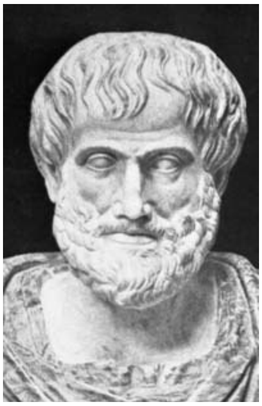
CAPÍTULO 2

LA LÓGICA DE LOS ENUNCIADOS COMPUESTOS



Bettmann/CORBIS

Aristóteles
(384 a.C.-322 a.C.)

Los primeros grandes tratados de lógica fueron escritos por el filósofo griego Aristóteles. Eran un conjunto de reglas para el razonamiento deductivo que estaban destinadas a servir de base para el estudio de todas las ramas del conocimiento. En el siglo XVII, el filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz concibió la idea de utilizar símbolos para mecanizar el proceso del razonamiento deductivo de la misma manera que la notación algebraica había mecanizado el proceso de razonamiento de los números y sus relaciones. La idea de Leibniz se realizó en el siglo XIX por los matemáticos ingleses George Boole y Augustus De Morgan, quienes fundaron el moderno tema de la lógica simbólica. Con investigación continúa hasta nuestros días, la lógica simbólica ha proporcionado, entre otras cosas, la base teórica para muchas áreas de la ciencia computacional, tales como el diseño de circuitos lógicos digitales (vea las secciones 2.4 y 2.5), la teoría de base de datos relacionales (vea la sección 8.1), la teoría de autómatas y la computabilidad (vea la sección 7.4 y el capítulo 12) y la inteligencia artificial (vea las secciones 3.3, 10.1 y 10.5).

2.1 Forma lógica y equivalencia lógica

La lógica es una ciencia de las leyes necesarias del pensamiento, sin la cual no se comprende ni se razona. —Immanuel Kant, 1785

El concepto central de la lógica deductiva es el concepto de forma de argumento. Un argumento es una secuencia de enunciados destinados a demostrar la verdad de una frase. La frase al final de la secuencia se llama la *conclusión* y los enunciados anteriores se llaman *premisas*. Para tener confianza en la conclusión que obtiene de un argumento, debe asegurarse de que las premisas sean aceptables por sus propios méritos o que son consecuencia de otros enunciados que se sabe que son verdaderos.

En lógica, la forma de un argumento se distingue de su contenido. El análisis lógico no le ayudará a determinar el valor intrínseco del contenido de un argumento, pero le ayudará a analizar la forma de un argumento para determinar si la verdad de la conclusión se desprende *necesariamente* de la verdad de las premisas. Por esta razón, la lógica a veces se define como la ciencia de la inferencia necesaria o la ciencia del razonamiento.

Considere los siguientes dos argumentos, por ejemplo. Aunque su contenido es muy diferente, su forma lógica es la misma. Ambos argumentos son *válidos* en el sentido de que si sus premisas son verdaderas, entonces sus conclusiones también deben ser verdaderas. (En la sección 2.3 aprenderá cómo comprobar si un argumento es válido).

Argumento 1 Si la sintaxis del programa es defectuosa o si los resultados de la ejecución del programa dan como resultado una división entre cero, la computadora va a generar un mensaje de error. Por tanto, si la computadora no genera un mensaje de error, entonces, la sintaxis del programa es correcta y la ejecución del programa no da como resultado una división entre cero.

Argumento 2 Si x es un número real tal que $x < -2$ o $x > 2$, entonces $x^2 > 4$. Por tanto, si $x^2 \not> 4$, entonces $x \not< -2$ y $x \not> 2$.

Para mostrar la forma lógica de estos argumentos, utilizamos letras del alfabeto (tal como p, q y r) para representar las frases componentes y la expresión "no p" se refiere a la frase "Este no es el caso que p". Entonces, la *forma lógica común* de ambos argumentos anteriores es la siguiente:

Si p o q, entonces r.
Por tanto, si no r, entonces no p y no q.

Ejemplo 2.1.1 Identificación de forma lógica

Complete los espacios en blanco para que el argumento b) tenga que la misma forma que el argumento a). Después represente la forma más común de los argumentos usando letras para presentar los enunciados compuestos.

a. Si Jane es una estudiante de la carrera de matemáticas o Jane es una estudiante de la carrera de ciencia computacional, entonces, Jane tendrá 150 en matemáticas.
Jane es una estudiante de ciencia computacional.
Por tanto, Jane tendrá 150 en matemáticas.

b. Si la lógica es fácil o ___1)___, entonces ___2)___.
Voy a estudiar mucho.
Por tanto, voy a obtener una A en este curso.

Solución

1. Voy a estudiar mucho.
2. Voy a obtener una A en este curso.

Forma común: Si p o q, entonces r.

q.

Por tanto, r. ■

Enunciados

La mayoría de las definiciones de la lógica formal se han desarrollado de acuerdo con la lógica natural o intuitiva utilizada por personas que han sido educadas para pensar con claridad y utilizar el lenguaje con cuidado. Las diferencias que existen entre la lógica formal e intuitiva son necesarias para evitar la ambigüedad y obtener consistencia.

En cualquier teoría matemática, se definen nuevos términos usando los que se han definido previamente. Sin embargo, este proceso tiene que comenzar en alguna parte. Unos pocos términos iniciales permanecen necesariamente indefinidos. En lógica, las palabras, *enunciado*, *verdadero* y *falso* son términos iniciales indefinidos.

• Definición

Un **enunciado** (o **proposición**) es una frase que es verdadera o falsa, pero no ambas.

Por ejemplo, "Dos más dos son cuatro" y "Dos más dos son cinco", ambos son enunciados, el primero porque es verdad y el segundo porque es falso. Por otro lado, lo verdadero o lo falso de "Él es un estudiante universitario" depende de la referencia para el pronombre *él*. Para algunos valores de *él* la frase es verdadera, para otros es falsa. Si la frase estuviera precedida de otros enunciados que hacen referencia clara al pronombre, entonces la frase sería un enunciado. Considerada en sí mismo, sin embargo, la frase no es ni verdadera ni falsa, por lo que no es un enunciado. En la sección 3.1, analizaremos la forma de transformar las frases de esta forma en enunciados.

Del mismo modo, "$x + y > 0$" no es un enunciado, porque para algunos valores de x y y la frase es verdadera, mientras que para otros es falsa. Por ejemplo, si $x = 1$ y $y = 2$, la frase es verdadera, si $x = -1$ y $y = 0$, la frase es falsa.

Enunciados compuestos

Ahora introducimos tres símbolos que se utilizan para construir expresiones lógicas más complicadas a partir de otras más simples. El símbolo $\sim$ denota *no*, $\wedge$ denota *y* y $\vee$ denota *o*. Dado un enunciado p, la frase "$\sim p$" se lee "no p" o "No es el caso que p" y se llama **negación de *p***. En algunos lenguajes de programación se utiliza el símbolo $\neg$ en lugar de $\sim$. Dado otro enunciado q, la frase "$p \wedge q$" se lee "p y q" y se llama **conjunción de *p* y *q***. La frase "$p \vee q$" se lee "p o q" y se llama **disyunción de *p* y *q***.

En las expresiones que incluyen al símbolo $\sim$, así como a $\wedge$ o a $\vee$, el **orden de las operaciones** especifica que $\sim$ se realiza primero. Por ejemplo, $\sim p \wedge q = (\sim p) \wedge q$. En expresiones lógicas, como en las expresiones algebraicas ordinarias, el orden de las operaciones se pueden controlar usando paréntesis. Así $\sim(p \wedge q)$ representa la negación de la conjunción de p y q. En esto, como en la mayoría de los tratamientos de lógica, los símbolos $\wedge$ y $\vee$ se consideran iguales en orden de operación y una expresión tal como $p \wedge q \vee r$ se considera ambigua. Esta expresión se debe escribir como $(p \wedge q) \vee r$ o como $p \wedge (q \vee r)$ para tener sentido.

Muchas palabras en español se traducen en lógica como $\wedge$, $\vee$ o $\sim$. Por ejemplo, la palabra, *pero* se traduce como *y* cuando vincula dos cláusulas independientes, como en "Jim es alto pero él no es pesado". En general, la palabra, *pero* se utiliza en lugar de *y* cuando la parte de la frase que sigue es, en cierta forma, inesperada. Otro ejemplo es el de las palabras *"ni-ni"*. Cuando Shakespeare escribió: "Ni un prestatario ni el prestamista son", significaba que, "No es un prestatario y no es un prestamista". Así que si p y q son enunciados, entonces,

p pero q	significa	p y q
ni p ni q	significa	$\sim p$ y $\sim q$.

Ejemplo 2.1.2 Traducción de español a símbolos: *Pero* y *Ni-ni*

Escriba cada una de las siguientes frases simbólicamente, haciendo h = "Hace calor" y s = "Hay sol".

a. No hace calor, pero hay sol.

b. No hace calor ni hay sol.

Solución

a. La frase dada es equivalente a "No hace calor y hay sol", que se puede escribir simbólicamente como $\sim h \wedge s$.

b. Decir que ni hace calor ni hay sol significa que no hace calor y no hay sol. Por tanto, la frase dada puede escribirse simbólicamente como $\sim h \wedge \sim s$. ■

La notación de las desigualdades involucra los enunciados *y* y *o*. Por ejemplo, si x, a y b son números reales dados, entonces,

$x \leq a$	significa	$x < a$	o	$x = a$
$a \leq x \leq b$	significa	$a \leq x$	y	$x \leq b$.

Observe que la desigualdad $2 \leq x \leq 1$ no la satisface ningún número real, ya que

$$2 \leq x \leq 1 \quad \text{significa} \quad 2 \leq x \quad \text{y} \quad x \leq 1,$$

y es falsa, para cualquier número x. Por la forma, el punto dado x, a y b son números reales *particulares*, que aseguran que las frases tales como "$x < a$" y "$x \geq b$" son ya sea verdaderas o falsas y por tanto se trata de enunciados.

Ejemplo 2.1.3 *Y*, *O* y desigualdades

Supongamos que x es un número real particular. Sea que p, q y r, simbolicen "$0 < x$", "$x < 3$" y "$x = 3$", respectivamente. Escriba las siguientes desigualdades simbólicamente:

a. $x \leq 3$ b. $0 < x < 3$ c. $0 < x \leq 3$

Solución

a. $q \vee r$ b. $p \wedge q$ c. $p \wedge (q \vee r)$ ■

Valores de verdad

En los ejemplos 2.1.2 y 2.1.3 construimos frases compuestas de enunciados compuestos y los términos *no*, *y* y *o*. Sin embargo, si esas frases son enunciados, deben tener **valores de verdad** bien definidos —que deben ser ya sea verdaderos o falsos. Ahora definimos dichas frases compuestas como enunciados especificando sus valores de verdad en términos de los enunciados que los componen.

La negación de un enunciado es un enunciado que expresa exactamente lo que significa que el enunciado sea falso.

• Definición

Si p es un enunciado variable, la **negación** de p es "no p" o "No es el caso que p" y se denota $\sim p$. Tiene valores de verdad opuestos a p: si p es verdadera, $\sim p$ es falsa, si p es falsa, $\sim p$ es verdadera.

Los valores de verdad para la negación se resumen en una *tabla de verdad*.

Tabla de verdad para $\sim p$

p	$\sim p$
V	F
F	V

En el lenguaje común la frase "Hace calor y hay sol" se entiende que es verdadera cuando se satisfacen ambas condiciones —que hace calor y que está soleado. Si hace calor, pero no hay sol, o si está soleado pero no hace calor, o si ni hace calor ni está soleado, se entiende que la frase es falsa. La definición formal de los valores de verdad para un enunciado *y* concuerda con este razonamiento general.

• Definición

Si p y q son enunciados variables, la **conjunción** de p y q que es "p y q" se denota por $p \wedge q$. Es verdadera cuando y sólo cuando, tanto p como q son verdaderos. Si ya sea p o q es falso, o si ambas son falsos, entonces $p \wedge q$ es falso.

Los valores de verdad para la conjunción también se pueden resumir en una tabla de verdad. La tabla se obtiene considerando las cuatro combinaciones posibles de los valores de verdad de p y q. Cada combinación se presenta en un renglón de la tabla, el correspondiente valor de verdad para todo el enunciado se coloca en la columna que está en el extremo derecho en ese renglón. Observe que el único renglón que contiene una *V* es el primero ya que la única forma de que un enunciado *y* sea verdadero es que ambos enunciados componentes sean verdaderos.

Tabla de verdad para $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Por la forma, el orden de los valores de verdad de p y q en la tabla anterior es VV, VF, FV, FF. No es absolutamente necesario escribir los valores de verdad en este orden, aunque se acostumbra hacerlo. Utilizaremos este orden para todas las tablas de verdad que implican dos enunciados variables. En el ejemplo 2.1.5 mostraremos el orden estándar para tablas de verdad que implican tres enunciados variables.

En el caso de los enunciado de disyunción de la forma "p o q" —la lógica intuitiva ofrece dos interpretaciones alternativas. En el lenguaje común *o* a veces se utiliza en un sentido exclusivo (p o q pero no ambas) y, a veces en un sentido inclusivo (p o q o ambas). Un camarero que le dice que puede ser "café, té, o leche" utiliza la palabra *o* en un sentido exclusivo: Generalmente hay que pagar más si desea más de una bebida. Por otra parte, un camarero que ofrece "crema o azúcar" utiliza la palabra *o* en un sentido inclusivo: Tiene derecho a crema y a azúcar si lo desea.

Los matemáticos y lógicos evitan la posible ambigüedad acerca del significado de la palabra *o* en el entendimiento de lo que significa "y/o" inclusivo. El símbolo $\vee$ proviene de la palabra latina *vel*, que significa *o* en un sentido inclusivo. Para expresar *o* exclusivo; se utiliza la frase p o q, *pero no ambos*.

• Definición

Si p y q son enunciados variables, la **disyunción** de p y q es "p o q", que se denota por $p \vee q$. Es verdadera cuando ya sea que p sea verdad, o que q sea verdad, o que ambas p y q sean verdaderas; es falsa sólo cuando p y q son falsas.

Nota El enunciado "$2 \leq 2$" significa que 2 es menor que 2 o 2 es igual a 2. Es verdadero, ya que $2 = 2$.

La tabla de verdad para la disyunción es:

Tabla de verdad para $p \vee q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Evaluando la verdad de los enunciados compuestos más generales

Ahora que se han asignado valores de verdad a $\sim p$, $p \wedge q$ y $p \vee q$, considere cómo asignar valores de verdad a expresiones más complicadas, tales como $\sim p \vee q$, $(p \vee q) \sim(p \wedge q)$ y $(p \wedge q) \vee r$. Estas expresiones se llaman *formas de enunciado* (o *formas proposicionales*). En la sección 2.4, se analiza, la estrecha relación entre las formas de enunciado y las *expresiones booleanas*.

• Definición

Una **forma de enunciado** (o **forma proposicional**) es una expresión formada por enunciados variables (tales como p, q y r) y conectores lógicos (por ejemplo, $\sim$, $\wedge$ y $\vee$) que se convierten en un enunciado cuando los enunciados reales se sustituyen por enunciados compuestos variables. La **tabla de verdad** para un enunciado dado presenta los valores de verdad que corresponden a todas las posibles combinaciones de los valores de verdad de sus enunciados compuestos variables.

Para calcular los valores de verdad para una forma de enunciado, se siguen reglas similares a las utilizadas para evaluar expresiones algebraicas. Para cada combinación de valores de verdad para los enunciados variables, primero se evalúan las expresiones dentro de los paréntesis más internos, después se evalúan las expresiones dentro del siguiente conjunto de paréntesis hacia el exterior y así sucesivamente hasta tener los valores de verdad de la expresión completa.

Ejemplo 2.1.4 Tabla de verdad para *O-exclusivo*

Construya la tabla de verdad para la forma de enunciado $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$. Considere que cuando se utiliza *o* en su sentido exclusivo, el enunciado "p o q" significa "p o q pero no ambos" o "p o q y no ambos p y q", que se traduce en símbolos como $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$. Esto a veces se abrevia como $p \oplus q$ o p XOR q.

Solución Etiquete columnas tituladas p, q, $p \vee q$, $p \wedge q$, $\sim(p \wedge q)$ y $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$. Llene las columnas p y q con todas las posibles combinaciones lógicas de V y F. Después, utilice las tablas de verdad para $\vee$ y $\wedge$ para completar las columnas $p \vee q$ y $p \wedge q$ con los valores de verdad correspondiente. Después llene la columna $\sim(p \wedge q)$ tomando los opuestos de los valores de verdad de $p \wedge q$. Por ejemplo, la entrada de $\sim(p \wedge q)$ en el primer renglón es F, ya que en el primer renglón el valor de verdad de $p \wedge q$ es V. Por último, llene la columna $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ considerando la tabla de verdad para un enunciado *y* junto con los valores de verdad calculados para $p \vee q$ y $\sim(p \wedge q)$. Por ejemplo, la entrada en el primer renglón es F ya que la entrada para $p \vee q$ es V, la entrada de $\sim(p \wedge q)$ es F y un enunciado *y* es falso a menos que ambos componentes sean verdaderos. La entrada en el segundo renglón es V ya que ambos componentes son verdaderos en este renglón.

Tabla de verdad para *O Exclusiva*: $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

■

Ejemplo 2.1.5 Tabla de verdad para $(p \wedge q) \vee \sim r$

Construya una tabla de verdad para la forma de enunciado $(p \wedge q) \vee \sim r$.

Solución Titule columnas con p, q, r, $p \wedge q$, $\sim r$ y $(p \wedge q) \vee \sim r$. Introduzca las ocho combinaciones lógicas posibles de valores de verdad para p, q, r y en las tres columnas más hacia la izquierda. Después, llene los valores de verdad para $p \wedge q$ y para $\sim r$. Complete la tabla considerando los valores de verdad de $(p \wedge q)$ y para $\sim r$ y la definición de un enunciado *o*. Puesto que un enunciado *o* es falso sólo cuando ambos componentes son falsos, los únicos renglones con entrada F son los renglones tercero, quinto y séptimo, porque esos son los únicos renglones en los que las expresiones $p \wedge q$ y $\sim r$ son falsas. La entrada de todos los otros renglones es V.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim r$	$(p \wedge q) \vee \sim r$
V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	V

■

El punto esencial de asignación de valores de verdad a los enunciados compuestos es que le permite —usando sólo la lógica— juzgar la verdad de un enunciado compuesto en base a su conocimiento de la verdad de sus partes componentes. La lógica no ayuda a determinar la verdad o falsedad de los enunciados compuestos. Más bien, la lógica ayuda a enlazar estas piezas de información separadas en un todo coherente.

Equivalencia lógica

Los enunciados

6 es mayor que 2 y 2 es menor que 6

son dos maneras diferentes de decir la misma cosa. ¿Por qué? Debido a la definición de las frases *mayor que* y *menor que*. Por el contrario, aunque los enunciados

1) Los perros ladran y los gatos maúllan y 2) Los gatos maúllan y los perros ladran

son dos maneras diferentes de decir lo mismo, la razón no tiene que ver con la definición de las palabras. Tiene que ver con la forma lógica de los enunciados. Cualquiera de los dos enunciados cuyas formas lógicas se relacionan en la misma forma como 1) y 2) bien podría ser ambos verdaderos o ser ambos falsos. Puede ver esto examinando la tabla de verdad siguiente, donde las variables de enunciado p y q se sustituyen por los enunciados compuestos "Los perros ladran" y "Los gatos maúllan", respectivamente. La tabla muestra que para cada combinación de valores de verdad de p y q, $p \wedge q$ es verdadera cuando y sólo cuando, $p \wedge q$ es verdadera. En tal caso, las formas de enunciado se llaman *lógicamente equivalentes* y decimos que 1) y 2) son *enunciados lógicamente equivalentes*.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

$p \wedge q$ y $q \wedge p$ siempre tiene el mismo valor de verdad, por lo que son lógicamente equivalentes

• Definición

Dos *formas de enunciado* se llaman **lógicamente equivalentes** si y sólo si, tienen los mismos valores de verdad para cada posible sustitución de enunciados por sus enunciados de variables. La equivalencia lógica de las formas de enunciado P y Q se denota escribiendo $P \equiv Q$.

Dos *enunciados* se llaman **lógicamente equivalentes** si y sólo si, tienen formas lógicas equivalentes cuando componentes idénticos de enunciados variables se utilizan para reemplazar los enunciados compuestos idénticos.

Prueba de si dos formas de enunciado P y Q son lógicamente equivalentes

1. Se construye una tabla de verdad con una columna para los valores de verdad de P y otra columna para los valores de verdad de Q.
2. Compruebe cada combinación de valores de verdad de enunciado de variables para ver si el valor de verdad de P es igual que el valor de verdad de Q.
   a. Si en cada renglón el valor de verdad de P es el igual al valor de verdad de Q, entonces P y Q son lógicamente equivalentes.
   b. Si en algún renglón P tiene un valor de verdad diferente de Q, entonces P y Q no son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 2.1.6 Propiedad doblemente negativa: $\sim(\sim p) \equiv p$

Construya una tabla de verdad para demostrar que la negación de la negación de un enunciado es lógicamente equivalente al enunciado, anotando en la tabla con una frase de explicación.

