseteq B$ entonces, $A \cup B = U$.

9. Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ entonces $A \cup B \subseteq C$.

10. Para todos los conjuntos A y B, si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B^c = \emptyset$.

H **11.** Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq C$ entonces $A \cap (B \cap C)^c = \emptyset$.

H **12.** Para todos los conjuntos A, B y C
$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

13. Para todos los conjuntos A, B y C
$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C).$$

H **14.** Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \cap C \subseteq B \cap C$ y $A \cup C \subseteq B \cup C$, entonces $A \subseteq B$.

H **15.** Para todos los conjuntos A, B y C, si $A \cap C \subseteq B \cap C$ y $A \cup C \subseteq B \cup C$, entonces $A = B$.

16. Para todos los conjuntos A y B, si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \times B = \emptyset$.

17. Para todos los conjuntos A y B, si $A \subseteq B$ entonces $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.

18. Para todos los conjuntos A y B, $\mathscr{P}(A \cup B) \subseteq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

H **19.** Para todos los conjuntos A y B, $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$.

20. Para todos los conjuntos A y B, $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

21. Para todos los conjuntos A y B, $\mathscr{P}(A \times B) = \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$.

22. Escriba una negación para cada uno de los siguientes enunciados. Indicando cuál es verdadero, el enunciado o su negación. Justifique sus respuestas.
a. $\forall$ los conjuntos S, $\exists$ un conjunto T tal que $S \cap T = \emptyset$.
b. $\exists$ un conjunto S tal que $\forall$ los conjuntos T, $S \cup T = \emptyset$.

H **23.** Sea $S = \{a, b, c\}$ y para cada entero $i = 0, 1, 2, 3$, sea S_i el conjunto de todos los subconjuntos de S que tienen i elementos. Liste los elementos en S_0, S_1, S_2 y S_3. ¿Es $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ una partición de $\mathscr{P}(S)$?

24. Sea $S = \{a, b, c)$ y sea S_a el conjunto de todos los subconjuntos de S que contiene a a, sea S_b el conjunto de todos los subconjuntos de S que contienen a b, sea S_c el conjunto de todos los subconjuntos de S que contienen a c y sea $S_\emptyset$ el conjunto cuyo único elemento es $\emptyset$. ¿Es $\{S_a, S_b, S_c, S_\emptyset\}$ un partición de $\mathscr{P}(S)$?

25. Sea $A = \{t, u, v, w\}$ y sea S_1 el conjunto de todos los subconjuntos de A que no contienen a w y S_2 el conjunto de todos los subconjuntos de A que contienen a w.
    a. Encuentre a S_1 **b.** Determine a S_2.
    c. ¿Son S_1 y S_2 disjuntos?
    d. compare los tamaños de S_1 y S_2.
    e. ¿Cuántos elementos se encuentran en $S_1 \cup S_2$?
    f. ¿Cuál es la relación entre $S_1 \cup S_2$ y $\mathscr{P}(A)$?

***H* ✶ 26.** El problema siguiente, fue ideado por Ginger Bolton, lo presentó en la edición de enero de 1989 del *College Mathematics Journal* (Vol. 20, No. 1, p. 68): Dado un número entero positivo $n \geq 2$, sea S el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de $\{2, 3, \ldots, n\}$. Para cada $S_i \in S$, sea P_i el producto de los elementos de S_i. Demuestre o refute que

$$\sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} P_i = \frac{(n+1)!}{2} - 1.$$

En los ejercicios 27 y 28 dé una razón para cada paso de la deducción.

27. Para todos los conjuntos A, B y C,

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Demostración: Suponga que A, B y C son conjuntos cualesquiera. Entonces,

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= C \cap (A \cup B) && \text{por } \underline{\text{(a)}}\\ &= (C \cap A) \cup (C \cap B) && \text{por } \underline{\text{(b)}}\\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) && \text{por } \underline{\text{(c)}}.\end{aligned}$$

***H* 28.** Para todos los conjuntos A, B y C,

$$(A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C).$$

Demostración: Suponga que A, B y C son conjuntos cualesquiera. Entonces,

$$\begin{aligned}(A \cup B) - (C - A) &= (A \cup B) \cap (C - A)^c && \text{por } \underline{\text{(a)}}\\ &= (A \cup B) \cap (C \cap A^c)^c && \text{por } \underline{\text{(b)}}\\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cap C)^c && \text{por } \underline{\text{(c)}}\\ &= (A \cup B) \cap ((A^c)^c \cup C^c) && \text{por } \underline{\text{(d)}}\\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C^c) && \text{por } \underline{\text{(e)}}\\ &= A \cup (B \cap C^c) && \text{por } \underline{\text{(f)}}\\ &= A \cup (B - C) && \text{por } \underline{\text{(g)}}\end{aligned}$$

***H* 29.** Faltan algunos pasos de la siguiente demostración de que, para todos los conjuntos $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$. Indique qué son y, después, escriba la demostración correctamente.

Demostración: Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Entonces,

$$\begin{aligned}(A \cup B) - C &= (A \cup B) \cap C^c && \text{por la ley de diferencia de conjuntos}\\ &= (A \cup C^c) \cup (B \cap C^c) && \text{por la ley distributiva}\\ &= (A - C) \cup (B - C) && \text{por la ley de diferencia de conjuntos}\end{aligned}$$

En los ejercicios 30 y 40, construya una demostración algebraica para el enunciado dado. Cite una propiedad del teorema 6.2.2 para cada paso.

30. Para todos los conjuntos A, B y C

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

31. Para todos los conjuntos A y B, $A \cup (B - A) = A \cup B$.

32. Para todos los conjuntos A y B, $(A - B) \cup (A \cap B) = A$.

33. Para todos los conjuntos A y B, $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

34. Para todos los conjuntos A, B y C,

$$(A - B) - C = A - (B \cup C).$$

35. Para todos los conjuntos A y B, $A - (A - B) = A \cap B$.

36. Para todos los conjuntos A y B, $((A^c \cup B^c) - A)^c = A$.

37. Para todos los conjuntos A y B, $(B^c \cup (B^c - A))^c = B$.

38. Para todos los conjuntos A y B, $A - (A \cap B) = A - B$.

***H* 39.** Para todos los conjuntos A y B,

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

40. Para todos los conjuntos A, B y C,

$$(A - B) - (B - C) = A - B.$$

En los ejercicios del 41 al 43 simplifique la expresión dada. Cite una propiedad del teorema 6.2.2 en cada paso.

***H* 41.** $A \cap ((B \cup A^c) \cap B^c)$

42. $(A - (A \cap B)) \cap (B - (A \cap B))$

43. $((A \cap (B \cup C)) \cap (A - B)) \cap (B \cup C^c)$

44. Considere la siguiente propiedad de conjuntos: para todos los conjuntos A y B, $A - B$ y B son disjuntos.
    a. Utilice un argumento de elemento para obtener la propiedad.
    b. Utilice un argumento algebraico para deducir la propiedad (mediante la aplicación de propiedades del teorema 6.2.2).
    c. Comente sobre qué método encontró más fácil.

45. Considerar la siguiente propiedad de conjuntos: para todos los conjuntos A, B y C, $(A - B) \cup (B - C) = (A \cup B) - (B \cap C)$.
    a. Utilice un argumento de elemento para obtener la propiedad.
    b. Utilice un argumento algebraico para deducir la propiedad (mediante la aplicación de propiedades del teorema 6.2.2).
    c. Comente sobre qué método encontró más fácil.

Definición: Dados los conjuntos A y B, la **diferencia simétrica de A y B**, que se denota por $A \bigtriangleup B$ es

$$A \bigtriangleup B = (A - B) \cup (B - A).$$

46. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{5, 6, 7, 8\}$. Determine cada uno de los siguientes conjuntos:
    a. $A \bigtriangleup B$ b. $B \bigtriangleup C$
    c. $A \bigtriangleup C$ d. $(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C$

Con referencia a la definición de diferencia simétrica dada antes. Demuestre cada una de las expresiones de los ejercicios 47 al 52, suponiendo que A, B y C son todos subconjuntos de un conjunto universo U.

47. $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$

48. $A \bigtriangleup \emptyset = A$

49. $A \bigtriangleup A^c = U$

50. $A \bigtriangleup A = \emptyset$

***H* 51.** Si $A \bigtriangleup C = B \bigtriangleup C$, entonces $A = B$.

H **52.** $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

H **53.** Deduzca la identidad de conjuntos $A \cup (A \cap B) = A$ de las propiedades enumeradas en el teorema de la 6.2.2(l) a la (9). Comience demostrando que para todo subconjunto B de un conjunto universo U, $U \cup B = U$. Después intersecte ambos lados con A y deduzca la identidad.

54. Deduzca la identidad de conjuntos $A \cap (A \cup B) = A$ de las propiedades listadas en el teorema de la 6.2.2(l) a la (9). Inicie demostrando que para todos los subconjuntos B de un conjunto universo U, $\emptyset = \emptyset \cap B$. Después, realice la unión de ambas partes con A y deduzca la identidad.

Respuestas del autoexamen

1. hacen que el miembro izquierdo sea diferente del lado derecho *(O: resultan valores diferentes en los dos lados de la ecuación)* 2. *citar una de las propiedades de teorema 6.2.2 (O: dar una razón)* 3. *exactamente*

6.4 Álgebra booleana, paradoja de Russell y el problema del paro

Nadie nos expulsará del paraíso creado por Cantor.

—David Hilbert (1862-1943)

La tabla 6.4.1 resume las principales características de las equivalencias lógicas del teorema 2.1.1 y las propiedades de conjuntos del teorema 6.2.2. Observe qué tan similares son las entradas de las dos columnas.