Solución

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

p y $\sim(\sim p)$ siempre tienen los mismos valores de verdad, por lo que son lógicamente equivalentes

Hay dos maneras de mostrar que las formas de enunciado de P y Q *no* son lógicamente equivalentes. Como se indicó anteriormente, una es utilizar una tabla de verdad para buscar renglones para que sus valores de verdad sean diferentes. La otra forma es encontrar enunciados concretos para cada una de las dos formas, una de las cuales es verdadera y la otra es falsa. El siguiente ejemplo muestra estas dos maneras.

Ejemplo 2.1.7 Demostración de la no equivalencia

Demuestre que las formas de enunciado $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \wedge \sim q$ no son lógicamente equivalentes.

Solución

a. Este método utiliza una tabla de verdad con una frase de explicación.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$		$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F		F
V	F	F	V	F	V	$\neq$	F
F	V	V	F	F	V	$\neq$	F
F	F	V	V	F	V		T

$\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \wedge \sim q$ tienen valores de verdad diferentes en los renglones 2 y 3 por lo que no son lógicamente equivalentes

b. Este método utiliza un ejemplo para mostrar que $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \wedge \sim q$ no son lógicamente equivalentes. Sea p el enunciado "$0 < 1$" y sea q el enunciado "$1 < 0$". Entonces,

$$\sim(p \wedge q) \quad \text{es} \quad \text{"Este no es el caso de que } 0 < 1 \text{ y } 1 < 0\text{"},$$

lo cual es verdadero. Por otra parte,

$$\sim p \wedge \sim q \quad \text{es} \quad \text{"}0 \not< 1 \quad \text{y} \quad \text{"}1 \not< 0\text{"}.$$

que es falso. Este ejemplo muestra que hay enunciados concretos que pueden sustituirse por p y q para hacer una de las formas de enunciado verdadera y la otra falsa. Por tanto, las formas de enunciado no son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 2.1.8 Negaciones de *Y* y *O*: Leyes de De Morgan

Para que el enunciado "John es alto y Jim es pelirrojo" sea verdadero, ambos componentes deben ser verdaderos. Por lo que si el enunciado es falso, uno de los componentes o ambos deben ser falsos. Así pues, la negación se puede escribir como "John no es alto o Jim no es pelirrojo". En general, la negación de la conjunción de los dos enunciados es lógicamente equivalente a la disyunción de sus negaciones. Es decir, las formas de enunciados $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \vee \sim q$ son lógicamente equivalentes. Compruebe esto utilizando tablas de verdad.

Solución

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

$\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \vee \sim q$ siempre tienen los mismos valores de verdad, por lo que son lógicamente equivalentes

Culver Pictures

Augustus De Morgan (1806-1871)

Simbólicamente,

$$\boxed{\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.}$$

En los ejercicios al final de esta sección se le pide que muestre que la ley análoga a la negación de la disyunción de dos enunciados es lógicamente equivalente a la conjunción de sus negaciones:

$$\boxed{\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q.}$$

■

Las dos equivalencias lógicas del ejemplo 2.1.8 se conocen como las **leyes de De Morgan** de la lógica en honor de Augustus De Morgan, quien fue el primero en establecerlas formalmente en términos matemáticos.

Leyes de De Morgan

La negación de un enunciado *y* es lógicamente equivalente al enunciado *o* en el que cada componente es negado.

La negación de un enunciado *o* es lógicamente equivalente al enunciado *y* en el que cada componente es negado.

Ejemplo 2.1.9 Aplicación de las Leyes de De Morgan

Escriba negaciones para cada una de los siguientes enunciados:

a. John tiene una altura de 6 pies y pesa por lo menos 200 libras.

b. El autobús llegó tarde o el reloj de Tom estaba retrasado.

Solución

a. John no tiene una altura de 6 pies o pesa menos de 200 libras.

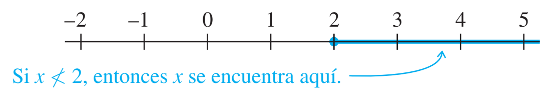
b. El autobús no llegó tarde y el reloj de Tom no estaba retrasado.

Ya que el enunciado "ni p ni q" significa lo mismo que "$\sim p$ y $\sim q$", una respuesta alternativa para b) es "Ni el autobús llegó tarde, ni el reloj de Tom estaba retrasado." ■

Si x es un número real dado, digamos que x no es menor a 2 ($x \not< 2$) significa que x no se encuentra a la izquierda de 2 en la recta numérica. Esto equivale a decir que $x = 2$, o que x se encuentra a la derecha de 2 en la recta numérica ($x = 2$ o $x > 2$). Por tanto,

$$x \not< 2 \quad \text{es equivalente a} \quad x \geq 2.$$

Gráficamente,



Del mismo modo,

$$\begin{aligned} x \not> 2 &\quad \text{es equivalente a} \quad x \leq 2, \\ x \not\leq 2 &\quad \text{es equivalente a} \quad x > 2 \quad \text{y} \\ x \not\geq 2 &\quad \text{es equivalente a} \quad x < 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.10 Desigualdades y leyes de De Morgan

Utilice las leyes de De Morgan para escribir la negación de $-1 < x \leq 4$.

Solución El enunciado dado es equivalente a

$$-1 < x \quad \text{y} \quad x \leq 4.$$

Por las leyes de De Morgan, la negación es

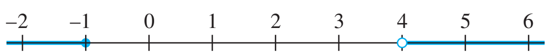
$$-1 \not< x \quad \text{o} \quad x \not\leq 4,$$

lo que equivale a

$$-1 \geq x \quad \text{o} \quad x > 4.$$

¡Precaución! La negación de $-1 < x \leq 4$ *no* es $-1 \not< x \not< 4$. Tampoco es $-1 \geq x > 4$.

Gráficamente, si $-1 \geq x$ o $x > 4$, entonces x se encuentra en la región sombreada de la recta numérica, como se muestra a continuación.



■

Las leyes de De Morgan se utilizan con frecuencia al escribir programas de computadora. Por ejemplo, supongamos que quiere que su programa elimine todos los archivos modificados fuera de un rango dado de fechas, por ejemplo de la fecha 1 a la fecha 2 inclusive. Se podría utilizar el hecho que

$$\sim(fecha1 \leq modificación\_archivo\_fecha \leq fecha2)$$

es equivalente a

$$(\textit{archivo\_modificación\_fecha} < \textit{fecha}1) \quad \text{o} \quad (\textit{fecha}2 < \textit{archivo\_modificación\_fecha}).$$

Ejemplo 2.1.11 Un ejemplo preventivo

De acuerdo a las leyes de De Morgan, la negación de

p: Jim es alto y Jim es delgado

es $\sim p$: Jim no es alto o Jim no es delgado

porque la negación de un enunciado *y* es el enunciado *o* en el que los dos componentes son negados.

Por desgracia, puede surgir un aspecto potencialmente confuso del idioma español cuando se están tomando negaciones de este tipo. Considere que el enunciado p se puede escribir en forma más compacta como

p': Jim es alto y delgado.

Cuando está así escrito, otra manera de negar esto, es

$\sim(p')$: Jim no es alto y delgado.

Pero en esta forma la negación se ve como un enunciado *y*. ¿No se violan las leyes de De Morgan?

En realidad no se violan. La razón es que en la lógica formal las palabras *y* y *o* sólo se permiten entre enunciados completos, no entre fragmentos de frases.

Una lección que aprender de este ejemplo es que cuando se aplican las leyes de De Morgan, se deben tener enunciados completos a cada lado de cada *y* en cualquier lado de cada *o*. ■

¡Precaución! Aunque las leyes de la lógica son muy útiles, se deben utilizar como una ayuda para pensar, no como un sustituto mecánico.

Tautologías y contradicciones

Se ha dicho que toda la matemática se reduce a tautologías. Aunque esto es formalmente cierto, el mayor trabajo de los matemáticos es pensar que sus temas tienen sustancia y forma. Sin embargo, una comprensión intuitiva de las tautologías lógicas básicas es parte de las herramientas necesarias para cualquier persona que razona con matemáticas.

• Definición

Una **tautología** es una forma de enunciado que siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de los enunciados individuales sustituidos por sus enunciados variables. Un enunciado cuya forma es una tautología es un **enunciado tautológico**.

Una **contradicción** es una forma de enunciado que siempre es falso, independientemente de los valores de verdad de los enunciados individuales de los enunciados variables sustituidos. Un enunciado cuya forma es una contradicción es un **enunciado contradictorio**.

De acuerdo con esta definición, lo verdadero de un enunciado tautológico y la falsedad de un enunciado contradictorio se deben a la estructura lógica de los propios enunciados y son independientes de los significados de los enunciados.

Ejemplo 2.1.12 Tautologías y contradicciones

Demuestre que el enunciado de la forma $p \vee \sim p$ es una tautología y que el enunciado de la forma $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

Solución

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	V	F
F	V	V	F

todas V así que $p \vee \sim p$ es una tautología,

todas F así que $p \vee \sim p$ es una contradicción

■

Ejemplo 2.1.13 Equivalencia lógica que involucra tautologías y contradicciones

Si **t** es una tautología y **c** es una contradicción, demuestre que $p \wedge \mathbf{t} \equiv p$ y $p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$.

Solución

p	$\mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t}$	p	$\mathbf{c}$	$p \wedge \mathbf{c}$
V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	F	F

valores iguales, por tanto $p \wedge \mathbf{t} \equiv p$

valores iguales, por tanto $p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$

■

Resumen de las equivalencias lógicas

El conocimiento de enunciados lógicamente equivalentes es muy útil para la construcción de argumentos. Con frecuencia sucede que es difícil ver cómo se deduce una conclusión de una forma de un enunciado, mientras que es fácil ver cómo se deduce de una forma lógicamente equivalente del enunciado. En el teorema 2.1.1 se resumen una serie de equivalencias lógicas para futuras referencias.

Teorema 2.1.1 Equivalencias lógicas

En cualquier enunciado variable dado p, q y r, con una tautología **t** y una contradicción **c**, son válidas las siguientes equivalencias lógicas.

1. *Leyes conmutativas:*	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
2. *Leyes asociativas*:	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. *Leyes distributivas:*	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. *Leyes de la identidad:*	$p \wedge \mathbf{t} \equiv p$	$p \vee \mathbf{c} \equiv p$
5. *Leyes de negación:*	$p \vee \sim p \equiv \mathbf{t}$	$p \wedge \sim p \equiv \mathbf{c}$
6. *Ley de la doble negación:*	$\sim(\sim p) \equiv p$	
7. *Leyes de idempotencia:*	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
8. *Leyes universales acotadas:*	$p \vee \mathbf{t} \equiv \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$
9. *Leyes de De Morgan:*	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
10. *Leyes de absorción:*	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
11. *Negaciones de* **t** *y* **c**:	$\sim\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$	$\sim\mathbf{c} \equiv \mathbf{t}$

Las demostraciones de las leyes 4 y 6, las primeras partes de las leyes 1 y 5 y la segunda parte de la ley 9 ya se han presentado como ejemplo en el libro. Las demostraciones de las otras partes del teorema se dejan como ejercicios. De hecho, se puede demostrar que las primeras cinco leyes del teorema 2.1.1 forman un núcleo a partir del cual se pueden deducir las demás leyes. Las primeras cinco leyes son los axiomas de una estructura matemática conocida como álgebra booleana, que se analiza en la sección 6.4.

Las equivalencias del teorema 2.1.1 son las leyes generales del pensamiento que se producen en todas las áreas del quehacer humano. También se pueden utilizar como una manera formal para reescribir formas de enunciado complicadas en formas de enunciado más sencillas.

Ejemplo 2.1.14 Simplificación de formas de enunciado

Utilice el teorema 2.1.1 para comprobar la equivalencia lógica

$$\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

Solución Use las leyes del teorema 2.1.1 para reemplazar la forma de enunciado de la izquierda, por expresiones lógicamente equivalentes. Cada vez que haga esto, obtiene una forma de enunciado lógicamente equivalente. Continúe haciendo reemplazos hasta obtener la forma de enunciado de la derecha.

$$\begin{aligned}
\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) &\equiv (\sim(\sim p) \vee \sim q) \wedge (p \vee q) && \text{por las leyes de De Morgan}\\
&\equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) && \text{por la ley de doble negación}\\
&\equiv p \vee (\sim q \wedge q) && \text{por la ley distributiva}\\
&\equiv p \vee (q \wedge \sim q) && \text{por la ley conmutativa para } \wedge\\
&\equiv p \vee \mathbf{c} && \text{por la ley de negación}\\
&\equiv p && \text{por la ley de identidad.}
\end{aligned}$$

■

Es útil tener habilidad en la simplificación de formas de enunciado para la construcción lógicamente eficiente de programas de computadora y en el diseño de circuitos lógicos digitales.

Aunque las propiedades del teorema 2.1.1 se pueden utilizar para demostrar la equivalencia lógica de dos formas de enunciado, no se pueden utilizar para demostrar formas de enunciado que no son lógicamente equivalentes. Por otra parte, las tablas de verdad siempre se pueden utilizar para determinar tanto equivalencia como no equivalencia y las tablas de verdad son fáciles de programar en una computadora. Sin embargo, cuando se utilizan tablas de verdad, la comprobación de equivalencia siempre requiere de 2^n pasos, donde n es el número de variables. A veces se puede ver rápidamente que hay dos formas de enunciado que son equivalentes por el teorema 2.1.1, mientras que se necesitaría un poco de cálculo para mostrar su equivalencia con tablas de verdad. Por ejemplo, se deduce inmediatamente de la ley asociativa para $\wedge$ que $p \wedge (\sim q \wedge \sim r) \equiv (p \wedge \sim q) \wedge \sim r$, mientras que la comprobación de la tabla de verdad requiere construir una tabla de ocho renglones.

Autoexamen

Las respuestas a las preguntas del autoexamen se presentan al final de cada sección.

1. Un enunciado *y* es verdadero si y sólo si ambos componentes son ____.
2. Un enunciado *o* es falso si y sólo si, ambos componentes son ____.
3. Dos formas de enunciado son lógicamente equivalentes si y sólo si, siempre tienen ____.
4. Las leyes de De Morgan dicen 1) que la negación de un enunciado *y* es lógicamente equivalente al enunciado ____ en el que cada componente es ____ y 2) la negación de un enunciado *o* es lógicamente equivalente al enunciado ____ en el que cada componente es ____.
5. Una tautología es un enunciado que siempre es ____.
6. Una contradicción es un enunciado que siempre es ____.

Conjunto de ejercicios 2.1

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 represente la forma común de cada argumento con letras para representar frases componentes y llene los espacios en blanco para que el argumento del enunciado *b*) tenga la misma forma lógica que el argumento del inciso *a*).

1. a. Si todos los números enteros son racionales, entonces el número 1 es racional. Todos los números enteros son racionales. Por tanto, el número 1 es racional.
b. Si todas las expresiones algebraicas se pueden escribir en notación de prefijo, entonces ______________________.
____.
Por tanto $(a + 2b)\ (a^2 - b)$, puede escribirse en notación de prefijo.

2. a. Si todos los programas de computadora contienen errores, entonces este programa contiene un error.
Este programa no contiene un error.
Por tanto, no es el caso de que todos los programas de computadora tengan errores.
b. Si______, entonces______.
2 no es impar.
Por tanto, no es el caso de que todos los números primos sean impares.

3. a. Este número es par o este número es impar.
Este número no es par.
Por tanto, este número es impar.
b. ______o la lógica es confusa.
Mi mente no funciona.
Por tanto,______.

4. a. Si *n* es divisible entre 6, entonces *n* es divisible entre 3.
Si *n* es divisible entre 3, entonces la suma de los dígitos de *n* es divisible entre 3.
Por tanto, si *n* es divisible entre 6, entonces la suma de los dígitos de *n* es divisible entre 3. (Suponga que *n* es un entero fijo dado.)
b. Si esta función es ________ entonces, esta función es derivable.
Si esta función es ____ entonces esta función es continua.
Por tanto, si esta función es un polinomio, entonces esta función es ____.

5. Indique cuál de las siguientes frases son enunciados.
a. 1 024 es el menor número de cuatro dígitos que es un cuadrado perfecto.
b. Ella es una estudiante de la licenciatura en matemáticas.
c. $128 = 2^6$ d. $x = 2^6$

Escriba los enunciados del 6 al 9 en forma simbólica con los símbolos $\sim$, $\vee$, $\wedge$ y las letras indicadas para representar enunciados compuestos.

6. Sea s = "las acciones están aumentando" y i = "las tasas de interés se mantienen estables".
a. Las acciones están aumentando, pero las tasas de interés son constantes.
b. Ni las acciones aumentan ni las tasas de interés son estables.

7. Juan estudia la licenciatura en matemáticas pero no estudia la licenciatura en ciencias computacionales (m = "Juan estudia la licenciatura en matemáticas", c = "Juan estudia la licenciatura en ciencias computacionales").

8. Sea h = "Juan es sano", w = "Juan es rico" y s = "Juan es sabio".
a. Juan es sano y rico, pero no sabio.
b. Juan no es rico pero, es sano y sabio.
c. Juan ni es sano, rico, ni sabio.
d. Juan ni es rico ni sabio, pero es saludable.
e. Juan es rico, pero no es sano y sabio.

9. O este polinomio tiene grado 2 o tiene un grado 3, pero no ambos (n = "Este polinomio tiene grado 2", k = "Este polinomio tiene grado 3").

10. Sea p el enunciado "La BANDERAFINDATOS está apagada", q el enunciado "ERROR es igual a 0" y r el enunciado "la SUMA es menor que 1 000". Exprese las siguientes frases en notación simbólica.
a. La BANDERAFINDATOS está apagada, ERROR es igual a 0 y SUMA es menor que 1 000.
b. La BANDERAFINDATOS está apagada pero ERROR no es igual a 0.
c. La BANDERAFINDATOS está apagada, sin embargo, ERROR no es 0 o SUMA es mayor o igual a 1 000.
d. La BANDERAFINDATOS está encendida y ERROR es igual a 0 pero SUMA es mayor que o igual a 1 000.
e. Ya sea que BANDERAFINDATOS está encendida o que sea el caso de que tanto ERROR es 0 como SUMA es menor que 1 000.

11. En la frase siguiente, la palabra *o* se utiliza en sentido inclusivo o exclusivo? Un equipo gana los partidos decisivos si gana dos partidos consecutivos o un total de *tres* partidos.

En los ejercicios del 12 al 15, escriba las tablas de verdad para las formas de enunciado.

12. $\sim p \wedge q$
13. $\sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
14. $p \wedge (q \wedge r)$
15. $p \wedge (\sim q \vee r)$

En los ejercicios del 16 al 24, determine si las formas de enunciado son lógicamente equivalentes. En cada caso, construya una tabla de verdad e incluya una frase que justifique su respuesta. Su frase debe mostrar que entiende el significado de equivalencia lógica.

16. $p \vee (p \wedge q)$ y p
17. $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \wedge \sim q$
18. $p \vee \mathbf{t}$ y $\mathbf{t}$
19. $p \wedge \mathbf{t}$ y p
20. $p \wedge \mathbf{c}$ y $p \vee \mathbf{c}$
21. $(p \wedge q) \wedge r$ y $p \wedge (q \wedge r)$

*Para los ejercicios con números o letras azules, las soluciones están dadas en el apéndice B. El símbolo ***H*** indica que sólo se da una sugerencia o una solución parcial. El símbolo ✶ indica que el ejercicio es más difícil de lo normal.

22. $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

23. $(p \wedge q) \vee r$ y $p \wedge (q \vee r)$

24. $(p \vee q) \vee (p \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge r$

En los ejercicios del 25 al 31, utilice las leyes de De Morgan para escribir las negaciones de los enunciados.

25. Hal estudia la licenciatura en matemáticas y la hermana de Hal estudiante de la licenciatura en ciencia computacional.

26. Sam es un cinturón de color naranja y Kate es un cinturón rojo.

27. El conector está suelto o el equipo esté desconectado.

28. El dígito de las unidades de 4^{67} es 4 o es 6.

29. Este programa de computadora tiene un error de lógica en las primeras diez líneas o se ejecuta con un conjunto incompleto de datos.

30. El dólar está en su punto más alto de todos los tiempos y el mercado de valores está en un mínimo histórico.

31. El tren llegó tarde o mi reloj se adelantó.

En los enunciados del 32 al 37, suponga que x es un número real dado y utilice las leyes de De Morgan para escribir las negaciones.

32. $-2 < x < 7$

33. $-10 < x < 2$

34. $x < 2$ o $x > 5$

35. $x \leq -1$ o $x > 1$

36. $1 > x \geq -3$

37. $0 > x \geq -7$

En los ejercicios 38 y 39, imagine que *num_ordenes* y *num_existencias* son valores dados, como podría ocurrir en la ejecución de un programa de computadora. Escriba las negaciones de los siguientes enunciados.

38. (*num_ordenes* > 100 y *num_existencias* ≤ 500) o *num_existencias* < 200

39. (*num_ordenes* < 50 y *num_existencias* > 300) o ($50 \leq$ *num_ordenes* < 75 y *num_existencias* > 500)

En los ejercicios del 40 al 43, utilice tablas de verdad para establecer cuál de las formas de enunciado son tautologías y cuáles son contradicciones.

40. $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$

41. $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

42. $((\sim p \wedge q) \wedge (q \wedge r)) \wedge \sim q$

43. $(\sim p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$

En los ejercicios 44 y 45, determine si los enunciados en los incisos *a*) y *b*) son lógicamente equivalentes.

44. Suponga que x es un número real dado.
   a. $x < 2$ o no es el caso de que $1 < x < 3$.
   b. $x \leq 1$ o bien $x < 2$ o $x \geq 3$.

45. a. Bob estudia dos carreras en matemáticas y en ciencias de la computación y Ann es una estudiante de la licenciatura en matemáticas, pero Ann no estudia dos carreras en matemáticas y en ciencias de la computación.
   b. No es el caso de que tanto Bob como Ann estudien dos carreras en matemáticas y en ciencia computacional, pero es el caso de que Ann es una estudiante de la licenciatura en matemáticas y que Bob estudia dos carreras en matemáticas y en ciencias de la computación.

✶ 46. En el ejemplo 2.1.4, se introdujo el símbolo $\oplus$ para denotar *exclusivo o*, por lo que $p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$. Por tanto la tabla de verdad para *exclusivo o* es la siguiente:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   a. Encuentre formas de enunciado más simples que sean lógicamente equivalente a $p \oplus p$ y $(p \oplus p) \oplus p$.
   b. ¿Es $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$? Justifique su respuesta.
   c. ¿Es $(p \oplus q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \oplus (q \wedge r)$? Justifique su respuesta.

✶ **47.** En la lógica y en el español habitual, una doble negación es equivalente a un positivo. Hay un uso del español bastante común en el que un “doble positivo” es equivalente a un negativo. ¿Cuál es éste? ¿Puedes pensar en otros?

En los ejercicios 48 y 49 que se presentan a continuación, se deduce una equivalencia lógica del teorema 2.1.1. Dé una razón para cada paso.

48. $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (\sim q \vee q)$ por *a*)
$\equiv p \wedge (q \vee \sim q)$ por *b*)
$\equiv p \wedge \mathbf{t}$ por *c*)
$\equiv p$ por *d*)

Por tanto, $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv p$.

49. $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
$\equiv (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$ por *a*)
$\equiv \sim q \vee (p \wedge \sim p)$ por *b*)
$\equiv \sim q \vee \mathbf{c}$ por *c*)
$\equiv \sim q$ por *d*)

Por tanto $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv \sim q$.

Utilice el teorema 2.1.1 para comprobar la equivalencia lógica en los ejercicios 50 al 54. Dé una razón para cada paso.

50. $(p \wedge \sim q) \vee p \equiv p$

51. $p \wedge (\sim q \vee p) \equiv p$

52. $\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p$

53. $\sim((\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q) \equiv p$

54. $(p \wedge (\sim(\sim p \vee q))) \vee (p \wedge q) \equiv p$

Respuestas del autoexamen

1. verdaderos 2. falsos 3. los mismos valores verdaderos 4. *o*; negado, *y*; negado 5. verdadero 6. falso

2.2 Enunciados condicionales

. . . el razonamiento hipotético implica la subordinación de lo real a la esfera de lo posible . . . —Jean Piaget, 1972

Cuando usted hace una inferencia lógica o una deducción, razona *de* una hipótesis *a* una conclusión. Su objetivo es ser capaz de decir: "*Si* tal y tal es conocido, *entonces* algo u otro debe ser el caso".

Sean p y q los enunciados. Una frase de la forma "Si p entonces q" se denota simbólicamente por "$p \to q$"; p se llama la *hipótesis* y q se llama la *conclusión*. Por ejemplo, considere el enunciado siguiente:

$$\text{Si } \underbrace{4\,686 \text{ es divisible entre } 6}_{\text{hipótesis}}, \text{ entonces } \underbrace{4\,686 \text{ es divisible entre } 3}_{\text{conclusión}}$$

Esta frase se llama *condicional* ya que la verdad del enunciado q está condicionado a la verdad del enunciado p.

La notación $p \to q$ indica que $\to$ es un conector, como $\wedge$ o $\vee$, que se puede utilizar para unir enunciados para crear nuevos enunciados. Por tanto, para definir $p \to q$ como un enunciado, tenemos que especificar los valores de verdad para $p \to q$ conforme se especifican los valores de verdad para $p \wedge q$ y para $p \vee q$. Como es el caso con otros conectores, la definición formal de los valores de verdad para $\to$ (si-entonces) se basa en su sentido cotidiano, intuitivo. Consideremos un ejemplo.

Supongamos que va a una entrevista de trabajo en un almacén y el dueño le hace la siguiente promesa:

Si se presenta a trabajar el lunes por la mañana, entonces conseguirá el trabajo.

¿Bajo qué circunstancias se justifica diciendo que el dueño habló falsamente? Es decir, ¿en qué circunstancias la frase anterior es falsa? La respuesta es: *Se* presentó a trabajar el lunes por la mañana y *no* consiguió el trabajo.

Después de todo, la promesa del dueño sólo dice que usted conseguirá el trabajo, *si* cumple una determinada condición (ir a trabajar el lunes por la mañana); no dice nada acerca de lo que ocurre si *no* se cumple la condición. Así que si la condición no se cumple, no es justo decir que la promesa es falsa, independientemente de si se consigue o no el trabajo.

El ejemplo anterior tiene la intención de convencernos de que *la única combinación de circunstancias en las que llamarían un enunciado condicional falso se produce cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa*. En todos los otros casos, no llamaría falsa a la frase. Esto implica que el único renglón de la tabla de verdad para $p \to q$ que se debe llenar con una F es el renglón donde p es V y q es F. Ningún otro renglón debe contener una F. Pero cada renglón de una tabla de verdad se debe llenar, ya sea con una V o con una F. Por tanto todos los otros renglones de la tabla de verdad para $p \to q$ se deben llenar con V.

Tabla de verdad para $p \to q$

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

• Definición

Si p y q son enunciados variables, el **condicional** de q por p es "si p, entonces q" o "p implica q" y se denota $p \to q$. Es falso cuando p es verdadero y q es falso, en cualquier caso es verdadero. Llamamos a p la **hipótesis** (o **antecedente**) de la condicional y a q la **conclusión** (o **consecuente**).

Un enunciado condicional que es verdadero por el hecho de que su hipótesis es falsa con frecuencia se llama **vacíamente verdadera** o **verdadera por defecto**. Así, el enunciado "Si se presenta a trabajar el lunes por la mañana, entonces conseguirá el trabajo" es vacíamente verdadera si no se presenta a trabajar el lunes por la mañana. En general, cuando la parte "si" de un enunciado si-entonces es falsa, el enunciado como un todo se dice que es verdadero, independientemente de si la conclusión es verdadera o falsa.

Ejemplo 2.2.1 Un enunciado condicional con una hipótesis falsa

Considere el enunciado:

$$\text{Si } 0 = 1, \text{ entonces } 1 = 2.$$

Por extraño que parezca, ya que la hipótesis de este enunciado es falsa, el enunciado como un todo es verdadero. ■

El filósofo Willard Van Orman Quine aconseja no utilizar la frase "p implica q" para significar "$p \to q$" porque la palabra *implica* sugiere que q puede ser lógicamente deducido de p y esto no suele ser el caso. Sin embargo, la frase es utilizada por mucha gente, probablemente debido a que es un sustituto conveniente para el símbolo $\to$. Y, por supuesto, en muchos casos, se puede deducir una conclusión de una hipótesis, aun cuando la hipótesis es falsa.

Nota Por ejemplo, si $0 = 1$, entonces, sumando 1 a ambos lados de la ecuación, se puede deducir que $1 = 2$

En las expresiones que incluyen $\to$, así como otros operadores lógicos, tales como $\wedge$, $\vee$ y $\sim$, el **orden de las operaciones** es que $\to$ se realiza al último. Así, de acuerdo con la especificación del orden de las operaciones de la sección 2.1, primero se realiza $\sim$, después $\wedge$ y $\vee$ y finalmente $\to$.

Ejemplo 2.2.2 Tabla de verdad para $p \vee \sim q \to \sim p$

Construya una tabla de verdad para la forma de enunciado $p \vee \sim q \to \sim p$.

Solución Por el orden de las operaciones antes mencionadas, las siguientes dos expresiones son equivalentes: $p \vee \sim q \to \sim p$ y $(p \vee (\sim q)) \to (\sim p)$ y este orden regula la construcción de la tabla de verdad. Primero complete las cuatro combinaciones posibles de valores de verdad de p y q, después escriba los valores de verdad para $\sim p$ y $\sim q$ usando la definición de negación. Después llene la columna $p \vee \sim q$ utilizando la definición de $\vee$. Por último, llene la columna $p \vee \sim q \to \sim p$ utilizando la definición de $\to$. Los únicos renglones en los que la hipótesis $p \vee \sim q$ es verdadera y la conclusión de $\sim p$ es falsa son el primer y segundo renglón. Así ponga F en los dos renglones y V en los otros dos renglones.

		conclusión		premisas	
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \vee \sim q \to \sim p$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

■

Equivalencias lógicas que involucran →

Imagine que está tratando de resolver un problema relacionado con tres enunciados: p, q y r. Supongamos que sabe que la verdad de r se deduce de la verdad de p *y también* que la verdad de r se deduce de la verdad de q. Entonces no importa si p o q es el caso, se debe deducir la verdad de r. El método de análisis de división en casos se basa en esta idea.

Ejemplo 2.2.3 División en casos: Demuestre que $p \lor q \to r \equiv (p \to r) \land (q \to r)$

Utilice tablas de verdad para mostrar la equivalencia lógica de las formas de enunciado $p \lor q \to r$ y $(p \to r) \land (q \to r)$. Anote en la tabla una frase de la explicación.

Solución Primero llene en las ocho combinaciones posibles de valores de verdad para p, q y r. Después llene las columnas para $p \lor q$, $p \to r$ y $q \to r$ utilizando las definiciones de *o* y *si-entonces*. Por ejemplo la columna $p \to r$ tiene F en el segundo y cuarto renglón, porque estos son los renglones en los que p es verdadera y q es falsa. Después llene la columna $p \lor q \to r$ utilizando la definición *si-entonces*. Los renglones en los que la hipótesis $p \lor q$ es verdadera y la conclusión r es falsa son el segundo, cuarto y sexto. Así F va en estos renglones y V en todos los demás. La tabla completa muestra que $p \lor q \to r$ y $(p \to r) \land (q \to r)$ tienen valores de verdad iguales para cada combinación de valores de verdad de p, q y r. Por tanto las dos formas de enunciado son lógicamente equivalentes.

p	q	r	$p \lor q$	$p \to r$	$q \to r$	$p \lor q \to r$	$(p \to r) \land (q \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

$p \lor q \to r$ y $(p \to r) \land (q \to r)$ siempre tienen los mismos valores de verdad, así que son lógicamente equivalentes

Representación de si-entonces como o

En el ejercicio 13*a*) al final de esta sección se le pide que use tablas de verdad para demostrar que

$$p \to q \equiv \sim p \lor q.$$

La equivalencia lógica de "si p entonces q" y "no p o q" se utiliza ocasionalmente en el lenguaje cotidiano. A continuación se presenta un ejemplo.

Ejemplo 2.2.4 Aplicación de la equivalencia entre $\sim p \lor q$ y $p \to q$

Reescriba el siguiente enunciado en la forma si-entonces.

O llega a tiempo al trabajo o lo despiden.

Solución Sea $\sim p$

Llega a tiempo al trabajo.

y q sea

Está despedido.

Entonces, el enunciado dado es $\sim p \vee q$. También p es.

No llegó a tiempo al trabajo.

Así que la versión equivalente si-entonces, $p \to q$, es

No llegó a tiempo al trabajo, entonces está despedido. ■

La negación de un enunciado condicional

Por definición, $p \to q$ es falsa si y sólo si, su hipótesis p, es verdadera y su conclusión, q, es falsa. De lo que se deduce

La negación de "si p, entonces q" es lógicamente equivalente a "p y no q".

Esto se puede reescribir simbólicamente de la siguiente manera:

$$\boxed{\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q}$$

También se puede obtener este resultado a partir de la equivalencia lógica $p \to q \equiv \sim p \vee q$. Tome la negación de ambos lados para obtener

$$\begin{aligned} \sim(p \to q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) & \\ &\equiv \sim(\sim p) \wedge (\sim q) & \text{por las leyes de De Morgan} \\ &\equiv p \wedge \sim q & \text{por la ley doble negación} \end{aligned}$$

Otra forma de obtener este resultado es la construcción de tablas de verdad para $\sim(p \to q)$ y para $p \wedge \sim q$ para comprobar que tienen el mismo valor de verdad. (Vea el ejercicio 13*b*) al final de esta sección.)

Ejemplo 2.2.5 Negaciones de enunciados *si-entonces*

Escriba las negaciones de cada uno de los siguientes enunciados:

a. Si mi automóvil está en el taller de reparaciones, entonces no puedo ir a clase.

b. Si Sara vive en Atenas, entonces, ella vive en Grecia.

Solución

a. Mi automóvil está en el taller de reparaciones y puedo ir a clase.

b. Sara vive en Atenas y no vive en Grecia. (Sara podría vivir en Atenas, Georgia; Atenas, Ohio; o Atenas, Wisconsin.) ■

¡Precaución! Recuerde que **la negación de un enunciado si-entonces no empieza con la palabra *si*.**

Es tentador escribir la negación de un enunciado si-entonces como otro enunciado si-entonces. ¡Por favor, resista la tentación!

El contrapositivo de un enunciado condicional

Una de las leyes más fundamentales de la lógica es la equivalencia entre un enunciado condicional y su contrapositivo.

• Definición

El **contrapositivo** de un enunciado condicional de la forma "si p entonces q" es

$$\text{Si } \sim q \text{ entonces } \sim p.$$

Simbólicamente,

$$\text{El contrapositivo de } p \to q \text{ es } \sim q \to \sim p.$$

El hecho es que

> Un enunciado condicional es lógicamente equivalente a su contrapositivo.

En el ejercicio 26 al final de esta sección, se le pide que establezca esta equivalencia.

Ejemplo 2.2.6 Escriba el contrapositivo

Escriba cada uno de los siguientes enunciados en su forma contrapositiva equivalente:

a. Si Howard puede atravesar a nado el lago, entonces, Howard puede nadar a la isla.

b. Si hoy es domingo de Pascua, entonces mañana es lunes.

Solución

a. Si Howard no puede nadar a la isla, entonces, Howard no puede cruzar nadando el lago.

b. Si mañana no es lunes, entonces hoy no es domingo de Pascua. ■

Cuando está tratando de resolver ciertos problemas, puede encontrar la forma contrapositiva de un enunciado condicional con la que es más fácil trabajar que con el enunciado original. Sustituyendo un enunciado con su contrapositivo puede dar el empuje extra que ayuda en la búsqueda de una solución. Esta equivalencia lógica es también la base para una de las leyes más importantes de la deducción, el *modus tollens* (que se explica en la sección 2.3) y para el método contrapositivo de la demostración (que se explica en la sección 4.6).

El converso y la contraria de un enunciado condicional

El hecho de que un enunciado condicional y su contrapositivo sean lógicamente equivalentes es muy importante y tiene una amplia aplicación. Dos variantes de un enunciado condicional *no* son lógicamente equivalentes al enunciado.

• Definición

Suponga un enunciado condicional dado de la forma "Si p entonces q".

1. El **converso** es "si q entonces p".
2. El **contrario** es "si $\sim p$ entonces $\sim q$".

Simbólicamente,

$$\text{El converso de } p \to q \text{ es } q \to p.$$

y

$$\text{El contrario de } p \to q \text{ es } \sim p \to \sim q.$$

Ejemplo 2.2.7 Escritura del converso y del contrario

Escriba el converso y el contrario de cada uno de los siguientes enunciados:

a. Si Howard puede nadar atravesando del lago, entonces, Howard puede nadar a la isla.

b. Si hoy es domingo de Pascua, mañana es lunes.

Solución

a. *Converso*: Si Howard puede nadar a la isla, entonces, Howard puede atravesar a nado el lago.
Contrario: Si Howard no puede cruzar a nado el lago, entonces, Howard no puede nadar a la isla.

b. *Converso*: Si mañana es lunes, entonces hoy es domingo de Pascua.
Contrario: Si hoy no es domingo de Pascua, entonces mañana no es lunes. ■

¡Precaución! Muchas personas creen que si un enunciado condicional es verdadero, entonces su converso e inverso también deben ser verdaderos. ¡Esto no es correcto!

Observe que, aunque el enunciado "Si hoy es domingo de Pascua, mañana es lunes" siempre es verdadero, tanto su converso como su contrario son falsos para cada domingo excepto el domingo de Pascua.

1. Un enunciado condicional y su converso *no* son lógicamente equivalentes.
2. Un enunciado condicional y su contrario *no* son lógicamente equivalentes.
3. El converso y el contrario de un enunciado condicional son lógicamente equivalentes entre sí.

En los ejercicios 24, 25 y 27 al final de esta sección, se le pide utilizar tablas de verdad para comprobar los enunciados del cuadro anterior. Considere que la verdad del enunciado de 3 también se deduce de la observación de que el contrario de un enunciado condicional es el contrapositivo de su converso.

Sólo si y el bicondicional

Decir "p sólo si q" significa que p *sólo* puede tener lugar si q también ocurre. Es decir, si q no ocurre, entonces p no puede ocurrir. Otra forma de decir esto es que si ocurre p, entonces q también debe ocurrir (por equivalencia lógica entre un enunciado y su contrapositivo).

• Definición

Si p y q son enunciados,

$$p \textbf{ sólo si } q \quad \text{significa} \quad \text{“si no } q \text{ entonces no } p\text{”.}$$

o, equivalentemente,

$$\text{“si } p\text{, entonces } q\text{”.}$$

Ejemplo 2.2.8 Convertir *sólo si* a *si-entonces*

Reescriba el siguiente enunciado en la forma si-entonces de dos maneras, una de las cuales es el contrapositivo de la otra.

> John romperá el récord mundial para la carrera de una milla sólo si corre la milla en menos de cuatro minutos.

Solución *Versión* 1: Si John no corre la milla en menos de cuatro minutos, entonces no romperá el récord mundial.

Versión 2: Si John bate el récord mundial, entonces tendrá que correr la milla en menos de cuatro minutos. ■

¡Precaución! “p sólo si q” *no* significa “p si q”.

Observe que es posible que “p sólo si q” sea verdadero en el momento en que “p si q” es falso. Por ejemplo, decir que John va a romper el récord mundial sólo si corre la milla en menos de cuatro minutos no quiere decir que John romperá el récord mundial si corre la milla en menos de cuatro minutos. Su tiempo puede ser menor de cuatro minutos, pero aún no lo suficientemente rápido para romper el récord.

• Definición

Dados los enunciados de variables p y q, el **bicondicional de** $\boldsymbol{p}$ **y** $\boldsymbol{q}$ es “p si y sólo si q” y se denota por $p \leftrightarrow q$. Es verdadero, si tanto p como q tienen los mismos valores de verdad y es falso si p y q tienen valores de verdad opuestos. Las palabras *si y sólo si* a veces se abrevian como **iff**.

El bicondicional tiene la siguiente tabla de verdad:

Tabla de verdad para $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

El orden de las operaciones $\leftrightarrow$ es igual que con $\rightarrow$. Como con $\wedge$ y $\vee$, la única manera para indicar la prioridad entre ellos es el uso de paréntesis. En la página siguiente, se muestra la jerarquía completa de las operaciones de los cinco operadores lógicos.

Orden de operaciones para los operadores lógicos

1. $\sim$ Primero evalúe las negaciones.
2. $\wedge, \vee$ Segundo evalúe $\wedge$ y $\vee$. Cuando ambos están presentes, el paréntesis puede ser necesario.
3. $\rightarrow, \leftrightarrow$ Tercero evalúe $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$. Cuando ambos están presentes, el paréntesis puede ser necesario.

De acuerdo con las definiciones por separado de *sí* y sólo *si*, que dicen que "p si y sólo si, q" debe significar lo mismo que decir tanto "p si q" como "p sólo si q". La siguiente tabla de verdad muestra en la anotación que este es el caso:

Tabla de verdad, que demuestra que $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

$p \leftrightarrow q$ y $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ siempre tienen los mismos valores de verdad, por lo que son lógicamente equivalentes

Ejemplo 2.2.9 *Si y sólo si*

Reescriba el enunciado siguiente como una conjunción de dos enunciados si-entonces:

> Este programa de computadora es correcto si y sólo si, produce respuestas correctas para todos los posibles conjuntos de datos de entrada.

Solución Si este programa es correcto, entonces produce las respuestas correctas para todos los posibles conjuntos de datos de entrada y si este programa produce las respuestas correctas para todos los posibles conjuntos de datos de entrada, entonces es correcto. ■

Condiciones necesarias y suficientes

Las frases *condición necesaria* y *condición suficiente*, tal como se utilizan en el español formal, corresponden exactamente con sus definiciones en lógica.

• Definición

Si r y s son enunciados:

r es una **condición suficiente** para s significa "si r entonces s".

r es una **condición necesaria** para s significa "si no r entonces no s".