Equivalencias lógicas	Propiedades de conjuntos
Para todas las variables de enunciado p, q y r:	Para todos los conjuntos A, B y C:
a. $p \vee q \equiv q \vee p$ b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$	a. $A \cup B = B \cup A$ b. $A \cap B = B \cap A$
a. $p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge (q \wedge r)$ b. $p \vee (q \vee r) \equiv p \vee (q \vee r)$	a. $A \cup (B \cup C) \equiv A \cup (B \cup C)$ b. $A \cap (B \cap C) \equiv A \cap (B \cap C)$
a. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ b. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	a. $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$ b. $A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$
a. $p \vee \mathbf{c} \equiv p$ b. $p \wedge \mathbf{t} \equiv p$	a. $A \cup \emptyset = A$ b. $A \cap U = A$
a. $p \vee \sim p \equiv \mathbf{t}$ b. $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{c}$	a. $A \cup A^c = U$ b. $A \cap A^c = \emptyset$
$\sim(\sim p) \equiv p$	$(A^c)^c = A$
a. $p \vee p \equiv p$ b. $p \wedge p \equiv p$	a. $A \cup A = A$ b. $A \cap A = A$
a. $p \vee \mathbf{t} \equiv \mathbf{t}$ b. $p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$	a. $A \cup U = U$ b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
a. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ b. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
a. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ b. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	a. $A \cup (A \cap B) \equiv A$ b. $A \cap (A \cup B) \equiv A$
a. $\sim \mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ b. $\sim \mathbf{c} \equiv \mathbf{t}$	a. $U^c = \emptyset$ b. $\emptyset^c = U$

Tabla 6.4.1

Si hace que $\vee$ (*o*) corresponda a $\cup$ (unión), $\wedge$ (*y*) corresponda a $\cap$ (intersección), **t** (una tautología) corresponda a U (un conjunto universo), **c** (una contradicción) corresponda a $\emptyset$ (el conjunto vacío) y $\sim$ (negación) corresponda a ^{c} (complementación), entonces, puede ver que la estructura del conjunto de las formas de enunciado con las operaciones $\vee$ y $\wedge$ es esencialmente idéntica a la estructura del conjunto de subconjuntos de un conjunto universo con operaciones $\cup$ y $\cap$. De hecho, ambos son casos especiales de la misma estructura general, conocida como *álgebra booleana*. La idea esencial de una álgebra booleana fue introducida por el autodidacta inglés matemático/lógico George Boole en 1847 en un libro titulado *Análisis matemático de la lógica*. Durante el resto del siglo XIX, Boole y otros desarrollaron y aclararon el concepto hasta llegar a la forma en que la usamos hoy en día.

En esta sección se muestra cómo deducir las diferentes propiedades asociadas con una álgebra booleana de un conjunto de exactamente cinco axiomas.

• Definición: Álgebra booleana

Una **álgebra booleana** es un conjunto B junto con dos operaciones, que generalmente son denotadas con $+$ y $\cdot$, tal que para todas a y b en B tanto $a + b$ como $a \cdot b$ están en B y se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Leyes conmutativas:* Para todas a y b en B,

$$a)\ a + b = b + a \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot b = b \cdot a.$$

2. *Leyes asociativas:* Para todas a, b y c en B,

$$a)\ (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad b)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

3. *Leyes distributivas:* Para todas a, b y c en B,

$$a)\ a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

4. *Leyes de identidad:* Existen elementos distintos 0 y 1 en B tal que para toda a en B,

$$a)\ a + 0 = a \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot 1 = a.$$

5. *Leyes de complemento:* Para cada a en B, existe un elemento en B, que se denota por $\overline{a}$ y se llama el **complemento** o **negación** de a, tal que

$$a)\ a + \overline{a} = 1 \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot \overline{a} = 0.$$

En cualquier álgebra booleana, el complemento de cada elemento es único, las cantidades 0 y 1 son únicos y se deducen identidades análogas a las del teorema 2.1.1 y el teorema 6.2.2.

Teorema 6.4.1 Propiedades del álgebra booleana

Sea B cualquier álgebra booleana.

1. *Unicidad de la ley de complemento:* Para toda a y x en B, si $a + x = 1$ y $a \cdot x = 0$ entonces $x = \overline{a}$.

2. *Unicidad de* 0 *y* 1*:* Si existe x en B tal que $a + x = a$ para toda a en B, entonces, $x = 0$ y si existe y en B tal que $a \cdot y = a$ para toda a en B, entonces $y = 1$.