En otras palabras, decir que "r es una condición suficiente para s" significa que la aparición de r es *suficiente* para garantizar la presencia de s. Por otro lado, decir "r es condición necesaria para s" significa que si r no se produce, entonces, s no puede ocurrir:

La ocurrencia de r es *necesaria* para obtener la ocurrencia de s. Considere que debido a la equivalencia entre un enunciado y su contrapositivo,

> r es una condición necesaria para s también significa "si s entonces r".

En consecuencia,

> r es una condición necesaria y suficiente para s significa "r si y sólo si, s".

Ejemplo 2.2.10 Interpretación de condiciones necesarias y suficientes

Considere el enunciado "Si John es elegible para votar, entonces tiene por lo menos 18 años de edad". La verdad de la condición de "John es elegible para votar" es *suficiente* para garantizar la verdad de la condición que "John tiene por lo menos 18 años de edad". Además, la condición de "John tiene por lo menos 18 años de edad" es *necesaria* para que la condición de "John tiene derecho a votar" sea verdad. Si John fuera menor de 18 años, entonces no tendrían derecho a voto. ■

Ejemplo 2.2.11 Conversión de una condición suficiente para la forma si-entonces

Reescriba el siguiente enunciado en la forma "Si A entonces B":

> El nacimiento de Pía en territorio de EE.UU. es una condición suficiente para que ella sea ciudadana de EE.UU.

Solución Si Pía nació en territorio de EE.UU., entonces es ciudadana de EE.UU. ■

Ejemplo 2.2.12 Conversión de una condición necesaria para la forma si-entonces

Utilice la contraposición para reescribir el enunciado siguiente de dos maneras:

> Que George tenga la edad de 35 es una condición necesaria para ser presidente de Estados Unidos.

Solución *Versión* 1: Si George no tiene la edad de 35 años, entonces no puede ser presidente de Estados Unidos.

Versión 2: Si George puede ser presidente de Estados Unidos, entonces tiene la edad de 35 años. ■

Observaciones

1. *En lógica, no se requiere que la hipótesis y la conclusión sean temas relacionados*.

   En el lenguaje común nunca decimos cosas como "Si las computadoras son máquinas, entonces, Babe Ruth fue un jugador de béisbol" o "Si $2 + 2 = 5$, entonces Mickey Mouse es el presidente de Estados Unidos". Se formula una frase como "si p, entonces q" sólo si existe alguna relación de contenido entre p y q.

   Sin embargo, en la lógica, las dos partes de un enunciado condicional no necesitan tener significados relacionados. ¿La razón? Si hubiera dicho requisito, ¿qué lo haría cumplir? Lo que una persona percibe como dos cláusulas no relacionadas a otra persona le pueden parecer relacionadas. Tendría que haber un árbitro central para comprobar cada frase condicional antes de que alguien la use, para estar seguro de que sus cláusulas tenían la relación adecuada. Eso es poco práctico, ¡en pocas palabras!

Por tanto un enunciado como "si las computadoras son máquinas, entonces, Babe Ruth fue un jugador de béisbol" se permite, e incluso se llama verdadero porque tanto su hipótesis como su conclusión son verdaderas. Del mismo modo, el enunciado "Si $2 + 2 = 5$, entonces, Mickey Mouse es el presidente de Estados Unidos" se permite y se llama verdadero porque la hipótesis es falsa, aunque hacerlo puede parecer ridículo.

En matemáticas sucede con frecuencia que una definición cuidadosamente formulada cubre con éxito situaciones para las que fue concebida principalmente, posteriormente satisface algunos casos extremos que el formulador no tenía en mente. Pero esas son excepciones y es importante adquirir el hábito de explorar plenamente las definiciones de buscar y entender *todas* sus instancias, aún las más inusuales.

2. *En lenguaje informal, los condicionales simples se utilizan con frecuencia para significar bicondicionales*.

   El enunciado formal de "p si y sólo si, q" rara vez se utiliza en el lenguaje ordinario: Con frecuencia, cuando las personas intentan el bicondicional dejan de lado el *sí y sólo si* o el *sí y*. Esto es, dicen ya sea "p si q" o "p sólo si q", cuando en realidad significa "p si y sólo si, q". Por ejemplo, considere el enunciado "tendrá postre si y sólo si, come su cena". Lógicamente, es equivalente a la conjunción de los dos enunciados.

   Enunciado 1: Si come la cena, tendrá postre.

   Enunciado 2: Tendrá postre sólo si se come su cena.

   o

   Si no come la cena, entonces no tendrá postre.

Ahora, ¿Cuántos padres en la historia del mundo han dicho a sus hijos "tendrás postre, si y sólo si, comes tu cena"? ¡No muchos! La mayoría dicen, "Si comes la cena, tendrás un postre" (éstas tienen enfoque positivo; hacen hincapié en la recompensa) o "Tendrás postre sólo si comes tu cena" (éstas tienen enfoque negativo; destacan el castigo). Sin embargo, los padres que prometen premiar sugieren también el castigo y los que amenazan con castigo sin duda darán la recompensa si se gana. Ambos grupos de padres esperan que sus enunciados condicionales se interpreten como bicondicionales.

Dado que con frecuencia (correctamente) interpretamos los enunciados condicionales como bicondicionales, no es sorprendente que podamos llegar a creer (erróneamente) que los enunciados condicionales son siempre lógicamente equivalentes a sus contrarios y conversos. Sin embargo, en contextos formales, los enunciados deben tener interpretaciones inequívocas. Los enunciados si-entonces no pueden algunas veces significar "si-entonces" y otras veces significar "si y sólo si". Cuando se utiliza el lenguaje en matemáticas, ciencias, o en otras situaciones donde la precisión es importante, es esencial interpretar los enunciados si-entonces de acuerdo a la definición formal y no confundirlos con sus conversos y contrarios.

Autoexamen

1. Un enunciado *si-entonces* es falso si y sólo si, la hipótesis es _____ y la conclusión es _____.
2. La negación de "si p, entonces q" es _____.
3. El converso de "si p, entonces q" es _____.
4. El contrapositivo de "si p, entonces q" es _____.
5. El contrario de "si p, entonces q" es _____.
6. Un enunciado condicional y su contrapositivo son _____.
7. Un enunciado condicional y su converso no son _____.
8. "R es una condición suficiente para S" significa si _____ entonces _____".
9. "R es una condición necesaria para S" significa "si _____ entonces _____".
10. "R sólo si S" significa "si _____ entonces _____".

Conjunto de ejercicios 2.2

En los ejercicios 1 al 4, reescriba los enunciados en la forma si-entonces.

1. Este bucle se repetirá exactamente N veces, si no contiene un **alto** o un **siga**.

2. Estoy a tiempo para el trabajo si tomo el autobús de las 8:05.

3. Se detiene o dispararé.

4. Arregle mi techo o no voy a pagar el alquiler.

En los ejercicios del 5 al 11, construya tablas de verdad para las formas de enunciado.

5. $\sim p \vee q \to \sim q$

6. $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \to q$

7. $p \wedge \sim q \to r$

8. $\sim p \vee q \to r$

9. $p \wedge \sim r \leftrightarrow q \vee r$

10. $(p \to r) \leftrightarrow (q \to r)$

11. $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$

12. Use la equivalencia lógica establecida en el ejemplo 2.2.3, $p \vee q \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$, reescriba el siguiente enunciado. (Supongamos que x representa un número real fijo).

Si $x > 2$ o $x < -2$, entonces $x^2 > 4$.

13. Utilice tablas de verdad para comprobar la equivalencia lógica siguiente. Incluya algunas palabras de explicación con sus respuestas.

a. $p \to q \equiv \sim p \vee q$ b. $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$.

H 14. **a.** Muestre que las siguientes formas de enunciados son lógicamente equivalentes.

$$p \to q \vee r, \quad p \wedge \sim q \to r \quad \text{y} \quad p \wedge \sim r \to q$$

b. Utilice las equivalencias lógicas establecidas en el inciso *a*) para reescribir la siguiente frase de dos maneras diferentes. (Suponga que n representa un entero fijo.)

Si n es primo, entonces n es impar o n es 2.

15. Determine si las siguientes formas de enunciado son lógicamente equivalentes:

$$p \to (q \to r) \quad \text{y} \quad (p \to q) \to r$$

En los ejercicios 16 y 17, escriba cada uno de los dos enunciados en forma simbólica y determine si son lógicamente equivalentes. Incluya una tabla de verdad y algunas palabras de explicación.

16. Si pagó el precio completo y no compró en la librería Corona. No compró en la librería Corona o pagó el precio completo.

17. Si 2 es un factor de n y 3 es un factor de n, entonces 6 es un factor de n. 2 no es un factor de n o 3 no es un factor de n o 6 es un factor de n.

18. Escriba cada uno de los siguientes tres enunciados en forma simbólica y determine qué pares son lógicamente equivalentes. Incluya tablas de verdad y algunas palabras de explicación.

Si camina como un pato y habla como un pato, entonces es un pato.

O bien no camina como un pato o no habla como un pato, o es un pato.

Si no camina como un pato y no habla como un pato, entonces no es un pato.

19. ¿Verdadero o falso? La negación de “Si Susana es la madre de Luis, entonces, Ali es su primo” es “Si Susana es la madre de Luis, entonces, Ali no es su primo”.

20. Escribe negaciones para cada uno de los siguientes enunciados. (Suponga que todas las variables representan cantidades fijas o entidades, según corresponda.)
a. Si P es un cuadrado, entonces P es un rectángulo.
b. Si hoy es la víspera de Año Nuevo, entonces, mañana es enero.
c. Si la expansión decimal de r es finita, entonces r es racional.
d. Si n es primo, entonces n es impar *o* n es 2.
e. Si x es no negativo, entonces x es positivo o x es 0.
f. Si Tom es el padre de Ana, entonces, Jim es su tío y Susana es su tía.
g. Si n es divisible entre 6, entonces n es divisible entre 2 y n es divisible entre 3.

21. Supongamos que p y q son enunciados tal que $p \to q$ es falso. Encuentre los valores verdaderos de cada uno de los siguientes enunciados:

a. $\sim p \to q$ b. $p \vee q$ c. $q \to p$

H **22.** Escriba contrapositivos para los enunciados del ejercicio 20.

H **23.** Escriba el converso y el contrario de cada enunciado del ejercicio 20.

En los ejercicios del 24 al 27, utilice tablas de verdad para establecer la verdad de cada enunciado.

24. Un enunciado condicional no es lógicamente equivalente a su converso.

25. Un enunciado condicional no es lógicamente equivalente a su contrario.

26. Un enunciado condicional y su contrapositivo son lógicamente equivalentes entre sí.

27. El converso y el contrario de un enunciado condicional son lógicamente equivalentes entre sí.

H **28.** “¿Significa que piensa que puede encontrar la respuesta a esto?” le dijo la Liebre de Marzo.

“Exactamente”, dijo Alicia.

“Entonces debes decir lo que quieres decir”, prosiguió la Liebre de Marzo.

“Lo hago”, respondió rápidamente Alicia, “por lo menos —al menos yo digo lo que quiero decir— que es la misma cosa, tú sabes”.

"No es lo mismo ¡es un poco!" dijo el Sombrerero. "¿Por qué, podría decir también que 'veo lo que como' es lo mismo que ¡yo como lo que veo!"

—De "Una loca fiesta de té" en *Alicia en el País de las Maravillas*, de Lewis Carroll.

El Sombrerero está en lo correcto. "Yo digo lo que quiero decir" no es lo mismo que "quiero decir lo que digo". Reescriba cada una de estas dos frases en la forma si-entonces y explique la relación lógica entre ellas. (Se le referencia a este ejercicio en la introducción del capítulo 4.)

Si las formas de enunciado P y Q son lógicamente equivalentes, entonces $P \leftrightarrow Q$ es una tautología. Por el contrario, si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología, entonces P y Q ¡son lógicamente equivalentes! En los ejercicios 29 al 31, use $\leftrightarrow$ para convertir cada una de las equivalencias lógicas en una tautología. Después, utilice una tabla de verdad para comprobar cada tautología.

29. $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \sim q) \to r$

30. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

31. $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

Reescriba cada uno de los enunciados en los ejercicios 32 y 33 como una conjunción de dos enunciados si-entonces.

32. Esta ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales distintas si y sólo si, su discriminante es mayor que cero.

33. Este entero es par si y sólo si, es igual a dos veces un número entero.

Reescriba los enunciados de los ejercicios 34 y 35 en la forma si-entonces de dos maneras, una de las cuales es el contrapositivo del otro.

34. Los Cachorros van a ganar el campeonato sólo si ganan el partido de mañana.

35. A Sam se le permitirá participar en la carrera de botes Signe sólo si él es un experto navegante.

36. Teniendo una gran visión de su educación, va a la corporación Prestigio y pregunta qué debe estudiar en la universidad para que se le contrate cuando se gradúe. El director de personal responde que se le contratará *sólo si* hace una carrera de matemáticas o en ciencias de la computación, obtiene un promedio de B o mejor y toma el curso de contabilidad. De hecho, lo hace, estudia matemáticas, obtiene un promedio de B^+ y estudia contabilidad. Regresa a la compañía Prestigio, hace una solicitud formal y es rechazada. ¿El director de personal le mintió?

Algunos lenguajes de programación utilizan enunciados de la forma "r a menos que s" significa que mientras s no suceda, entonces r ocurrirá. Más formalmente:

> **Definición:** Si r y s son enunciados,
>
> ***r* a menos que *s*** significa que si $\sim s$ entonces r.

En los ejercicios del 37 al 39, reescriba los enunciados en la forma si-entonces.

37. El pago se efectuará en la quinta a menos que se conceda una nueva audiencia.

38. Ann irá a menos que llueva.

39. Esta puerta no se abrirá a menos que se introduzca un código de seguridad.

Reescriba los enunciados 40 y 41 en la forma si-entonces.

40. Tomar el autobús a las 8:05 es una condición suficiente para que yo llegue a tiempo al trabajo.

41. Tener dos ángulos de 45° es una condición suficiente para que este triángulo sea un triángulo rectángulo.

Utilice el contrapositivo para reescribir los enunciados de los ejercicios 42 y 43 en la forma si-entonces de dos maneras.

42. Ser divisible entre 3 es una condición necesaria para que este número sea divisible entre 9.

43. Hacer la tarea con regularidad es una condición necesaria para que Jim apruebe el curso.

Observe que "una condición suficiente para s es r" significa que r es una condición suficiente para s y que "una condición necesaria para s es r" significa que r es una condición necesaria para s. Reescriba los enunciados de los ejercicios 44 y 45 en la forma si-entonces.

44. Una condición suficiente para que el equipo de Jon gane el campeonato es que gane el resto de sus juegos.

45. Una condición necesaria para que este programa de computadora esté correcto es que no se produzcan mensajes de error durante la corrida.

46. "Si el compuesto X está hirviendo, entonces, su temperatura debe ser de al menos 150 °C". Suponiendo que este enunciado sea verdadero, cuál de los siguientes enunciados también debe ser verdadero?
   a. Si la temperatura del compuesto X es al menos de 150 °C, el compuesto X está hirviendo.
   b. Si la temperatura del compuesto X es menor de 150 °C, entonces, el compuesto X no está hirviendo.
   c. El compuesto X hierve sólo si su temperatura es de al menos150 °C.
   d. Si el compuesto X no está hirviendo, entonces, su temperatura es inferior a 150 °C.
   e. Una condición necesaria para que el compuesto X hierva es que su temperatura es por lo menos de 150 °C.
   f. Una condición suficiente para que el compuesto X hierva es que su temperatura sea por lo menos de 150 °C.

En los ejercicios 47 a 50 *a*) use las equivalencias lógicas $p \to q \equiv \sim p \vee q$ y $p \leftrightarrow q = (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ para reescribir las formas de enunciado dado sin utilizar el símbolo $\to$ o $\leftrightarrow$ y *b*) utilice la equivalencia lógica $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ para reescribir cada forma de enunciado usando solamente $\wedge$ y $\sim$.

47. $p \wedge \sim q \to r$

48. $p \vee \sim q \to r \vee q$

49. $(p \to r) \leftrightarrow (q \to r)$

50. $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$

51. ¿Dada cualquier forma de enunciado, es posible encontrar una forma lógicamente equivalente que sólo use $\sim$ y $\wedge$? Justifique su respuesta.

Respuestas del autoexamen

1. verdadera; falsa 2. $p \wedge \sim q$ 3. si q entonces p 4. si $\sim q$ entonces $\sim p$ 5. si $\sim p$ entonces $\sim q$ 6. lógicamente equivalentes 7. lógicamente equivalentes 8. R; S 9. S; R 10. R; S

2.3 Argumentos válidos y no válidos

"Por el contrario", continuó Patachún, "si fuera así, podría ser y si así fuera, sería, pero como no lo es, no es. Es lógico". —Lewis Carroll, *A través del espejo*

En las matemáticas y en lógica un argumento no es una disputa. Es una secuencia de instrucciones que terminan en una conclusión. En esta sección se muestra cómo determinar si un argumento es válido, es decir, si la conclusión se deduce *necesariamente* de los enunciados anteriores. Demostraremos que esta decisión sólo depende de la forma de un argumento, no de su contenido.

En la sección 2.1, se mostró que la forma lógica de un argumento puede abstraerse de su contenido. Por ejemplo, el argumento

Si Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es mortal.
Sócrates es un hombre.
∴ Sócrates es mortal.

tiene la forma resumida

Si p, entonces q
p
$\therefore q$

Cuando considere la forma abstracta de un argumento, piense en p y q como variables con las cuales se pueden sustituir los enunciados. Una forma de argumento se llama *válida* si y sólo si, una vez que se sustituyen los enunciados que hacen todas las premisas verdaderas, la conclusión también es verdadera.

• Definición

Un **argumento** es una secuencia de enunciados y una **forma de argumento** es una secuencia de formas de enunciado. Todos los enunciados en un argumento y todas las formas de enunciado en una forma de argumento, a excepción de la final, se llaman **premisas** (o **suposiciones** o **hipótesis**). El enunciado final o forma de enunciado se llama la **conclusión**. El símbolo ∴, que se lee "por tanto", se coloca normalmente justo antes de la conclusión.

Decir que una *forma de argumento* es **válida** significa que no importan qué argumentos particulares sean sustituidos por los enunciados variables en sus premisas, si las premisas resultantes son todas verdaderas, entonces la conclusión también es verdadera. Decir que un *argumento* es **válido** significa que su forma es válida.

El hecho crucial acerca de un argumento válido es que lo verdadero de su conclusión se deduce *necesariamente* o *inevitablemente* o *por la forma lógica sólo* de lo verdadero de sus premisas. Es imposible tener un argumento válido con premisas verdaderas y una falsa conclusión. Cuando un argumento es válido y sus premisas son verdaderas, se dice que lo verdadero de la conclusión *se infiere o se deduce* de lo verdadero de las premisas. Si una conclusión "no es necesariamente así", entonces no es una deducción válida.

Prueba de la validez de una forma de argumento

1. Identifique las premisas y la conclusión de la forma de argumento.
2. Construya una tabla de verdad que muestre los valores de verdad de todas las premisas y la conclusión.
3. Un renglón de la tabla de verdad en el que todas las premisas son verdaderas se llama un **renglón crítico**. Si hay un renglón crítico en el que la conclusión es falsa, entonces es posible que un argumento de la forma dada tenga premisas verdaderas y una conclusión falsa, por lo que la forma del argumento es no válida. Si la conclusión en *cada* renglón crítico es verdadera, entonces la forma del argumento es válida.

Ejemplo 2.3.1 Determinación de validez o no validez

Determine si la siguiente forma de argumento es válida o no válida sacando una tabla de verdad, indicando qué columnas representan las premisas y cuáles representan la conclusión y anotando en la tabla una frase de la explicación. Cuando complete la tabla sólo tiene que indicar los valores de verdad para la conclusión en los renglones en que todas las premisas son verdaderas (los renglones críticos), porque los valores verdaderos de la conclusión en otros renglones son irrelevantes para la validez o no validez del argumento.

$$p \to q \vee \sim r$$
$$q \to p \wedge r$$
$$\therefore p \to r$$

Solución La tabla de verdad muestra que a pesar de que existen varias situaciones en los que las premisas y la conclusión son verdaderas (renglones 1, 7 y 8), hay una situación (renglón 4) donde las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa.

						premisas		conclusión
p	q	r	$\sim r$	$q \vee \sim r$	$p \wedge r$	$p \to q \vee \sim r$	$q \to p \wedge r$	$p \to r$
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	F	
V	F	V	F	F	V	F	V	
V	F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F	
F	V	F	V	V	F	V	F	
F	F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V

Este renglón muestra que un argumento de esta forma puede tener premisas verdaderas y una conclusión falsa. Por tanto esta forma de argumento es no válida

Modus ponens y Modus tollens

Una forma de argumento que consiste en dos premisas y una conclusión se le llama un **silogismo**. La primera y segunda premisas se llaman la **premisa mayor** y la **premisa menor**, respectivamente.

La forma más famosa del silogismo en lógica se llama **modus ponens**. Tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{Si } p \text{ entonces } q. \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

Este es un argumento de esta forma:

Si la suma de los dígitos de 371 487 es divisible entre 3, entonces 371 487 es divisible entre 3.

La suma de los dígitos de 371 487 es divisible entre 3.

∴ 371 487 es divisible por 3.

El término *modus ponens* en latín significa "método de afirmación" (la conclusión es una afirmación). Mucho antes de que viera su primera tabla de verdad, sin duda, que se convenció con argumentos de esta forma. Sin embargo, es instructivo demostrar que el *modus ponens* es una forma válida de argumento si no hay otra razón que la de confirmar el acuerdo entre la definición formal de validez y el concepto intuitivo. Para hacer esto, se construye una tabla de verdad para las premisas y la conclusión.

		premisas		conclusión	
p	q	$p \to q$	p	q	
V	V	V	V	V	⟵ renglón crítico
V	F	F	V		
F	V	V	F		
F	F	V	F		

El primer renglón es el único en la que ambas premisas son verdaderas y la conclusión de ese renglón también es verdadera. De ahí que la forma del argumento es válida.

Ahora consideremos otra forma de argumento válido llamada **modus tollens**. Tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{Si } p \text{ entonces } q. \\ \sim q \\ \therefore \sim p \end{array}$$

Un ejemplo del *modus tollens* es:

Si Zeus es humano, entonces Zeus es mortal.

Zeus no es mortal.

∴ Zeus no es humano.

Una explicación intuitiva de la validez del *modus tollens* utiliza la demostración por contradicción. Dice así:

Supongamos

1) Si Zeus es humano, entonces Zeus es mortal, y

2) Zeus no es mortal.

¿Zeus necesariamente debe ser no humano?

¡Sí!

Porque, si Zeus fuera humano, entonces por 1) iba a ser mortal.

Pero por 2) no es mortal.

Por tanto, Zeus no puede ser humano.

Modus tollens es latín y significa "método de la negación" (la conclusión es una negación). La validez del *modus tollens* es que se puede demostrar que se deduce del *modus ponens*, junto con el hecho de que un enunciado condicional es lógicamente equivalente a su contrapositivo. O se puede establecer formalmente usando una tabla de verdad. (Vea el ejercicio 13.)

Estudios realizados por psicólogos cognitivos han demostrado que, si bien casi el 100% de los estudiantes universitarios tienen una comprensión sólida e intuitiva del *modus ponens*, menos de 60% son capaces de aplicar *modus tollens* correctamente.* Sin embargo, en el razonamiento matemático, el *modus tollens* se utiliza casi con tanta frecuencia como el *modus ponens*. Por tanto, es importante estudiar cuidadosamente la forma del *modus tollens* para aprender a utilizarlo de manera eficaz.

Ejemplo 2.3.2 Reconociendo el modus ponens y el modus tollens

Utilice el *modus ponens* o el *modus tollens* para llenar los espacios en blanco de los siguientes argumentos para que se conviertan en inferencias válidas.

a. Si hay más palomas que casilleros, por lo menos dos palomas se posan en el mismo casillero.
Hay más palomas que casilleros.
∴ ______________________________.

b. Si 870232 es divisible entre 6, entonces es divisible entre 3.
870232 no es divisible entre 3.
∴ ______________________________.

Solución

a. Al menos dos palomas se posan en el mismo casillero. por el *modus ponens*

b. 870232 no es divisible entre 6. por el *modus tollens* ■

Formas adicionales de argumento válido: reglas de inferencia

Una ***regla de inferencia*** es una forma de argumento, que es válida. Así el *modus ponens* y el *modus tollens* son reglas de inferencia. Los siguientes son ejemplos de reglas de inferencia que se utilizan con frecuencia en el razonamiento deductivo.

Ejemplo 2.3.3 Generalización

Las siguientes formas de argumento son válidas:

a. p
$\therefore p \vee q$

b. q
$\therefore p \vee q$

Estas formas de argumento se utilizan para hacer generalizaciones. Por ejemplo, de acuerdo con la primera, si p es verdadero, entonces, más generalmente, "p o q" es verdadero para *cualquier* otro enunciado q. Como un ejemplo, supongamos que le han dado el trabajo de contar a los estudiantes de clase social alta en su escuela. Pregunta en qué clase se encuentra Antón y le dicen que es un joven rico.

* *Psicología Cognitiva y sus implicaciones*, 3a. ed. por John R. Anderson (Nueva York: Freeman, 1990), páginas 292-297.

Razona de la siguiente manera:

Anton es un joven rico.

$\therefore$ (en general) Anton es un joven rico o Anton es un adulto rico.

Sabiendo que la clase social alta significa joven o adulto rico, agrega a Antón a su lista. ■

Ejemplo 2.3.4 Especialización

Las siguientes formas de argumento son válidas:

a. $p \wedge q$
$\therefore p$

b. $p \wedge q$
$\therefore q$

Estas formas de argumento se utilizan para la especialización. Cuando se clasifican objetos de acuerdo con alguna propiedad, con frecuencia se sabe mucho más de ellos que si tienen o no esa propiedad. Cuando esto sucede, descarte la información extraña conforme se concentra en la propiedad particular de interés.

Por ejemplo, supongamos que usted está buscando una persona que sabe algoritmos gráficos para trabajar en su proyecto. Descubre que Ana sabe tanto análisis numérico como algoritmos gráficos. Razona de la siguiente manera:

Ana sabe análisis numérico y Ana sabe algoritmos gráficos.

$\therefore$ (en particular) Ana sabe algoritmos gráficos.

En consecuencia, la invita a trabajar con usted en su proyecto. ■

Tanto la generalización como la especialización se utilizan con frecuencia en matemáticas hechas a la medida para ajustar las hipótesis de los teoremas conocidos con el fin de obtener nuevas conclusiones. La eliminación, la transitividad y la demostración por división en casos son también herramientas ampliamente utilizadas.

Ejemplo 2.3.5 Eliminación

Las siguientes formas de argumento son válidas:

a. $p \vee q$
$\sim q$
$\therefore p$

b. $p \vee q$
$\sim p$
$\therefore q$

Digamos que estas formas de argumento tienen sólo dos posibilidades y si se puede descartar una, la otra debe ser el caso. Por ejemplo, supongamos que sabe que para un determinado número x,

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0.$$

Si también sabe que x no es negativo, entonces $x \neq -2$, por lo que

$$x + 2 \neq 0.$$

Por eliminación, entonces puede concluir que

$$\therefore x - 3 = 0.$$

■

Ejemplo 2.3.6 Transitividad

La siguiente forma de argumento es válida:

$$\begin{aligned} p &\to q \\ q &\to r \\ \therefore p &\to r \end{aligned}$$

Muchos de los argumentos en matemáticas contienen cadenas de enunciados si-entonces. Del hecho de que un enunciado implica un segundo y el segundo implica un tercero, se puede concluir que el primer enunciado implica el tercero. Por ejemplo:

Si 18 486 es divisible entre 18, entonces 18 486 es divisible entre 9.
Si 18 486 es divisible entre 9, entonces la suma de los dígitos de 18 486 es divisible entre 9.
$\therefore$ Si 18 486 es divisible entre 18, entonces la suma de los dígitos de 18 486 es divisible entre 9. ■

Ejemplo 2.3.7 Demostración por división en casos

La siguiente forma de argumento es válida:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \therefore r \end{array}$$

Sucede con frecuencia que sabe que una cosa u otra es verdad. Si puede demostrar que en cualquier caso se deduce una conclusión verdadera, entonces, esta conclusión también debe ser verdadera. Por ejemplo, supongamos que sabemos que x es un número real dado distinto de cero. La propiedad de tricotomía de los números reales, dice que cualquier número es positivo, negativo o cero. Por tanto (por eliminación) usted sabe que x es positivo o que x es negativo. Puede deducir que $x^2 > 0$ argumentando de la siguiente manera:

x es positivo o x es negativo.
Si x es positivo, entonces $x^2 > 0$.
Si x es negativo, entonces $x^2 > 0$.
$\therefore x^2 > 0$. ■

Las reglas de inferencia válida se utilizan constantemente en la solución de problemas. A continuación se presenta un ejemplo de la vida cotidiana.

Ejemplo 2.3.8 Aplicación: una deducción más compleja

Está a punto de salir para la escuela en la mañana y descubre que no tiene sus lentes. Sabe que los siguientes enunciados son verdaderos:

a. Si yo estaba leyendo el periódico en la cocina, entonces, mis lentes están sobre la mesa de la cocina.

b. Si los lentes están sobre la mesa de la cocina, entonces los vi en el desayuno.

c. No he visto mis lentes en el desayuno.

d. Yo estaba leyendo el periódico en la sala o estaba leyendo el periódico en la cocina.

e. Si yo estaba leyendo el periódico en la sala entonces, mis lentes están sobre la mesa del café.

¿Dónde están los lentes?

Solución Sea RK = Yo estuve leyendo el periódico en la cocina.
GK = Mis lentes están sobre la mesa de la cocina.
SB = Vi mis lentes en el desayuno.
RL = Estuve leyendo el periódico en la sala.
GC = Mis lentes están sobre la mesa del café.

A continuación se presenta una secuencia de pasos que puede utilizar para llegar a la respuesta, junto con las reglas de inferencia que le permiten sacar la conclusión de cada etapa:

1. $RK \to GK$ por *a*)
   $GK \to SB$ por *b*)
   $\therefore RK \to SB$ por transitividad
2. $RK \to SB$ por la conclusión de 1)
   $\sim SB$ por *c*)
   $\therefore \sim RK$ por *modus tollens*
3. $RL \vee RK$ por *d*)
   $\sim RK$ por la conclusión de 2)
   $\therefore RL$ por eliminación
4. $RL \to GC$ por *e*)
   RL por la conclusión de 3)
   $\therefore GC$ por *modus ponens*

Así los lentes están en la mesa del café. ■

Falacias

Una **falacia** es un error en el razonamiento que da lugar a un argumento no válido. Tres falacias comunes son **usar premisas ambiguas** y tratarlas como si fueran no ambiguas, **razonamiento circular** (suponiendo que se ha demostrado sin tener que deducirlo de las premisas) y **saltar a una conclusión** (sin bases adecuadas). En esta sección se analizan otras dos falacias, *error converso* y *error contrario*, que dan lugar a argumentos que superficialmente se parecen a los que son válidos por el *modus ponens* y *modus tollens*, pero no son, en realidad, válidos.

Como en los ejemplos anteriores, puede demostrar que un argumento es no válido por la construcción de una tabla de verdad para la forma del argumento y la búsqueda de al menos un renglón crítico en el que todas las premisas son verdad, pero la conclusión es falsa. Otra forma es encontrar un argumento de la misma forma con premisas verdaderas y una conclusión falsa.

> Para que un argumento sea válido, todos los argumentos de la misma forma cuyas premisas son verdaderas todas deben tener una conclusión verdadera. De ello se deduce que un argumento sea invalidado significa que hay un argumento de esa forma, cuyas premisas son todas verdaderas y cuya conclusión es falsa.

Ejemplo 2.3.9 Error converso

Demuestre que el siguiente argumento es no válido:

Si Zeke es un tramposo, entonces, Zeke se sienta en la fila de atrás.
Zeke se sienta en la fila de atrás.
$\therefore$ Zeke es un tramposo.

Solución Muchas personas reconocen la invalidez del argumento anterior de forma intuitiva, con un razonamiento como éste: La primera premisa da información acerca de Zeke *si* se sabe que es un tramposo. No da ninguna información acerca de él si no es que ya sabe que es un tramposo. Uno ciertamente puede imaginarse una persona que no es tramposa, pero que se sienta en la fila de atrás. Entonces, si el nombre de esa persona se sustituye por Zeke, la primera premisa es verdadera por defecto y la segunda premisa también es verdadera, pero la conclusión es falsa.

La forma general del argumento anterior es la siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
 & p \to q \\
 & q \\
\therefore & p
\end{array}
$$

En el ejercicio 12*a*) al final de esta sección se le pide que utilice una tabla de verdad para demostrar que esta forma de argumento no es válida. ■

La falacia subyacente a esta forma de argumento no válido se llama **error converso**, porque la conclusión del argumento se deduce de las premisas si la premisa $p \to q$ se sustituyera por su converso. Sin embargo, esta sustitución no está permitida, ya que un enunciado condicional no es lógicamente equivalente a su converso. El error converso también se conoce como *la falacia de afirmar la consecuencia*.

Otro error común en el razonamiento se llama *error contrario*.

Ejemplo 2.3.10 Error inverso

Considere el siguiente argumento:

Si las tasas de interés están subiendo, los precios de la bolsa bajarán.
Las tasas de interés no están subiendo.
∴ Los precios de las acciones de mercado no bajarán.

Considere que este argumento tiene la forma siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
 & p \to q \\
 & \sim p \\
\therefore & \sim q
\end{array}
$$

¡Precaución! En lógica, las palabras *verdadera* y *válido* tienen significados muy diferentes. Un argumento válido puede tener una conclusión falsa y un argumento inválido puede tener una conclusión verdadera.

En el ejercicio 12*b*) al final de esta sección, le pedimos que presente una tabla de verdad de comprobación de la invalidez de esta forma de argumento.

La falacia subyacente a esta forma de argumento inválido se llama **error contrario** ya que la conclusión del argumento que se deduce de las premisas $p \to q$ se sustituyó por su contraria. Sin embargo, este reemplazo no está permitido, ya que, un enunciado condicional no es lógicamente equivalente a su contrario. El error contrario también se conoce como la *falacia de negar el antecedente*. ■

A veces la gente agrupa las ideas de validez y de verdad. Si un argumento parece válido, aceptan la conclusión como verdadera. Y si un argumento parece capcioso (en realidad una expresión usual para inválido), piensan que la conclusión debe ser falsa. ¡Esto no es correcto!

Ejemplo 2.3.11 Un argumento válido con una falsa premisa y una conclusión falsa

El argumento que se presenta a continuación es válido por *modus ponens*. Pero su principal premisa es falsa y también lo es su conclusión.

Si John Lennon fue una estrella de rock, entonces, John Lennon era pelirrojo.
John Lennon fue una estrella de rock.
∴ John Lennon era pelirrojo. ■

Ejemplo 2.3.12 Un argumento no válido con premisas verdaderas y una conclusión verdadera

El argumento que se presenta a continuación es no válido por error converso, pero tiene una conclusión verdadera.

Si Nueva York es una ciudad grande, entonces Nueva York tiene edificios altos.
Nueva York tiene edificios altos.
$\therefore$ Nueva York es una ciudad grande. ■

• Definición

Un argumento se llama **sólido**, si y sólo si, es válido y todas sus premisas son verdaderas. Un argumento que no es sólido se llama **no sólido**.

Lo importante a destacar es que la validez es una característica de las formas de argumento: Si un argumento es válido, también lo es cualquier otro argumento que tiene la misma forma. Del mismo modo, si un argumento es no válido, también lo es cualquier otro argumento que tiene la misma forma. Lo que caracteriza a un argumento válido es que ningún argumento cuya forma es válida puede tener todas las premisas verdaderas y una conclusión falsa. Para cada argumento válido, hay argumentos de esa forma con todas las premisas verdaderas y una conclusión verdadera, con al menos una premisa falsa y una conclusión verdadera y con al menos una premisa falsa y una conclusión falsa. Por otra parte, para cada argumento no válido, hay argumentos de esa forma con todas las combinaciones de valores verdaderos de las premisas y la conclusión, incluyendo todas las premisas verdaderas y una conclusión falsa. La conclusión es que sólo podemos estar seguros de que la conclusión de un argumento es válido cuando sabemos que el argumento es sólido, es decir, cuando sabemos que el argumento es válido y dispone de todas las premisas verdaderas.

Contradicciones y argumentos válidos

El concepto de contradicción lógica se puede utilizar para hacer inferencias a través de una técnica de razonamiento llamada *regla de contradicción*. Supongamos que p es algún enunciado cuya verdad quiere deducir.

Regla de contradicción

Si puede mostrar que la suposición de que el enunciado p es falso conduce lógicamente a una contradicción, entonces se puede concluir que p es verdadera.

Ejemplo 2.3.13 Regla de contradicción

Muestre que la siguiente forma de argumento es válida:

$$\sim P \rightarrow \mathbf{c}, \text{ donde } \mathbf{c} \text{ es una contradicción}$$
$$\therefore p$$

Solución Construya una tabla de verdad para la premisa y la conclusión de este argumento.

			premisas	conclusión
p	$\sim p$	$\mathbf{c}$	$\sim p \rightarrow \mathbf{c}$	p
V	F	F	V	V
F	V	F	F	

Hay un único renglón crítico en el que la premisa es verdadera y en este renglón la conclusión es también verdadera. Por tanto esta forma de argumento es válida. ■

La regla de contradicción es el corazón lógico del método de la demostración por contradicción. Una ligera variación también proporciona la base para resolver muchos rompecabezas lógicos mediante la eliminación de respuestas contradictorias: *Si una suposición conduce a una contradicción, entonces esa suposición debe ser falsa.*

Ejemplo 2.3.14 Caballeros y bribones

El lógico Raymond Smullyan describe una isla que contiene dos tipos de personas, caballeros que siempre dicen la verdad y bribones que siempre mienten.* Visita la isla y se le acercan dos nativos que hablan con usted de la siguiente manera:

A dice: B es un caballero.

B dice: A y yo somos del tipo opuesto.

¿Qué son A y B?

Indiana University Archives

Raymond Smullyan (nacido en 1919)

Solución A y B los dos son bribones. Para ver esto, razone de la siguiente forma:

Suponga que A es un caballero.

$\therefore$ Lo que dice A es verdad. — por definición de *caballero*

$\therefore$ B también es un caballero. — Eso es lo que dijo A.

$\therefore$ Lo que B dice también es verdadero. — por definición de *caballero*

$\therefore$ A y B son de tipo opuesto. — Eso es lo que B dice.

$\therefore$ Hemos llegado a la siguiente contradicción: A y B son dos caballeros y A y B son de tipo opuesto.

$\therefore$ La suposición es falsa. — por regla de contradicción

$\therefore$ A no es un caballero. — negación de la suposición

$\therefore$ A es un bribón. — por eliminación: dado que todos los habitantes son caballeros o bribones, ya que A no es un caballero, es un bribón.

$\therefore$ Lo que A dice es falso.

$\therefore$ B no es un caballero.

$\therefore$ B es también un bribón. — por eliminación.

Este razonamiento muestra que si el problema no tiene solución, entonces A y B deben ser bribones. Sin embargo, es concebible, que el problema no tenga solución. El enunciado del problema podría ser inherentemente contradictorio. Sin embargo, si vemos hacia atrás en la solución, se puede ver que se resuelve que tanto A como B son bribones. ■

Resumen de reglas de inferencia

La tabla 2.3.1 resume algunas de las más importantes reglas de inferencia.

∗ Raymond Smullyan ha escrito una encantadora serie de caprichosos pero profundos libros de rompecabezas lógicos que empiezan con *¿Cuál es el nombre del libro*? (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1978). Otras buenas fuentes de rompecabezas lógicos son los excelentes libros de Martin Gardner, tales como *¡Ajá! Visión* y *¡Ajá! Lo tengo* (Nueva York: W. H. Freeman, 1978, 1982).

Tabla 2.3.1 **Formas de argumento válidas**

Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore q$	**Eliminación**	**a.** $p \vee q$ $\sim q$ $\therefore p$ **b.** $p \vee q$ $\sim p$ $\therefore q$
Modus Tollens	$p \to q$ $\sim q$ $\therefore \sim p$	**Transitividad**	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$
Generalización	**a.** p $\therefore p \vee q$ **b.** q $\therefore p \vee q$	**Demostración por división en casos**	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore r$
Especialización	**a.** $p \wedge q$ $\therefore p$ **b.** $p \wedge q$ $\therefore q$		
Conjunción	p q $\therefore p \wedge q$	**Regla de contradicción**	$\sim p \to c$ $\therefore p$

Autoexamen

1. Que un argumento sea válido significa que todos los argumentos de la misma forma cuyas premisas _____ tienen una _____ conclusión.

2. Que un argumento es no válido significa que hay un argumento de la misma forma cuyas premisas _____ y cuya conclusión _____ .

3. Que un argumento sea sólido significa que es _____ y sus premisas _____. En este caso podemos estar seguros de que su conclusión _____.

Conjunto de ejercicios 2.3

Use el *modus ponens* o *modus tollens* para llenar los espacios en blanco en los ejercicios 1 al 5 para producir inferencias válidas.

1. Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces $\sqrt{2} = a/b$ para algunos enteros a y b.
No es verdad que $\sqrt{2} = a/b$ para algunos enteros a y b.
$\therefore$ ______________________________.

2. Si $1 - 0.99999\ldots$ es menor que todo número real positivo, entonces éste es igual a cero.
______________________________.
$\therefore$ El número $1 - 0.99999\ldots$ es igual a cero.

3. Si lógica es fácil, entonces soy el tío de un mono.
Yo no soy el tío de un mono.
$\therefore$ ______________________________.

4. Si esta figura es un cuadrilátero, entonces la suma de sus ángulos interiores es 360°.
La suma de los ángulos interiores de esta figura no es 360°.
$\therefore$ ______________________________.

5. Si ellos no estaban seguros de la dirección, entonces habrían telefoneado.
______________________________.
$\therefore$ Ellos estaban seguros de la dirección.

Utilice tablas de verdad para determinar si las formas de argumento en los ejercicios 6 al 11 son válidas. Indique qué columnas representan las premisas y cuáles representan la conclusión e incluya una frase de explicación de cómo la tabla de verdad apoya su respuesta. Su explicación debe demostrar que entiende lo que significa que una forma de argumento sea válida o no válida.