3. *Ley del doble complemento:* Para toda $a \in B$, $\overline{(\overline{a})} = a$.

continúa en la página 376

4. *Ley de idempotencia:* Para toda $a \in B$,

$$a)\ a + a = a \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot a = a.$$

5. *Ley de acotamiento universal:* Para toda $a \in B$,

$$a)\ a + 1 = 1 \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot 0 = 0.$$

6. *Leyes de De Morgan:* Para todas a y $b \in B$,

$$a)\ \overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \quad \text{y} \quad b)\ \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}.$$

7. *Leyes de absorción:* Para todas a y $b \in B$,

$$a)\ (a + b) \cdot a = a \quad \text{y} \quad b)\ (a \cdot b) + a = a.$$

8. *Complementos de* 0 *y* 1*:*

$$a)\ \overline{0} = 1 \quad \text{y} \quad b)\ \overline{1} = 0.$$

Demostración:

Parte 1. Unicidad de la ley de complemento
Suponga que a y x son elementos particulares de B arbitrariamente elegidos, que satisfacen la siguiente hipótesis: $a + x = 1$ y $a \cdot x = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x &= x \cdot 1 && \text{porque 1 es una identidad para } \cdot \\
&= x \cdot (a + \overline{a}) && \text{por la ley de complemento para } + \\
&= x \cdot a + x \cdot \overline{a} && \text{por la ley distributiva para } \cdot \text{ sobre } + \\
&= a \cdot x + x \cdot \overline{a} && \text{por la ley conmutativa para } \cdot \\
&= 0 + x \cdot \overline{a} && \text{por hipótesis} \\
&= a \cdot \overline{a} + x \cdot \overline{a} && \text{por la ley de complemento para } \cdot \\
&= (\overline{a} \cdot a) + (\overline{a} \cdot x) && \text{por la ley conmutativa para } \cdot \\
&= \overline{a} \cdot (a + x) && \text{por la ley distributiva para } \cdot \text{ sobre } + \\
&= \overline{a} \cdot 1 && \text{por hipótesis} \\
&= \overline{a} && \text{porque 1 es una identidad para } \cdot.
\end{aligned}$$

Las demostraciones de las otras partes del teorema se analizan en los ejemplos que siguen y en los ejercicios.

Es posible que observe que todas las partes de la definición de una álgebra booleana y la mayor parte del teorema 6.4.1 contienen enunciados apareados. Por ejemplo, las leyes distributivas establecen que para toda a, b y c en B,

$$a)\ a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$$

y las leyes de identidad establecen que para toda a en B,

$$a)\ a + 0 = a \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot 1 = a.$$

Observe que cada uno de los enunciados apareados pueden obtenerse de otro intercambiando todos los signos $+$ y $\cdot$ e intercambiando 1 y 0. Dichos intercambios transforman cualquier identidad booleana en su identidad **doble**. Se puede demostrar que el doble de cualquier identidad booleana es también una identidad. Este hecho a menudo se llama el **principio de la dualidad** para una álgebra booleana.

Ejemplo 6.4.1 Demostración de la ley del complemento doble

Demuestre que para todos los elementos a en una álgebra booleana B, $\overline{(\overline{a})} = a$.

Solución Inicie suponiendo que B es una álgebra booleana y a es cualquier elemento de B. La base de la demostración es la unicidad de la ley de complemento: que cada elemento en B tiene un complemento único que satisface ciertas ecuaciones con respecto a éste. Así si se puede demostrar que a satisface esas ecuaciones con respecto a $\overline{a}$, entonces, a debe ser el complemento de $\overline{a}$.

Teorema 6.4.1(3) Ley del doble complemento

Para todo elemento a en una álgebra booleana B, $\overline{(\overline{a})} = a$.

Demostración:

Suponga que B es una álgebra booleana y a es cualquier elemento de B. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{a} + a &= a + \overline{a} && \text{por la ley conmutativa} \\ &= 1 && \text{por la ley de complemento para 1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot a &= a \cdot \overline{a} && \text{por la ley conmutativa} \\ &= 0 && \text{por la ley de complemento para 0.} \end{aligned}$$

Por tanto a satisface las dos ecuaciones con respecto a $\overline{a}$ que son satisfechos por el complemento de $\overline{a}$. Del hecho de que el complemento de a es único, se concluye que $\overline{(\overline{a})} = a$.

■

Ejemplo 6.4.2 Demostración de una ley de idempotencia

Complete los espacios en blanco en la siguiente demostración que para todos los elementos a en una álgebra booleana B, $a + a = a$.

Demostración:

Suponga que B es una álgebra booleana y a es cualquier elemento de B. Entonces,

$$\begin{aligned} a &= a + 0 && \underline{\quad (a) \quad} \\ &= a + (a \cdot \overline{a}) && \underline{\quad (b) \quad} \\ &= (a + a) \cdot (a + \overline{a}) && \underline{\quad (c) \quad} \\ &= (a + a) \cdot 1 && \underline{\quad (d) \quad} \\ &= a + a && \underline{\quad (e) \quad} \end{aligned}$$

Solución

a. porque 0 es una identidad para $+$

b. por la ley de complemento para $\cdot$

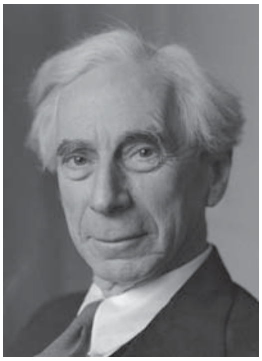
c. por la ley distributiva para $+$ sobre $\cdot$

d. por la Ley de complemento para $+$

e. porque 1 es una identidad para $\cdot$

■

Paradoja de Russell



Sylvia Salmi

Bertrand Russell (1872-1970)