6. $p \to q$
$q \to p$
$\therefore p \vee q$

7. p
$p \to q$
$\sim q \vee r$
$\therefore r$

8. $p \vee q$
$p \to \sim q$
$p \to r$
$\therefore r$

9. $p \wedge q \to \sim r$
$p \vee \sim q$
$\sim q \to p$
$\therefore \sim r$

10. $p \to r$
$q \to r$
$\therefore p \vee q \to r$

11. $p \to q \vee r$
$\sim q \vee \sim r$
$\therefore \sim p \vee \sim r$

12. Utilice tablas de verdad para demostrar que las siguientes formas de argumento son no válidas.

a. $p \to q$
q
$\therefore p$
(error converso)

b. $p \to q$
$\sim p$
$\therefore \sim q$
(error contrario)

Utilice tablas de verdad para demostrar que el argumento de las formas referidas en los ejercicios del 13 al 21 son válidas. Indique qué columnas representan las premisas y cuáles representan a la conclusión, e incluya una frase que explique cómo la tabla de verdad apoya su respuesta. Su explicación debe demostrar que usted entiende lo que significa que una forma de argumento sea válida.

13. *Modus tollens*:

$$p \to q$$
$$\sim q$$
$$\therefore \sim p$$

14. Ejemplo 2.3.3*a*)

15. Ejemplo 2.3.3*b*)

16. Ejemplo 2.3.4*a*)

17. Ejemplo 2.3.4*b*)

18. Ejemplo 2.3.5*a*)

19. Ejemplo 2.3.5*b*)

20. Ejemplo 2.3.6

21. Ejemplo 2.3.7

Utilice símbolos para escribir la forma lógica de cada argumento en los ejercicios 22 y 23 y después use una tabla de verdad para poner a prueba la validez del argumento. Indique qué columnas representan las premisas y cuáles representan a la conclusión, e incluya algunas palabras de explicación que demuestren que entiende el significado de validez.

22. Si Tom no está en el equipo *A*, entonces, Hua está en el equipo *B*.
Si Hua no está en el equipo *B*, entonces, Tom está en el equipo *A*.
∴ Tom no está en el equipo *A* o Hua no está en el equipo *B*.

23. Oleg estudia la licenciatura en matemáticas o Oleg estudia la licenciatura en economía.
Si Oleg estudia la licenciatura en matemáticas, entonces a Oleg se le requiere que curse Matemáticas 362.
∴ Oleg estudia la licenciatura en economía o a Oleg no se le requiere que curse Matemáticas 362.

Algunos de los argumentos de los ejercicios 24 a 32 son válidos, mientras que otros muestran el error converso o contrario. Utilice símbolos para escribir la forma lógica de cada argumento. Si el argumento es válido, identifique la regla de inferencia que garantiza su validez. En caso contrario, deberá indicar si se comete error converso o error contrario.

24. Si Jules resuelve este problema correctamente, entonces Jules ha obtenido la respuesta 2.
Jules ha obtenido la respuesta 2
∴ Jules ha resuelto este problema correctamente.

25. Este número real es racional o es irracional.
Este número real no es racional.
∴ Este número real es irracional.

26. Si voy al cine, no voy a terminar mi tarea. Si no termino mi tarea, no voy a hacer bien el examen de mañana.
∴ Si voy al cine, no voy a hacer bien el examen de mañana.

27. Si este número es mayor que 2, entonces su cuadrado es mayor que 4.
Este número no es mayor que 2.
∴ El cuadrado de este número no es mayor que 4.

28. Si hay tantos números racionales como número irracionales, entonces el conjunto de todos los números irracionales es infinito.
El conjunto de todos los números irracionales es infinito.
∴ Hay tantos números racionales como números irracionales.

29. Si al menos uno de estos dos números es divisible entre 6, entonces el producto de estos dos números es divisible entre 6.
Ninguno de estos dos números es divisible entre 6.
∴ El producto de estos dos números no es divisible entre 6.

30. Si este programa de computadora es correcto, entonces produce la salida correcta cuando se ejecuta con los datos de prueba que me dio el profesor.
Este programa de computadora genera la salida correcta cuando se ejecuta con los datos de prueba que me dio mi profesor.
∴ Este programa de computadora es correcto.

31. Sandra sabe Java y Sandra sabe C++.
∴ Sandra sabe C++.

32. Si me dan una gratificación de Navidad, compraré un estéreo.
Si vendo mi moto, compraré un estéreo.
∴ Si me dan gratificación de Navidad o vendo mi moto, entonces voy a comprar un estéreo.

33. Dé un ejemplo (diferente del ejemplo 2.3.11) de un argumento válido con una conclusión falsa.

34. Dé un ejemplo (diferente del ejemplo 2.3.12) de un argumento inválido con una conclusión verdadera.

35. Explique en sus propias palabras lo que distingue una forma válida de argumento de una inválida.

36. Dada la siguiente información sobre un programa de computadora, encuentre el error en el programa.
   a. Hay una variable no declarada o hay un error de sintaxis en las primeras cinco líneas.
   b. Si hay un error de sintaxis en las primeras cinco líneas, entonces, falta un punto y coma o el nombre de una variable está mal escrito.
   c. No falta un punto y coma.
   d. No está mal escrito el nombre de una variable.

37. En la parte trasera de un viejo armario descubre una nota firmada por un pirata famoso por su extraño sentido del humor y amor a los rompecabezas lógicos. En la nota escribió que él había escondido el tesoro en algún lugar de la propiedad. Hizo una lista de cinco enunciados verdaderos (del *a* al *e* que se muestran a continuación) y desafió al lector a usarlos para averiguar la ubicación del tesoro.

a. Si esta casa está al lado de un lago, entonces el tesoro no está en la cocina.
b. Si el árbol en el patio delantero es un olmo, entonces el tesoro está en la cocina.
c. Esta casa está al lado de un lago.
d. El árbol del patio delantero es un olmo o el tesoro está enterrado bajo el asta de la bandera.
e. Si el árbol del patio trasero es un roble, el tesoro está en el garaje.

¿Dónde está escondido el tesoro?

38. Usted está visitando la isla que se describe en el ejemplo 2.3.14 y tienen los siguientes encuentros con los nativos.

a. Dos nativos *A* y *B* se dirigen a usted de la siguiente manera:
A dice: Los dos somos caballeros.
B dice: *A* es un bribón.
¿Qué son *A* y *B*?

b. Se le acercan otros dos nativos *C* y *D*, pero sólo habla *C*.
C dice: Los dos son bribones.
¿Qué son *C* y *D*?

c. Después se encuentra con los nativos *E* y *F*.
E, dice: *F* es un bribón.
F dice: *E* es un bribón.
¿Cuántos bribones hay?

H **d.** Por último, se encuentra con un grupo de seis indígenas, *U*, *V*, *W*, *X*, Y y *Z*, que le hablan de la siguiente manera:
U dice: Ninguno de nosotros es un caballero.
V dice: Por lo menos tres de nosotros son caballeros.
W dice: A lo más tres de nosotros son caballeros.
X dice: Exactamente cinco de nosotros son caballeros.
Y dice: Exactamente dos de nosotros son caballeros.
Z dice: Exactamente uno de nosotros es un caballero.
¿Cuáles son caballeros y cuáles son bribones?

39. El famoso detective Percule Hoirot fue llamado para resolver un misterioso asesinato desconcertante. Él determinó los siguientes hechos:

a. Lord Hazelton, el hombre muerto, fue asesinado por un golpe en la cabeza con un candelabro de bronce.
b. Ya sea Lady Hazelton o una criada, Sara, estaba en el comedor en el momento del asesinato.
c. Si el cocinero estaba en la cocina en el momento del asesinato, el mayordomo mató a Lord Hazelton con una dosis letal de estricnina.
d. Si Lady Hazelton se encontraba en el comedor en el momento del asesinato, entonces el chofer asesinó a Lord Hazelton.
e. Si el cocinero no estaba en la cocina en el momento en que se cometió el asesinato, entonces, Sara no estaba en el comedor cuando se cometió el asesinato.
f. Si Sara estaba en el comedor en el momento que se cometió el asesinato, el *sumiller* mató a Lord Hazelton.

¿Es posible que el detective deduzca la identidad del asesino de estos hechos? Si es así, ¿quién cometió el asesinato de Lord Hazelton? (Suponga que sólo había una causa de la muerte).

40. Tiburón, un líder del hampa, fue asesinado por uno de su propia banda de cuatro secuaces. El detective Brillante entrevistó a los hombres y determinó que todos estaban mintiendo a excepción de uno. Dedujo quién mató a Tiburón con base en los siguientes enunciados:

a. Puños: El zurdo mató a Tiburón.
b. Grasa: Músculos no mató a Tiburón.
c. Zurdo: Músculos jugaba dados con Puños cuando Tiburón cayó.
d. Músculos: Zurdo no mató a Tiburón.

¿Quién mató a Tiburón?

En los ejercicios del 41 al 44 se dan un conjunto de premisas y una conclusión. Use las formas de argumento válidas que se presentan en la tabla 2.3.1 para deducir la conclusión de las premisas, dando una razón para cada paso como en el ejemplo 2.3.8. Suponga que todas las variables son enunciados variables.

41. a. $\sim p \vee q \to r$
b. $s \vee \sim q$
c. $\sim t$
d. $p \to t$
e. $\sim p \wedge r \to \sim s$
f. $\therefore \sim q$

42. a. $p \vee q$
b. $q \to r$
c. $p \wedge s \to t$
d. $\sim r$
e. $\sim q \to u \wedge s$
f. $\therefore t$

43. a. $\sim p \to r \wedge \sim s$
b. $t \to s$
c. $u \to \sim p$
d. $\sim w$
e. $u \vee w$
f. $\therefore \sim t$

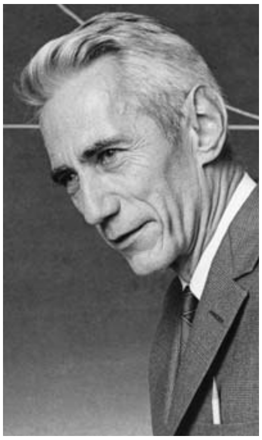
44. a. $p \to q$
b. $r \vee s$
c. $\sim s \to \sim t$
d. $\sim q \vee s$
e. $\sim s$
f. $\sim p \wedge r \to u$
g. $w \vee t$
h. $\therefore u \wedge w$

Respuestas del autoexamen

1. todas son verdaderas; verdadera 2. todas son verdaderas; es falsa 3. válida; todas son verdaderas; es verdadera

2.4 Aplicación: circuitos lógicos digitales

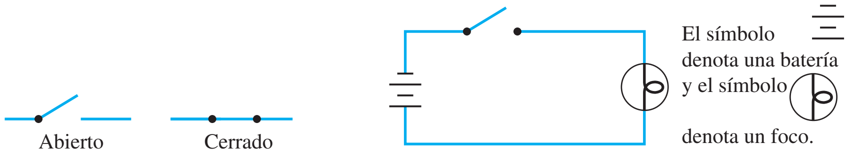
¡Sólo conecte! —E. M. Forster, *Regreso a Howards End*


MIT Museum

Claude Shannon (1916-2001)

En la década de 1930, un joven estudiante de graduados del Instituto Tecnológico de Massachusetts, llamado Claude Shannon observó una analogía entre el funcionamiento de dispositivos de conmutación, tales como conmutador telefónico: circuitos y las operaciones de conectores lógicos. Utilizó esta analogía con un éxito sorprendente para resolver problemas de diseño de circuitos y lo escribió en su tesis de maestría, que fue publicada en 1938.

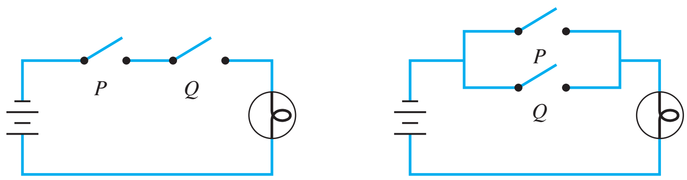
El dibujo de la figura 2.4.1*a*) muestra la presencia de dos posiciones de un interruptor simple. Cuando se cierra el interruptor, la corriente puede fluir de una terminal a la otra, cuando está abierto, la corriente no puede fluir. Imagínese que dicho interruptor es parte del circuito que se muestra en la figura 2.4.1*b*). El foco se enciende si y sólo si, la corriente fluye a través de él. Y esto ocurre si y sólo si, el interruptor está cerrado.



a) *b*)

Figura 2.4.1

Ahora consideremos los circuitos más complicados de las figuras 2.4.2*a*) y 2.4.2*b*).



a) *b*)

Figura 2.4.2

En el circuito de la figura 2.4.2*a*) la corriente fluye y se enciende el foco, si y sólo si, *ambos* interruptores *P* y *Q* están cerrados. Los interruptores de este circuito se dice que están **en serie.** En el circuito de la figura 2.4.2*b*) la corriente fluye y el foco se enciende si y sólo si *al menos uno* de los interruptores *P* o *Q* está cerrado. Los interruptores de este circuito se dice que están en **paralelo**. En la tabla 2.4.1 se describen todos los posibles comportamientos de estos circuitos.

Tabla 2.4.1

***a*) Interruptores en serie**

Interruptores		Foco
P	***Q***	**Estado**
cerrado	cerrado	encendido
cerrado	abierto	apagado
abierto	cerrado	apagado
abierto	abierto	apagado

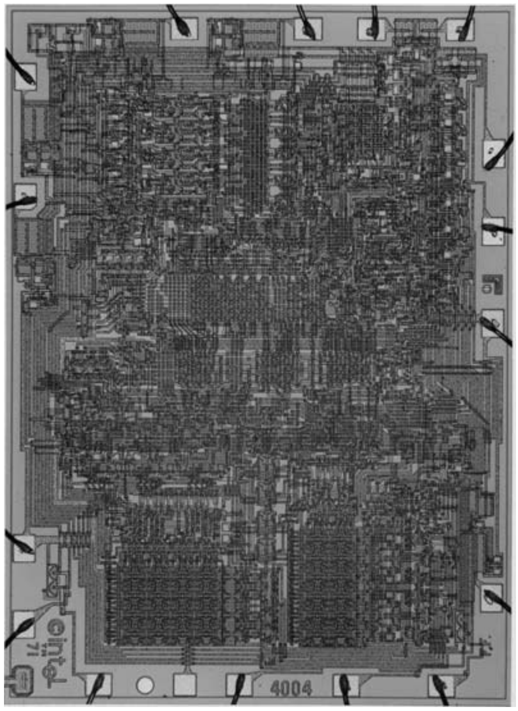
***b*) Interruptores en paralelo**

Interruptores		Foco
P	***Q***	**Estado**
cerrado	cerrado	encendido
cerrado	abierto	encendido
abierto	cerrado	encendido
abierto	abierto	apagado

Observe que si las palabras *cerrado* y *encendido* se sustituyen por V y *abierto* y cerrado se reemplazan por F, la tabla 2.4.1*a*) se convierte en la tabla de verdad para *y* y la tabla 2.4.1*b*) se convierte en la tabla de verdad para *o*. En consecuencia, el circuito de interruptores de la figura 2.4.2*a*) se dice que corresponde a la expresión lógica $P \wedge Q$ y el de la figura 2.4.2*b*) se dice que corresponden a $P \vee Q$.

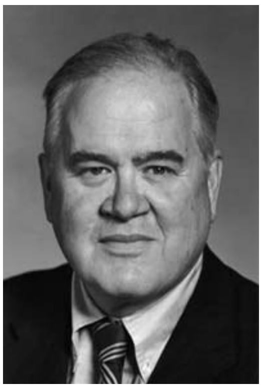
Circuitos más complicados corresponden a expresiones lógicas más complicadas. Esta correspondencia se ha utilizado ampliamente en el diseño y estudio de los circuitos.

En la década de 1940 y 1950, se reemplazaron los interruptores por dispositivos electrónicos, con estados físicos de abierto y cerrado correspondientes con los estados electrónicos, tales como alto y bajo voltajes. La nueva tecnología electrónica condujo al desarrollo de modernos sistemas digitales tales como computadoras electrónicas, sistemas electrónicos de conmutación telefónica, control de semáforos, calculadoras electrónicas y mecanismos de control utilizados en cientos de otros tipos de equipos electrónicos. Los componentes electrónicos básicos de un sistema digital se llaman *circuitos lógicos digitales*. La palabra *lógica* indica el importante papel de la lógica en el diseño de estos circuitos y la palabra *digital* indica que los circuitos de procesan en señales discretas, o por separado, señales opuestas a las continuas.



Intel

El Intel 4004, introducido en 1971, es generalmente considerado como el primer microprocesador comercialmente disponible o unidad central de procesamiento (CPU) contenido en un chip del tamaño de una uña. Constaba de 2300 transistores y podía ejecutar 70000 instrucciones por segundo, esencialmente la misma potencia de cálculo que la primera computadora electrónica, la ENIAC, construida en 1946, que ocupaba toda una habitación. Los modernos microprocesadores consisten de varios CPUs en un solo chip, contienen cerca de mil millones de transistores y muchos cientos de millones de circuitos lógicos y pueden calcular cientos de millones de instrucciones por segundo.



Courtesy of IBM

John W. Tukey (1915-2000)

Los ingenieros eléctricos continúan utilizando el lenguaje de la lógica cuando se refieren a los valores de las señales producidas por un interruptor electrónico como “verdadero” o “falso”. Pero por lo general utilizan los símbolos 1 y 0 en lugar de V y F para indicar estos valores. Los símbolos 0 y 1 se llaman **bits**, abreviatura de dígi**t**o**s** **bi**narios. Esta terminología se introdujo en 1946 por el estadístico John W. Tukey.

Cajas negras y puertas

Las combinaciones de señales de bits (1 y 0) se pueden transformar en otras combinaciones de señales de bits (1 y 0) a través de varios circuitos. Ya que se utilizan en muchas diferentes tecnologías en la construcción del circuito, los ingenieros informáticos y diseñadores de sistemas digitales encontraron útil pensar en ciertos circuitos básicos como cajas negras. El interior de una caja negra contiene la implementación detallada del circuito que con frecuencia se ignora, mientras la atención se centra en la relación entre las señales de **entrada** y **salida**.

El funcionamiento de una caja negra se especifica completamente construyendo una tabla de entrada/salida que enumera todas sus posibles señales de entrada junto con sus señales de salida correspondientes. Por ejemplo, la caja negra de la figura anterior tiene tres señales de entrada. Puesto que cada una de estas señales puede tomar el valor 1 o 0, hay ocho posibles combinaciones de las señales de entrada. Una posible correspondencia de las señales de entrada y salida es la siguiente:

Una tabla de entrada/salida

Entrada			Salida
P	***Q***	***R***	***S***
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Por ejemplo, el tercer renglón, indica que para las entradas $P = 1$, $Q = 0$ y $R = 1$, la salida S es 0.

Un método eficiente para el diseño de circuitos más complicados es construir conectando circuitos cajas negras menos complicados. Tres de estos circuitos se conocen como las puertas NOT, AND y OR.

Una **puerta NOT** (o **inversor**) es un circuito con una señal de entrada y una señal de salida. Si la señal de entrada es 1, la señal de salida es 0. Por el contrario, si la señal de entrada es 0, entonces, la señal de salida es 1. Una **puerta AND** es un circuito con dos señales de entrada y una señal de salida. Si las dos señales de entrada son 1, entonces la señal de salida es 1. De lo contrario, la señal de salida es 0. Una **puerta OR** también cuenta con dos señales de entrada y una señal de salida. Si las dos señales de entrada son 0, entonces la señal de salida es 0. De lo contrario, la señal de salida es 1.

Las acciones de las puertas NOT, AND y OR se resumen en la figura 2.4.3, donde P y Q representan las señales de entrada y R representa la señal de salida. Debe quedar claro en la figura 2.4.3 que las acciones de las puertas NOT, AND y OR en las señales corresponden exactamente con las de los conectores lógicos $\sim$, $\wedge$ y $\vee$ de los enunciados, si el símbolo 1 se identifica con V y el símbolo 0 se identifica con F.

Las puertas se pueden combinar en los circuitos de muchas maneras. Si se obedecen las reglas que se muestran en la página siguiente, el resultado es un **circuito combinacional**, uno cuya salida en cualquier momento se determina completamente por su entrada en ese momento sin considerar a las entradas anteriores.

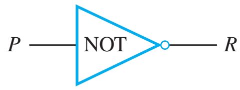
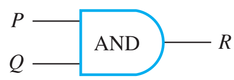
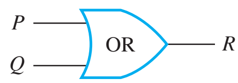
<table>
<tr><th>Tipo de puerta</th><th>Representación simbólica</th><th>Acción</th></tr>
<tr><td>NOT</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th>Entrada</th><th>Salida</th></tr>
<tr><th>P</th><th>R</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>AND</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">Entrada</th><th>Salida</th></tr>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>R</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>OR</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">Entrada</th><th>Salida</th></tr>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>R</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Figura 2.4.3

Reglas para un circuito combinacional

Nunca combine dos cables de entrada. 2.4.1

Un único cable de entrada se puede separar en dos y utilizarlo como entrada para dos puertas separadas. 2.4.2

Un cable de salida se puede utilizar como entrada. 2.4.3

La no salida de una puerta puede eventualmente alimentar de nuevo esa puerta. 2.4.4

La regla (2.4.4) se viola en circuitos más complejos, llamados **circuitos secuenciales**, cuya salida en un momento dado depende tanto de la entrada en ese momento como también de las entradas anteriores. Estos circuitos se analizan en la sección 12.2.

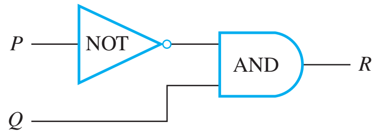
La tabla de entrada/salida para un circuito

Si le dan un conjunto de señales de entrada para un circuito, puede encontrar su salida siguiendo el circuito puerta por puerta.

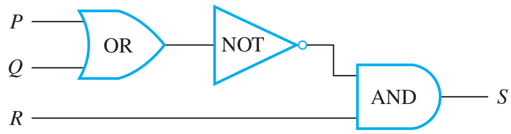
Ejemplo 2.4.1 Determinación de salida para una entrada dada

Indique la salida de los circuitos que se muestra a continuación para las señales de entrada dadas.

a. Señales de entrada: $P = 0$ y $Q = 1$

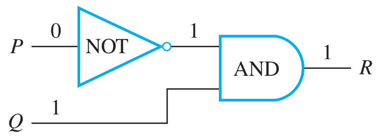


b. Señales de entrada: $P = 1$, $Q = 0$ y $R = 1$

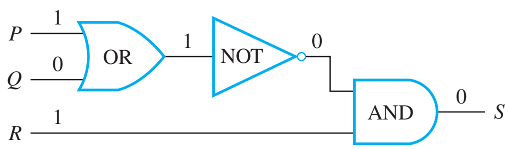


Solución

a. Muévase de izquierda a derecha a través del diagrama, siga la acción de cada puerta en las señales de entrada. La puerta NOT cambia de $P = 0$ a 1, por lo que ambas entradas a la puerta AND son 1, por lo que la salida de R es 1. Esto se muestra indicado en el diagrama, como se muestra a continuación.



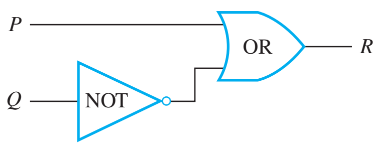
b. La salida de la puerta OR es 1 ya que una de las señales de entrada, P, es 1. La puerta NOT cambia este 1 en un 0, por lo que las dos entradas a la puerta AND son 0 y R = 1. Por tanto la salida de S es 0. A continuación se muestra el seguimiento.

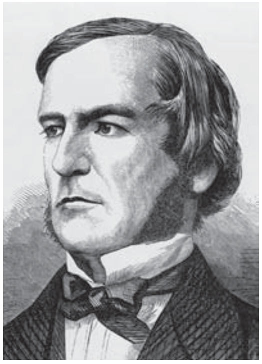


Para construir la tabla completa de entrada/salida de un circuito, siga el circuito para encontrar las señales de salida correspondientes a cada posible combinación de señales de entrada.

Ejemplo 2.4.2 Construcción de tabla de entrada/salida para un circuito

Construya la tabla de entrada/salida del siguiente circuito.





CORBIS

George Boole (1815-1864)

Nota Estrictamente hablando sólo expresiones significativas tales como $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ y $\sim(\sim(p \wedge q) \vee r)$ se permiten como booleanas, no sin sentido como $p \sim q\ ((rs \vee \wedge q \sim$. Usamos la recursión para dar una cuidadosa definición de las expresiones booleanas de la sección 5.9.

Solución Enliste las cuatro combinaciones posibles de las señales de entrada y encuentre la salida para cada una siguiendo el circuito.

Entrada		Salida
P	***Q***	***R***
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

■

La expresión booleana correspondiente a un circuito

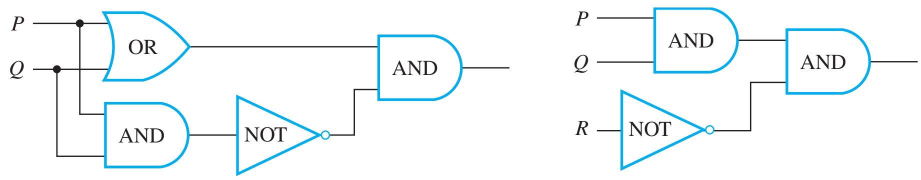
En lógica, variables tales como p, q y r representan enunciados y un enunciado puede tener uno de los dos valores de verdad: V (verdadero) o F (falso). Una forma de enunciado es una expresión, tal como $p \wedge (\sim q \vee r)$, compuesto por variables de enunciado y conectores lógicos.

Como se indicó anteriormente, uno de los fundadores de la lógica simbólica fue el matemático inglés George Boole. En su honor, cualquier variable, tal como un enunciado variable o una señal de entrada, que puede tomar uno de los dos valores, se llama una **variable booleana**. Una expresión compuesta de variables booleanas y conectores $\sim$, $\wedge$ y $\vee$ se denomina una **expresión booleana**.

Dado un circuito que consiste de la combinación de las puertas NOT, AND y OR, se puede obtener una expresión booleana correspondiente siguiendo las acciones de las puertas de las variables de entrada.

Ejemplo 2.4.3 Determinación de una expresión booleana para un circuito

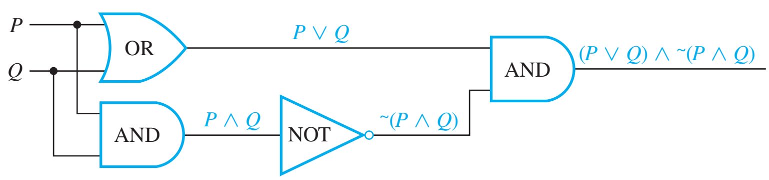
Encuentre las expresiones booleanas que corresponden a los circuitos que se muestran a continuación. Un punto indica una soldadura de dos alambres, cables que se cruzan sin un punto se supone que no se tocan.



(a) (b)

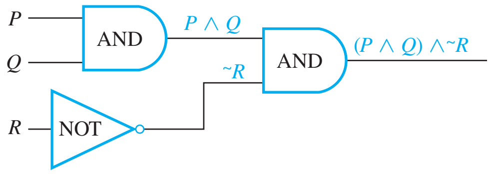
Solución

a. Dé seguimiento a través del circuito de izquierda a derecha, indicando la salida de cada puerta simbólicamente, como se muestra a continuación.



La expresión final obtenida $(P \vee Q) \wedge \sim(P \wedge Q)$, es la expresión para o exclusivo: P o Q, pero no ambos.

b. La expresión booleana correspondiente al circuito es $(P \wedge Q) \wedge \sim R$, como se muestra a continuación.



Observe que la salida del circuito que se muestra en el ejemplo 2.4.3*b*) es 1 exactamente para una combinación de las entradas ($P = 1$, $Q = 1$ y $R = 0$) y es 0 para todas las entradas de otras combinaciones. Por esta razón, el circuito se puede decir que "reconoce" una combinación particular de entradas. La columna de salida de la tabla de entrada/salida tiene un 1 en exactamente un renglón y 0 en todos los otros renglones.

• Definición

Un **reconocedor** es un circuito que genera un 1 para exactamente una combinación particular de señales de entrada y salidas 0 para las demás combinaciones.

Tabla de entrada/salida para un reconocedor

P	Q	R	$(P \wedge Q) \wedge \sim R$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

El circuito correspondiente a una expresión booleana

Los ejemplos anteriores muestran cómo encontrar una expresión booleana correspondiente a un circuito. El siguiente ejemplo muestra cómo construir un circuito correspondiente a una expresión booleana.

Ejemplo 2.4.4 Construcción de circuitos de las expresiones booleanas

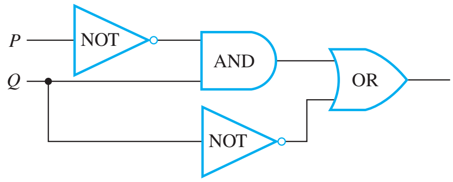
Construya circuitos para las siguientes expresiones booleanas.

a. $(\sim P \wedge Q) \vee \sim Q$ b. $((P \wedge Q) \wedge (R \wedge S)) \wedge T$

Solución

a. Escriba las variables de entrada en una columna en el lado izquierdo del diagrama. Después en el lado derecho del diagrama a la izquierda, trabaje de la parte más externa hacia la más interna. Ya que la última operación ejecutada cuando se evaluó $(\sim P \wedge Q) \vee \sim Q$ es $\vee$, ponga una puerta OR en el extremo derecho del diagrama. Una entrada de esta puerta es $\sim P \wedge Q$, por lo que dibuje una puerta AND a la izquierda de la puerta

OR y muestre su salida entrando en la puerta OR. Puesto que una entrada a la puerta AND es $\sim P$, dibuje la línea de P a una puerta NOT y de ahí a la puerta AND. Ya que la otra entrada a la puerta AND es Q, dibuje una línea de Q directamente a la puerta AND. La otra entrada a la puerta OR es $\sim Q$, por lo que dibuje una línea de Q a la puerta NOT y de la puerta NOT a la puerta OR. Se obtiene el circuito que se muestra a continuación.



b. Para iniciar la construcción de este circuito, ponga una puerta AND en el extremo derecho para la $\wedge$ entre $((P \wedge Q) \wedge (R \wedge S))$ y T. A la izquierda de donde puso la puerta AND corresponde al $\wedge$ entre $P \wedge Q$ y $R \wedge S$. A la izquierda de donde puso la puerta AND corresponde a los $\wedge$ entre P y Q y entre R y S. En la figura 2.4.4 se muestra el circuito.

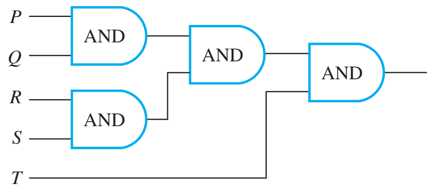


Figura 2.4.4 ■

Esto se deduce del teorema 2.1.1 que todas las formas de agregar paréntesis para $P \wedge Q \wedge R \wedge S \wedge T$ son lógicamente equivalentes. Así, por ejemplo,

$$((P \wedge Q) \wedge (R \wedge S)) \wedge T \equiv (P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (S \wedge T)$$

También se deduce del circuito de la figura 2.4.5, que corresponde a $(P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (S \wedge T)$, que tiene la misma tabla de entrada/salida que el circuito de la figura 2.4.4, que corresponde a $((P \wedge Q) \wedge (R \wedge S)) \wedge T$.

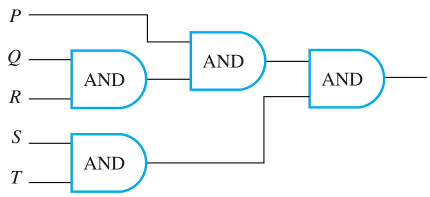


Figura 2.4.5

Cada uno de los circuitos en las figuras 2.4.4 y 2.4.5 es, por tanto, una implementación de la expresión $P \wedge Q \wedge R \wedge S \wedge T$. Este circuito recibe el nombre de **puerta AND de entrada múltiple** y se representa por el diagrama que se muestra en la figura 2.4.6. Las **puertas OR de entrada múltiple** se construyen de manera similar.

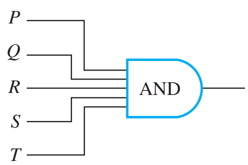


Figura 2.4.6

Determinación de un circuito que corresponde a una tabla dada de entrada/salida

Hasta el momento, hemos analizado la forma de construir la tabla de entrada/salida de un circuito, cómo encontrar la expresión booleana correspondiente para un circuito dado y cómo construir el circuito que corresponde a una expresión booleana dada. Ahora trataremos el tema de cómo diseñar un circuito (o encontrar una expresión booleana) que corresponda a una tabla dada de entrada/salida. La forma de hacerlo es poner varios reconocedores juntos en paralelo.

Ejemplo 2.4.5 Diseño de un circuito para una tabla dada de entrada/salida

Diseñe un circuito para la siguiente tabla de entrada/salida:

Entrada			Salida
P	***Q***	***R***	***S***
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Solución Primero construya una expresión booleana con esta tabla como su tabla de verdad. Para hacer esto identifique cada renglón para el que la salida es 1 —en este caso el primero, tercero y cuarto renglones. Para cada uno de estos renglones construya una expresión y que produzca un 1 (o verdadero) para la combinación exacta de valores de entrada para ese renglón y un 0 (o falso) para todas las otras combinaciones de los valores de entrada. Por ejemplo, la expresión para el primer renglón es $P \wedge Q \wedge R$ porque $P \wedge Q \wedge R$ es 1 si $P = 1$ y $Q = 1$ y $R = 1$ y es 0 para todos los demás valores de P, Q y R. La expresión del tercer renglón es $P \wedge \sim Q \wedge R$ ya que $P \wedge \sim Q \wedge R$ es 1 si $P = 1$ y $Q = 0$ y $R = 1$ y es 0 para todos los demás valores de P, Q y R. Del mismo modo la expresión del cuarto renglón es $P \wedge {\sim}Q \wedge {\sim}R$.

Ahora, cualquier expresión booleana con la tabla dada como su tabla de verdad tiene el valor 1 en el caso $P \wedge Q \wedge R = 1$, o en caso de $P \wedge {\sim}Q \wedge R = 1$, o en caso $P \wedge {\sim}Q \wedge {\sim}R = 1$ y en ningún otro caso. De lo que se deduce que una expresión booleana con la tabla de verdad dada es

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge {\sim}Q \wedge R) \vee (P \wedge {\sim}Q \wedge {\sim}R). \qquad 2.4.5$$

El circuito correspondiente a esta expresión tiene el diagrama que se muestra en la figura 2.4.7. Observe que la expresión (2.4.5) es una disyunción de términos en los que ellos mismos son conjunciones en los que una de P o ${\sim}P$, una de Q o ${\sim}Q$ y una de R o ${\sim}R$ todas aparecen. Se dice que tales expresiones están en **forma normal disyuntiva** o en **forma de suma de productos**.

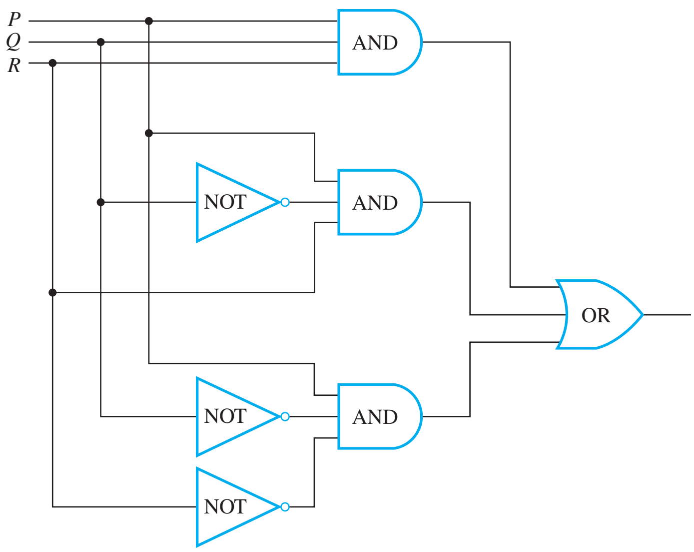


Figura 2.4.7

Simplificación de circuitos combinacionales

Considere los dos circuitos combinacionales que se muestran en la figura 2.4.8.

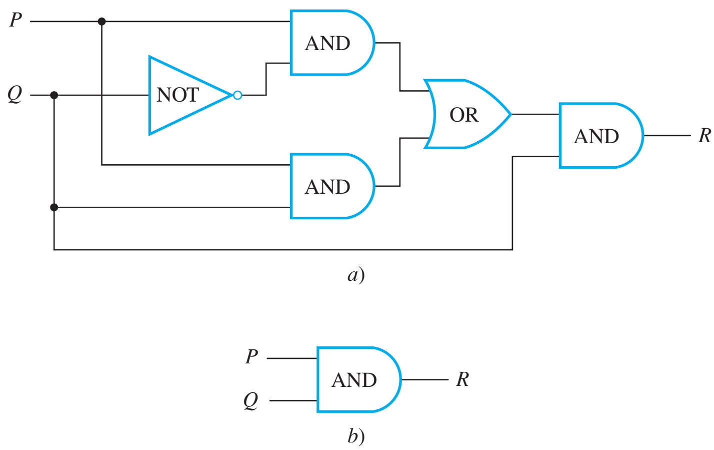


Figura 2.4.8

Si sigue al circuito *a*), encontrará que su tabla de entrada/salida es

Entrada		Salida
P	***Q***	***R***
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

que es igual que la tabla de entrada/salida para el circuito *b*). Así, estos dos circuitos hacen el mismo trabajo en el sentido de que se transforman las mismas combinaciones de señales de entrada en las mismas señales de salida. Sin embargo, el circuito *b*) es más simple que el circuito *a*), ya que contiene muchas menos puertas lógicas. Por tanto, como parte de un circuito integrado, ocupan menos espacio y requieren de menos energía.

• Definición

Dos circuitos lógicos digitales son **equivalentes** si y sólo si, sus tablas de entrada/salida son idénticas.

Puesto que las formas de enunciado lógicamente equivalentes tienen tablas de verdad idénticas, se puede determinar que dos circuitos son equivalentes encontrando las expresiones booleanas correspondiente a los circuitos y demostrando que estas expresiones, consideradas como formas de enunciado, son lógicamente equivalentes. El ejemplo 2.4.6 muestra cómo funciona este procedimiento para los circuitos *a*) y *b*) en la figura 2.4.8.

Ejemplo 2.4.6 Demuestre que dos circuitos son equivalentes

Encuentre las expresiones booleanas para cada circuito de la figura 2.4.8. Utilice el teorema 2.1.1 para demostrar que estas expresiones son lógicamente equivalentes cuando se le considera como formas de enunciado.

Solución Las expresiones booleanas que corresponden a los circuitos *a*) y *b*) son $((P \wedge {\sim}Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge Q$ y $P \wedge Q$, respectivamente. Por el teorema 2.1.1,

$$
\begin{aligned}
&((P \wedge {\sim}Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge Q \\
&\quad \equiv (P \wedge ({\sim}Q \vee Q)) \wedge Q && \text{por la ley distributiva} \\
&\quad \equiv (P \wedge (Q \vee {\sim}Q)) \wedge Q && \text{por la ley conmutativa para } \vee \\
&\quad \equiv (P \wedge \mathbf{t}) \wedge Q && \text{por la ley de negación} \\
&\quad \equiv P \wedge Q && \text{por la ley de identidad.}
\end{aligned}
$$

De lo que se deduce que las tablas de verdad para $((P \wedge {\sim}Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge Q$ y $P \wedge Q$ son iguales: Por lo que las tablas de entrada y salida de los circuitos correspondientes a estas expresiones son iguales y así los circuitos son equivalentes. ■

En general, se puede simplificar un circuito combinacional determinando la correspondiente expresión booleana, utilizando las propiedades que se listan en el teorema 2.1.1 para encontrar una expresión booleana que es más corta y lógicamente equivalente a la misma (cuando ambos son considerados como formas de enunciado) y la construcción del circuito correspondiente a esta corta expresión booleana.

Puertas NAND y NOR

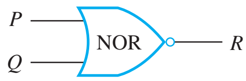

Harvard University Archives

H. M. Sheffer (1882-1964)

Otra forma de simplificar un circuito consiste en encontrar un circuito equivalente que utilice el menor número de diferentes tipos de puertas lógicas. Dos puertas que no se presentaron antes pero que son particularmente útiles para esto son: las puertas NAND y NOR. Una puerta NAND es una sola puerta que actúa como una puerta AND seguida de una puerta NOT. Una puerta NOR actúa como una puerta OR seguida de una puerta NOT. Así, la señal de salida de la puerta NAND es 0 cuando y sólo cuando, ambas señales de entrada son 1 y la señal de salida para una puerta NOR es 1 cuando y sólo cuando, ambas señales son 0. Los correspondientes símbolos lógicas de estas puertas son | (para NAND) y ↓ (para NOR) donde | se llama **trazo de Sheffer** (en honor de H. M. Sheffer, 1882-1964) y ↓ se llama una **flecha de Peirce** (en honor de C. S. Peirce, 1839-1914; consulte la página 101). Así

$$P \mid Q \equiv {\sim}(P \wedge Q) \quad \text{y} \quad P \downarrow Q \equiv {\sim}(P \vee Q).$$

La tabla que se presenta a continuación resume las acciones de las puertas NAND y NOR.

<table>
<tr><th>Tipo de puerta</th><th>Representación simbólica</th><th>Acción</th></tr>
<tr><td>NAND</td><td></td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">Entrada</th><th>Salida</th></tr>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>R = P | Q</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>NOR</td><td></td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">Entrada</th><th>Salida</th></tr>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>R = P ↓ Q</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Se puede demostrar que cualquier expresión booleana es equivalente a escribir completamente con trazos de Sheffer o con flechas de Peirce. Por tanto, cualquier circuito lógico digital es equivalente a utilizar sólo las puertas NAND o sólo puertas NOR. El ejemplo 2.4.7 desarrolla parte de la deducción de este resultado, el resto se deja para los ejercicios.

Ejemplo 2.4.7 Reescritura de expresiones usando el trazo de Sheffer

Utilice el teorema 2.1.1 y la definición del trazo de Sheffer para mostrar que

a. $\sim P \equiv P \mid P$ y b. $P \vee Q \equiv (P \mid P) \mid (Q \mid Q)$.