A principios del siglo XX, la teoría abstracta de conjuntos había ganado tal aceptación que un gran número de matemáticos estaban trabajando duro para demostrar que todas las matemáticas podrían construirse sobre las bases de la teoría de conjuntos. En medio de esta actividad, el matemático y filósofo inglés Bertrand Russell descubrió una "paradoja" (realmente una verdadera contradicción) que parecía hacer temblar la esencia misma de las bases. La paradoja supone la definición de conjunto de Cantor como "cualquier colección en un todo de objetos definidos y separados de nuestra intuición o de nuestro pensamiento".

Paradoja de Russell: La mayoría de los conjuntos no son elementos de sí mismos. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros no es un entero y el conjunto de todos los caballos no es un caballo. Sin embargo, podemos imaginar la posibilidad de que un conjunto sea un elemento de sí mismo. Por ejemplo, el conjunto de todas las ideas abstractas puede ser considerado una idea abstracta. Si se nos permite utilizar cualquier descripción de una propiedad como la propiedad de definición de un conjunto, podemos hacer que S sea el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos:

$$S = \{A \mid A \text{ es un conjunto y } A \notin A\}.$$

¿Es S un elemento de sí mismo?

La respuesta no es ni sí ni no. Porque si $S \in S$, entonces S satisface la propiedad de definición para S y por tanto $S \notin S$. Pero si $S \notin S$, entonces S es un conjunto tal que $S \notin S$ y así S satisface la propiedad de definición para S, lo que implica que $S \in S$. Por tanto, ni es $S \in S$ ni $S \notin S$, lo que es una contradicción.

Para ayudar a explicar su descubrimiento a laicos, Russell ideó un rompecabezas, el rompecabezas del barbero, cuya solución presenta la misma lógica que su paradoja.

Ejemplo 6.4.3 El rompecabezas del barbero

En una determinada ciudad hay un barbero hombre que afeita a todos esos hombres y sólo esos hombres, que no se afeitan a sí mismos. *Pregunta*: ¿El barbero se afeita a sí mismo?

Solución Ni sí ni no. Si el barbero se afeita a sí mismo, es miembro de la clase de hombres que se afeitan a sí mismos. Pero ningún miembro de esta clase es afeitado por el barbero y así el barbero *no* se afeita a sí mismo. Por otra parte, si el barbero no se afeita a sí mismo, pertenece a la clase de hombres que no se afeitan a sí mismos. Pero el barbero afeita a cada uno en esta clase, por lo que el barbero *se* afeita a sí mismo. ■

Pero ¿cómo puede la respuesta ser ni sí ni no? Sin duda cualquier barbero se afeita o no a sí mismo. Podría intentar pensar en circunstancias que harían que la paradoja desaparezca. Por ejemplo, tal vez ocurre que el barbero no tenga nada de barba y nunca se afeita. Pero una condición del rompecabezas es que el barbero es un hombre que afeita a *todos* aquellos hombres que no se afeitan a sí mismos. Si él no se afeita, entonces no se afeita a sí mismo, en cuyo caso él se afeitó con el barbero y la contradicción sigue estando presente por siempre. Similarmente están condenados al fracaso, otros intentos de resolver la paradoja considerando los detalles de la situación del barbero.

Así que vamos a aceptar el hecho de que la paradoja no tiene ninguna solución fácil y vamos a ver a dónde conduce ese pensamiento. Dado que el barbero ni se afeita a sí mismo ni no se afeita a sí mismo, la frase no afeitarse "el barbero se afeita a sí mismo" no es ni verdadera ni falsa. Pero la frase surgió de forma natural a partir de una descripción de la situación. Si realmente existió la situación, entonces la frase tendría que ser verdadera o falsa. Por tanto, nos vemos obligados a concluir que la situación descrita en el rompecabezas simplemente no puede existir en el mundo como lo conocemos.

De forma similar, la conclusión que se deduce de la misma paradoja de Russell es que el objeto S no es un conjunto. Ya que si realmente se tratara de un conjunto, en el sentido de satisfacer las propiedades generales de conjuntos que nosotros hemos estado suponiendo, entonces tampoco sería o no un elemento de sí mismo.

En los años siguientes al descubrimiento de Russell, se encontraron varias formas de definir los conceptos básicos de la teoría de conjuntos para evitar su contradicción. La forma utilizada en este libro requiere que, excepto para el conjunto potencia, cuya existencia está garantizada por un axioma, cada vez que se defina un conjunto usando un predicado como una propiedad de definición, también debe ponerse como condición que el conjunto es un subconjunto de un conjunto conocido. Este método no nos permite hablar del "conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos". Sólo se puede hablar del "conjunto de todos los conjuntos que son subconjuntos de algún conjunto conocido y que no son elementos de sí mismos". Cuando se hace esta restricción, la paradoja de Russell deja de ser contradictoria. Esto es lo que sucede:

Sea U un conjunto universo y suponga que todos los conjuntos bajo análisis son subconjuntos de U. Sea

$$S = \{A \mid A \subseteq U \text{ y } A \notin A\}.$$

En la paradoja de Russell, ambas implicaciones

$$S \in S \to S \notin S \quad \text{y} \quad S \notin S \to S \in S$$

se demostraron y la conclusión contradictoria

$$\text{ni } S \in S \quad \text{ni} \quad S \notin S$$

por tanto, es deducida. En la situación en la que todos los conjuntos bajo análisis sean subconjuntos de U, la implicación $S \in S \to S \notin S$ se demuestra casi del mismo modo como con la paradoja de Russell: (Suponga que $S \in S$. Entonces, por definición de S, $S \subseteq U$ y $S \notin S$. En particular, $S \notin S$.) Por otra parte, de la suposición de que $S \notin S$ podemos sólo deducir que el enunciado "$S \subseteq U$ y $S \notin S$" es falso. Por una de las leyes de De Morgan, esto significa que "$S \nsubseteq U$ o $S \in S$". Ya que $S \in S$ contradiría la suposición de que $S \notin S$, lo eliminamos y concluimos que $S \nsubseteq U$. En otras palabras, la única conclusión que podemos sacar es que la aparente "definición" de S es defectuosa, es decir, que S no es un conjunto en U.

Kurt Gödel (1906-1978)

El descubrimiento de Russell tuvo un profundo impacto en las matemáticas porque a pesar de su contradicción pudieron desaparecer por definiciones más cuidadosas, su existencia causó que la gente se preguntase si había otras contradicciones. En 1931, Kurt Gödel demostró que no es posible demostrar, de una manera matemáticamente rigurosa, que la matemática está libre de contradicciones. Se podría pensar que resultado de Gödel habría causado que los matemáticos renunciaran desesperadamente a su trabajo, pero eso no ha sucedido. Por el contrario, ha habido más actividad matemática a partir de 1931 que en cualquier otro periodo en la historia.

El problema del paro

Mucho antes de la construcción de una computadora electrónica, Alan M. Turing (1912-1954) dedujo un teorema profundo acerca de cómo tendrían que trabajar dichas computadoras. El argumento que él utilizó es similar al de la paradoja de Russell. También está relacionado con los utilizados por Gödel para demostrar su teorema y con los usados por Cantor para demostrar que es imposible escribir todos los números reales en una lista infinita, incluso considerando un intervalo infinitamente largo de tiempo (vea la sección 7.4 y el capítulo 12).

Si tiene cierta experiencia en programación de computadoras, debe saber lo mal que un bucle infinito puede bloquear a un sistema informático. Sería útil poder procesar previamente un programa y su conjunto de datos al ejecutarlo usando un programa de comprobación que determine si la ejecución del programa dado con el conjunto de datos dado dará como resultado un bucle infinito. ¿Se puede escribir un algoritmo para este programa? ¿En otras palabras, se puede escribir un algoritmo que acepte cualquier algoritmo X y cualquier conjunto de datos D como entrada y que después imprima "alto" o "bucles infinitos" para indicar ya sea que X termina en un número finito de pasos o que hay bucles infinitos cuando se ejecuta con el conjunto de datos D? En la década de 1930, Turing demostró que la respuesta a esta pregunta es no.

Teorema 6.4.2

No existe un algoritmo de cómputo que acepte cualquier algoritmo X y un conjunto de datos D como entrada y que después diga “pare” o “bucles infinitos” para indicar si X termina o no en un número finito de pasos cuando se ejecuta X con el conjunto de datos D.

Demostración (por contradicción):

Suponga que hay un algoritmo, ComprobaciónPare, tal que si se introducen en un algoritmo X y un conjunto de datos D, entonces,

ComprobaciónPare(X, D) imprime

“pare”	si X termina en un número finito de pasos cuando se ejecuta con el conjunto de datos D
o	
“bucles infinitos”	si X no termina en un número finito de pasos cuando se ejecuta con el conjunto de datos D.

[Para demostrar que no puede existir ningún algoritmo, tal como ComprobaciónPare, se va a deducir una contradicción.]

Observe que la secuencia de caracteres que componen un algoritmo X puede considerarse en sí misma como un conjunto de datos. Por tanto, es posible considerar la ejecución de ComprobaciónPare con entrada (X, X). Se define un nuevo algoritmo, Prueba, como sigue: para cualquier entrada de algoritmo X,

Prueba(X)

bucles infinitos si ComprobaciónPare(X, X) imprime “pare”

o

para si ComprobaciónPare(X, X) imprime “bucles infinitos”.

Ahora al ejecutar el algoritmo Prueba con la prueba de la entrada. Si Prueba(Prueba) termina después de un número finito de pasos, entonces, el valor de ComprobaciónPare (Prueba, Prueba) es “pare” y así Prueba(Prueba) crea un bucle infinito.