Solución

a $\sim P \equiv \sim(P \wedge P)$ por la ley idempotencia para $\wedge$

$\equiv P \mid P$ por definición, de $|$.

b. $P \vee Q \equiv \sim(\sim(P \vee Q))$ por la ley de doble negación

$\equiv \sim(\sim P \wedge \sim Q)$ por las leyes de De Morgan

$\equiv \sim((P \mid P) \wedge (Q \mid Q))$ por el inciso *a*)

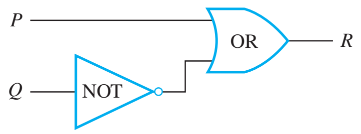
$\equiv (P \mid P) \mid (Q \mid Q)$ por la definición de $|$. ■

Autoexamen

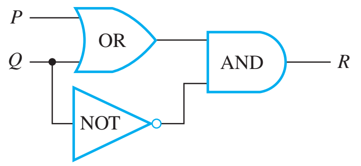
1. La tabla de entrada/salida para un circuito lógico digital es una tabla que muestra ____.
2. La expresión booleana que corresponde a un circuito lógico digital es ____.
3. Un reconocedor es un circuito de lógico digital que ____.
4. Dos circuitos lógicos digitales son equivalentes si y sólo si, ____.
5. Una puerta NAND se construye mediante la colocación de una puerta ____ inmediatamente después de una puerta ____.
6. Una puerta NOR se construye colocando de una puerta ____ inmediatamente después de una puerta ____.

Conjunto de ejercicios 2.4

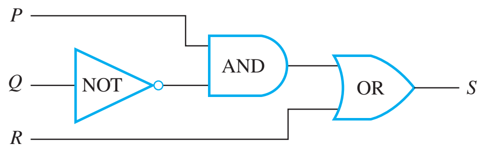
Dé las señales de salida de los circuitos de los ejercicios 1 al 4 como están indicados.

1. 

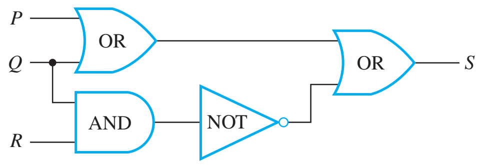
señales de entrada: $P = 1$ y $Q = 1$

2. 

señales de entrada: $P = 1$ y $Q = 0$

3. 

señales de entrada: $P = 1$, $Q = 0$, $R = 0$

4. 

señales de entrada: $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$

En los ejercicios 5 al 8 escriba la tabla de entrada/salida para el circuito en el ejercicio al que se hace referencia.

5. Ejercicio 1
6. Ejercicio 2
7. Ejercicio 3
8. Ejercicio 4

En los ejercicios 9 al 12 determine la expresión booleana que corresponde al circuito en el ejercicio al que se hace referencia.

9. Ejercicio 1
10. Ejercicio 2
11. Ejercicio 3
12. Ejercicio 4

Construya circuitos para las expresiones booleanas de los ejercicios 13 al 17.

13. $\sim P \vee Q$
14. $\sim(P \vee Q)$
15. $P \vee (\sim P \wedge \sim Q)$
16. $(P \wedge Q) \vee \sim R$
17. $(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge R)$

Para cada una de las tablas de los ejercicios 18 al 21, construya *a*) una expresión booleana que tenga la tabla dada como su tabla de verdad y *b*) un circuito que tenga la tabla dada como su tabla de entrada/salida.

18.

P	***Q***	***R***	***S***
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

19.

P	***Q***	***R***	***S***
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

20.

P	***Q***	***R***	***S***
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

21.

P	***Q***	***R***	***S***
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

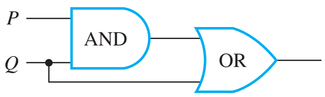
22. Diseñe un circuito para tener señales de entrada P, Q y R y salida 1 si y sólo si, P y Q tienen el mismo valor y Q y R tienen valores opuestos.

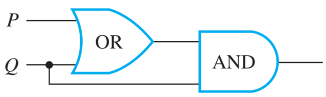
23. Diseñe un circuito para tener señales de entrada P, Q y R y salida 1 si y sólo si, todos las tres P, Q y R tienen el mismo valor.

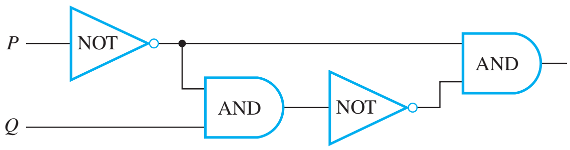
24. Las luces de un salón de clases están controladas por dos interruptores: uno en la parte trasera y el otro en la parte del frente del salón. Mover cualquiera de los interruptores a la posición opuesta apagará las luces si se encuentran encendidas y las encenderá si están apagadas. Suponga que las luces se han instalado de modo que cuando ambos interruptores están en la posición hacia abajo, las luces están apagadas. Diseñe un circuito para controlar los interruptores.

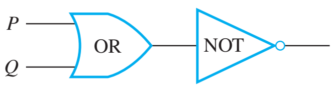
25. Un sistema de alarma tiene tres paneles de control diferentes en tres lugares diferentes. Para habilitar el sistema, los interruptores en al menos dos de los paneles deben estar en la posición de encendido. Si menos de dos están en la posición de encendido, el sistema está desactivado. Diseñe un circuito para controlar los interruptores.

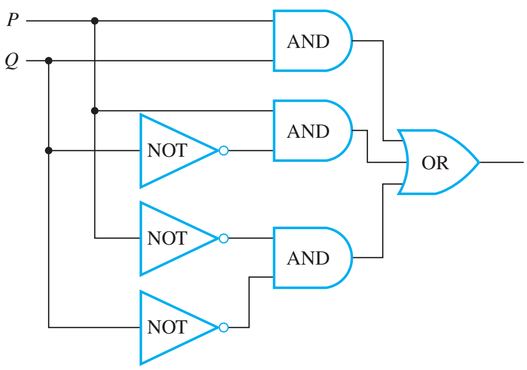
Utilice las propiedades que se presentan en el teorema 2.1.1 para demostrar que cada par de circuitos en los ejercicios 26 a 29 tienen la misma tabla de entrada/salida. (Encuentre las expresiones booleanas para los circuitos y demuestre que son lógicamente equivalentes cuando se les considera como formas de enunciado.)

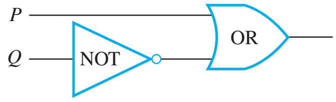
26. a.


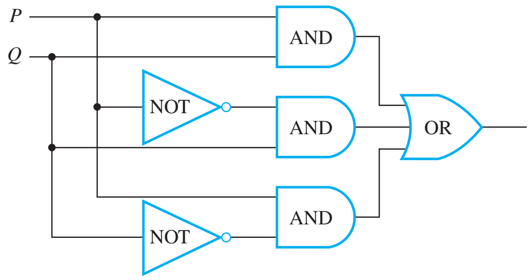
b.


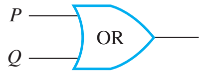
27. a.


b.


28. a.


b.


29. a.


b.


Para los circuitos correspondientes a las expresiones booleanas en cada uno de los ejercicios 30 y 31 hay un circuito equivalente con a lo más dos puertas lógicas. Encuentre dicho circuito.

30. $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

31. $(\sim P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$

32. La expresión booleana para el circuito en el ejemplo 2.4.5 es

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R)$$

(una forma normal disyuntiva). Determine un circuito con un máximo de tres puertas lógicas que es equivalente a este circuito.

33. a. Demuestre que para el trazo de Sheffer |,

$$P \wedge Q \equiv (P \mid Q) \mid (P \mid Q).$$

b. Utilice los resultados del ejemplo 2.4.7 y el inciso *a*) para escribir $P \wedge (\sim Q \vee R)$ utilizando sólo trazos Sheffer.

34. Demuestre que las equivalencias lógicas siguientes mantienen la flecha de Peirce ↓, donde $P \downarrow Q \equiv \sim(P \vee Q)$.

a. $\sim P \equiv P \downarrow P$
b. $P \vee Q \equiv (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$
c. $P \wedge Q \equiv (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$
H **d.** Escriba $P \rightarrow Q$ usando sólo flechas de Peirce.
e. Escriba $P \leftrightarrow Q$, usando sólo flechas de Peirce.

Respuestas del autoexamen

1. La señal(es) de salida que corresponden a todas las combinaciones posibles de las señales de entrada al circuito 2. una expresión booleana que representa las señales de entrada como variables e indica las acciones sucesivas de las puertas lógicas en las señales de entrada 3. tiene salidas a 1 para exactamente una combinación particular de señales de entrada y salidas 0 para todas las otras combinaciones 4. tienen la misma tabla de entrada/salida 5. NOT; AND 6. NOT; OR

2.5 Aplicación: sistemas numéricos y circuitos para suma

Contar en binario es igual que contar en decimal, si tienen todos pulgares. —Glaser y Way

En la escuela primaria, aprendió el significado de la notación decimal: para interpretar una cadena de dígitos decimales como un número, mentalmente multiplique cada dígito por su valor de posición. Por ejemplo, 5049 tiene un 5 en el lugar de los millares, un 0 en el lugar de las centenas, un 4 en el lugar de las decenas y un 9 en el lugar de las unidades. Por tanto

$$5\,049 = 5 \cdot (1\,000) + 0 \cdot (100) + 4 \cdot (10) + 9 \cdot (1).$$

Usando la notación exponencial, está ecuación se puede escribir como

$$5\,049 = 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

De manera más general, la notación decimal se basa en el hecho de que cualquier número entero positivo puede ser escrito de manera única como una suma de productos de la forma

$$d \cdot 10^n,$$

donde cada n es un entero no negativo y cada d es uno de los dígitos decimales de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, o 9. La palabra *decimal* proviene de la raíz latina *deci*, que significa “diez”. La notación decimal (o de base 10) expresa un número como una cadena de dígitos en la que cada dígito indica la posición de la potencia de 10 por la que se multiplica. La posición que está más a la derecha es el lugar de las unidades (o el lugar de 10^0), a la izquierda está el lugar de las decenas (o el lugar 10^1), a la izquierda está el lugar de las centenas (o el lugar 10^2) y así sucesivamente, como se muestra a continuación.

Lugar	10^3 miles	10^2 centenas	10^1 decenas	10^0 unidades
Dígito decimal	5	0	4	9

Representación binaria de números

No hay nada sagrado acerca del número 10, usamos el 10 como base de nuestro sistema de numeración habitual ya que sucede que tenemos diez dedos. De hecho, cualquier número entero mayor de 1 puede servir como base para un sistema de numeración. En ciencia computacional, la **notación de base 2**, o la **notación binaria** es de especial importancia ya que las señales utilizadas en electrónica moderna están siempre en uno de los dos estados. (La raíz latina *bi* significa “dos”.)

En la sección 5.4, se demuestra que cualquier número entero se puede representar como una suma única de productos de la forma

$$d \cdot 2^n,$$

donde cada n es un entero y cada d es uno de los dígitos binarios (o bits) 0 o 1. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 27 &= 16 + 8 + 2 + 1 \\ &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

En notación binaria, como en notación decimal, se escriben sólo los dígitos binarios y no las potencias de la base. En notación binaria, entonces,

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$27_{10} \quad = \quad 11011_2$$

donde los subíndices indican la base, ya sea 10 o 2, en el que está escrito el número. Los lugares en notación binaria corresponden con las distintas potencias de 2. La posición más a la derecha es el lugar de los unos (o lugar 2^0), a la izquierda está el lugar de los dos (o lugar 2^1), a la izquierda está el lugar de los cuatro (o lugar 2^2) y así sucesivamente, como se muestra a continuación.

Lugar	2^4 dieciseises	2^3 ochos	2^2 cuatros	2^1 dos	2^0 unos
Dígito binario	1	1	0	1	1

Al igual que en la notación decimal, se puede agregar o quitar ceros a la izquierda al gusto. Por ejemplo,

$$003_{10} = 3_{10} = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11_2 = 011_2.$$

Ejemplo 2.5.1 Notación binaria de números enteros del 1 al 9

Deduzca la notación binaria de los enteros de 1 a 9.

Solución

$$\begin{aligned}
1_{10} &= & 1 \cdot 2^0 &= 1_2 \\
2_{10} &= & 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 &= 10_2 \\
3_{10} &= & 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 &= 11_2 \\
4_{10} &= & 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 &= 100_2 \\
5_{10} &= & 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 &= 101_2 \\
6_{10} &= & 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 &= 110_2 \\
7_{10} &= & 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 &= 111_2 \\
8_{10} &= & 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 &= 1000_2 \\
9_{10} &= & 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 &= 1001_2
\end{aligned}$$

■

Una lista de potencias de 2 es útil para hacer conversiones de binario a decimal y de decimal a binario. Vea la tabla 2.5.1.

Tabla 2.5.1 Potencias de 2

Potencias de 2	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Forma decimal	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

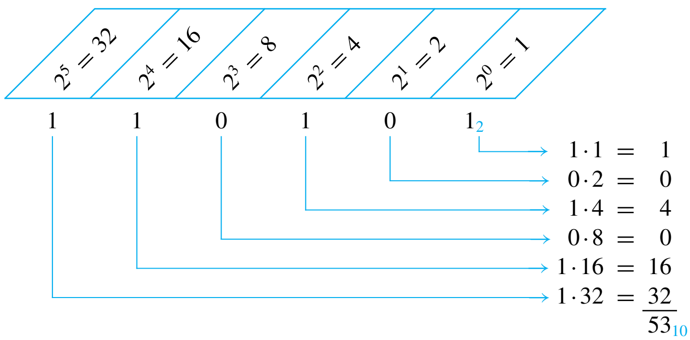
Ejemplo 2.5.2 Conversión de un binario a un número decimal

Represente 110101_2 en notación decimal.

Solución

$$\begin{aligned} 110101_2 &= 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\ &= 32 + 16 + 4 + 1 \\ &= 53_{10} \end{aligned}$$

Por otra parte, se puede utilizar el esquema que se muestra a continuación.



■

Ejemplo 2.5.3 Conversión de un decimal a un número binario

Represente 209 en notación binaria.

Solución Use la tabla 2.5.1 para escribir 209 como suma de potencias de 2, iniciando con la mayor potencia de 2 que es menor que 209 y continúe reduciendo a potencias menores.

Puesto que 209 está entre 128 y 256, la mayor potencia de 2 que es menor de 209 es 128. Por lo que

$$209_{10} = 128 + \text{un número menor.}$$

Ahora $209 - 128 = 81$ y 81 está entre 64 y 128, por lo que la mayor potencia de 2 que es menor que 81 es 64. Por tanto

$$209_{10} = 128 + 64 + \text{un número menor.}$$

Continuando de esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned} 209_{10} &= 128 + 64 + 16 + 1 \\ &= 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0. \end{aligned}$$

Para cada potencia de 2 que se presenta en la suma, hay un 1 en la posición correspondiente del número binario. Para cada potencia de 2 que falta de la suma, hay un 0 en la posición correspondiente del número binario. Por tanto

$$209_{10} = 11010001_2$$ ■

En la sección 5.1 se analiza otro procedimiento para convertir de decimal a notación binaria.

Suma y resta binaria

Los métodos de cálculo de aritmética binaria son análogos a los de aritmética decimal. En aritmética binaria el número 2 ($= 10_2$ en notación binaria) desempeña un papel similar al del número 10 en aritmética decimal.

¡Precaución! No se lee 10_2 como “diez”; este es el número dos. Lea 10_2 como “uno cero base dos”.

Ejemplo 2.5.4 Suma en notación binaria

Sume 1101_2 y 111_2 usando notación binaria.

Solución Ya que $2_{10} = 10_2$ y $1_{10} = 1_2$, la traducción de $1_{10} + 1_{10} = 2_{10}$ en notación binaria es

$$\begin{array}{r} 1_2 \\ +\ 1_2 \\ \hline 10_2 \end{array}$$

De lo que se deduce que la suma de dos 1 juntos, da como resultado llevar un 1 cuando se usa la notación binaria. Sumar tres 1 juntos, también da como resultado en llevar un 1 ya que $3_{10} = 11_2$ ("uno uno base dos").

$$\begin{array}{r} 1_2 \\ +\ 1_2 \\ +\ 1_2 \\ \hline 11_2 \end{array}$$

Así, la suma se puede realizar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrrrrrl} & & 1 & 1 & 1 & & \leftarrow \text{renglón de lo que se lleva} \\ & & 1 & 1 & 0 & 1_2 & \\ + & & & 1 & 1 & 1_2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 0_2 & \end{array}$$

■

Ejemplo 2.5.5 Resta en notación binaria

Reste 1011_2 de 11000_2 usando notación binaria.

Solución En la resta decimal el hecho de que $10_{10} - 1_{10} = 9_{10}$ se usa para prestar a través de varias columnas. Por ejemplo, considere lo siguiente:

$$\begin{array}{rrrrrl} & & 9 & 9 & & \\ & & \cancel{1} & 1 & & \leftarrow \text{renglón de préstamos} \\ & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0_{10} & \\ - & & & 5 & 8_{10} & \\ \hline & & 9 & 4 & 2_{10} & \end{array}$$

En la resta binaria, también puede ser necesario pedir prestado a través de más de una columna. Pero cuando usted pide prestado un 1_2 de 10_2, lo que queda es 1_2.

$$\begin{array}{r} 10_2 \\ -\ 1_2 \\ \hline 1_2 \end{array}$$

Así, la resta se puede realizar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrrrrrl} & & 0 & 1 & 1 & & \\ & & \cancel{1} & \cancel{1} & 1 & & \leftarrow \text{renglón de préstamos} \\ & 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0_2 & \\ - & & 1 & 0 & 1 & 1_2 & \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & 1_2 & \end{array}$$

■

Circuitos para el cálculo de sumas

Considere el tema de diseñar un circuito para generar la suma de dos dígitos binarios P y Q. Tanto P como Q puede ser ya sea 0 o 1. Y se conocen los siguientes hechos:

$$\begin{aligned} 1_2 + 1_2 \qquad\quad &= 10_2, \\ 1_2 + 0_2 = 1_2 &= 01_2, \\ 0_2 + 1_2 = 1_2 &= 01_2, \\ 0_2 + 0_2 = 0_2 &= 00_2. \end{aligned}$$

De lo que se deduce que el circuito a diseñar debe tener dos salidas —una para el dígito binario de la izquierda (este se llama **lo que se lleva**) y uno para el dígito binario de la derecha (este se llama **la suma**). La salida de lo que se lleva es 1 si P y Q son 1; es 0 de otra manera. Así, lo que se lleva se puede producir usando el circuito de puerta AND que corresponde a la expresión booleana $P \wedge Q$. La salida de la suma es 1 si ya sea P o Q, pero no ambas, es 1. La suma puede, por tanto, producirse usando un circuito que corresponde a la expresión booleana para *o exclusivo*: $(P \vee Q) \wedge \sim(P \wedge Q)$. (Vea el ejemplo 2.4.3*a*).) Por tanto, un circuito para sumar dos dígitos binarios P y Q se puede construir como se muestra en la figura 2.5.1. Este circuito se llama **semisumador**.

SEMISUMADOR

Circuito

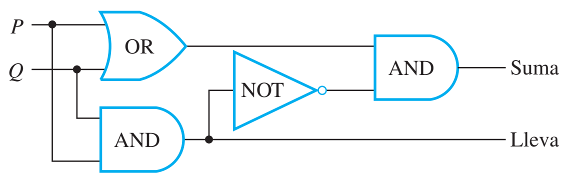


Tabla de entrada/salida

P	*Q*	Lleva	Suma
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Figura 2.5.1 Circuito para sumar $P + Q$, donde P y Q son dígitos binarios

Ahora consideremos el problema de cómo construir un circuito para sumar dos números enteros binarios, cada uno con más de un dígito. Ya que la adición de dos dígitos binarios puede dar como resultado llevar a la siguiente columna a la izquierda, puede ser necesario añadir tres binarios en ciertos puntos. En el ejemplo siguiente, la suma en la columna de la derecha es la suma de dos dígitos binarios, y, debido a lo que se lleva, la suma en la columna de la izquierda es la suma de los tres dígitos binarios.

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \quad \leftarrow \text{renglón de lo que se lleva} \\ & & 1 & 1_2 \\ + & & 1 & 1_2 \\ \hline & 1 & 1 & 0_2 \end{array}$$

Así, con el fin de construir un circuito que sume varios números dígitos binarios, es necesario incorporar un circuito que calcule la suma de tres dígitos binarios. Tal circuito se llama un **sumador completo**. Considere una suma general de tres dígitos binarios P, Q y R que da como resultado en llevar C (o el dígito en el extremo izquierdo) y una suma S (el dígito en el extremo derecho).

$$\begin{array}{rr} & P \\ + & Q \\ + & R \\ \hline & CS \end{array}$$

El funcionamiento del sumador completo se basa en el hecho de que la suma es una operación binaria: Sólo se pueden agregar dos números a la vez. Por tanto P es el primero agregado a Q y después el resultado se suma a R. Por ejemplo, considere la siguiente suma:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}1_2\\ +\ \ 0_2\end{array}\right\}\ 1_2+0_2=01_2\\ +\ \ 