Por otra parte, si Prueba(Prueba) no termina después de un número finito de pasos, entonces ComprobaciónPare(Prueba, Prueba) imprime “bucles infinitos” y así termina Prueba(Prueba).

Los dos párrafos anteriores muestran bucles infinitos de Prueba(Prueba) y también pare. Esto es una contradicción. Pero la existencia de prueba se deduce lógicamente de la suposición de la existencia de un algoritmo de ComprobaciónPare que puede comprobar que cualquier algoritmo y conjunto de datos termina. *[Por tanto la suposición debe ser falsa y no existe dicho algoritmo.]*

En los últimos años se han encontrado axiomas de la teoría de conjuntos que garantizan que la paradoja de Russell no es insuficiente para tratar con toda la gama de forma de objetos definidos recursivamente en ciencias de la computación y se ha desarrollado una nueva teoría de conjuntos “que carece de fundamento”. Además, los científicos de la computación y lógicos que trabajan con programas que permiten a las computadoras procesar el lenguaje natural han visto la importancia de explorar aún más los tipos de cuestiones semánticas planteadas por el rompecabezas del barbero y están desarrollando nuevas teorías de la lógica para tratar con ellas.

Autoexamen

1. Comparando entre la estructura del conjunto de formas de enunciado y el conjunto de subconjuntos de un conjunto universo, la operación *o* $\vee$ corresponde a _____, la operación *y* $\wedge$ corresponde a _____, una tautología **t** corresponde a _____, una contradicción **c** corresponde a _____ y la operación de negación, denota $\sim$, que corresponde a _____.

2. Las operaciones $+$ y $\cdot$ en un álgebra booleana son generalizaciones de las operaciones de _____ y _____ en el conjunto todas las formas de enunciado en un número finito dado de variables y de las operaciones de _____ y _____ en el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado.

3. Russell demostró que la siguiente proposición “definición del conjunto” podría en realidad no definir un conjunto: _____.

Conjunto de ejercicios 6.4

En los ejercicios 1 al 3 suponga que B es una álgebra booleana con operaciones $+$ y $\cdot$. Dé las razones que necesite para completar los espacios en blanco en las demostraciones, pero no utilice ninguna parte del teorema 6.4.1 a menos que ya se haya demostrado. Sin embargo, puede utilizar cualquier parte de la definición de una álgebra booleana y los resultados de los ejercicios anteriores.

1. Para toda a en B, $a \cdot a = a$.

Demostración: Sea a cualquier elemento de B. Entonces,

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 && \underline{\text{(a)}} \\ &= a\cdot(a+\overline{a}) && \underline{\text{(b)}} \\ &= (a\cdot a)+(a\cdot\overline{a}) && \underline{\text{(c)}} \\ &= (a\cdot a)+0 && \underline{\text{(d)}} \\ &= a\cdot a && \underline{\text{(e)}}. \end{aligned}$$

2. Para toda a en B, $a + 1 = 1$.

Demostración: Sea a cualquier elemento de B. Entonces

$$\begin{aligned} a+1 &= a+(a+\overline{a}) && \underline{\text{(a)}} \\ &= (a+a)+\overline{a} && \underline{\text{(b)}} \\ &= a+\overline{a} && \text{por el ejemplo 6.4.2} \\ &= 1 && \underline{\text{(c)}}. \end{aligned}$$

3. Para todas a y b en B, $(a + b) \cdot a = a$.

Demostración: Sea a y b cualesquiera elementos de B. Entonces

$$\begin{aligned} (a+b)\cdot a &= a\cdot(a+b) && \underline{\text{(a)}} \\ &= a\cdot a + a\cdot b && \underline{\text{(b)}} \\ &= a + a\cdot b && \underline{\text{(c)}} \\ &= a\cdot 1 + a\cdot b && \underline{\text{(d)}} \\ &= a\cdot(1+b) && \underline{\text{(e)}} \\ &= a\cdot(b+1) && \underline{\text{(f)}} \\ &= a\cdot 1 && \text{por el ejercicio 2} \\ &= a && \underline{\text{(g)}}. \end{aligned}$$

En los ejercicios del 4 al 10 suponga que B es una álgebra booleana con operaciones $+$ y $\cdot$. Demuestre cada enunciado sin necesidad de utilizar ninguna parte del teorema 6.4.1 a menos que ya se haya demostrado. Sin embargo, se puede utilizar cualquier parte de la definición de una álgebra booleana y los resultados de ejercicios anteriores.

4. Para toda a en B, $a \cdot 0 = 0$.

5. Para todas a y b en B, $(a \cdot b) + a = a$

6. **a.** $\overline{0} = 1$.
   b. $\overline{1} = 0$

7. **a.** Hay un único elemento de B que es una identidad para $+$.
   H **b.** Hay un único elemento de B que es una identidad para $\cdot$.

8. Para todas a y b en B, $\overline{a\cdot b} = \overline{a}+\overline{b}$. (*Sugerencia:* demuestre que $(a\cdot b)+(\overline{a}+\overline{b}) = 1$ y que $(a\cdot b)\cdot(\overline{a}+\overline{b}) = 0$ y utilice el hecho de que $a \cdot b$ tiene un complemento único.)

9. Para todas a y b en B, $\overline{a+b} = \overline{a}\cdot\overline{b}$.

H **10.** Para todas x, y y z en B, si $x + y = x + z$ y $x \cdot y = x \cdot z$, entonces $y = z$.

11. Sea $S = \{0, 1\}$ y defina las operaciones $+$ y $\cdot$ en S con las siguientes tablas:

$+$	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

a. Demuestre que los elementos de S satisfacen las siguientes propiedades:
   i) ley conmutativa para $+$
   ii) ley conmutativa para $\cdot$
   iii) ley asociativa para $+$
   iv) ley asociativa para $\cdot$
   H **v)** ley distributiva para $+$ sobre $\cdot$
   vi) ley distributiva para $\cdot$ sobre $+$

H **b.** Demuestre que 0 es un elemento identidad para $+$ y que 1 es un elemento identidad para $\cdot$.

c. Defina $\overline{0} = 1$ y $\overline{1} = 0$. Demuestre que para toda a en S, $a+\overline{a} = 1$ y $a\cdot\overline{a} = 0$. Se deduce de los incisos del *a*) al *c*) que S es un álgebra booleana con operaciones $+$ y $\cdot$.

H $\ast$ **12.** Demuestre que las leyes asociativas de una álgebra booleana se pueden omitir de la definición. Es decir, demuestre que las leyes asociativas se pueden deducir de las otras leyes en la definición.

En los ejercicios del 13 al 18 determine si cada frase es un enunciado. Explique sus respuestas.

13. Esta frase es falsa.

14. Si $1 + 1 = 3$ entonces, $1 = 0$.

15. $\boxed{\text{La frase en este cuadro es una mentira.}}$

16. Todos los enteros positivos con cuadrados negativos son primos.

17. Esta frase es falsa o $1 + 1 = 3$.

18. Esta frase es falsa y $1 + 1 = 2$.

19. a. Suponiendo que la frase siguiente es un enunciado, demuestre que $1 + 1 = 3$:

    si esta frase es verdadera, entonces $1 + 1 = 3$.

    b. ¿qué se puede deducir del inciso *a*) acerca el estado de “esta frase es verdadera”? ¿Por qué? (En este ejemplo se conoce como **la paradoja de Löb**.)

H 20. Las siguientes dos frases fueron concebidas por el lógico Saul Kripke. Si bien no son intrínsecamente paradójicas, podrían ser paradójicas bajo ciertas circunstancias. Describa tales circunstancias.

(i) La mayoría de las afirmaciones de Nixon acerca del Watergate son falsas.

(ii) Todo lo que Jones dice acerca del Watergate es verdadero.

(*Sugerencia*: Supongamos que Nixon dice *ii*) y el único enunciado que Jones hace acerca de Watergate es *i*).)

21. ¿Puede existir un programa que tenga como salida una lista de todos los programas de computadora que no liste a ellos mismos en su salida? Explique su respuesta.

22. ¿Puede existir un libro que se refiera a todos aquellos libros y sólo aquellos libros que no hagan referencia a sí mismos? Explique su respuesta.

23. Algunos adjetivos son descriptivos de sí mismos (por ejemplo, la palabra *polisilábica es* polisilábica) mientras que otros no lo son (por ejemplo, la palabra *monosilábica* no es monosilábica). La palabra heterológica se refiere a un adjetivo que no se describe por sí mismo. ¿Es *heterológica* heterológica? Explique su respuesta.

24. Por extraño que pueda parecer, es posible dar una definición verbal precisa de un entero que, de hecho, no es una definición para todos los enteros. Lo siguiente fue ideado por un bibliotecario inglés, G. G. Berry y comunicado por Bertrand Russell. Explique cómo conduce a una contradicción. Sea n “el entero más pequeño no descrito con menos de 12 palabras en inglés”. (Note que el número total de cadenas que consiste en 11 o menos palabras en inglés es finito.)

H 25. ¿Existe un algoritmo que, para una cantidad fija a y cualquier entrada de algoritmo X y el conjunto de datos D, pueda determinar si X imprime a cuando se ejecuta con el conjunto de datos D? Explique. (Este problema se llama el **problema de impresión**.)

26. Usar una técnica similar a la utilizada para deducir la paradoja de Russel para demostrar que para cualquier conjunto A, $\mathscr{P}(A) \not\subseteq A$.

Respuestas del autoexamen

1. la operación de unión $\cup$; la operación de intersección $\cap$; un conjunto universo U; el conjunto vacío $\emptyset$; la operación de complementación, que se denota con ^{c} 2. $\vee$; $\wedge$; $\cup$; $\cap$ 3. el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos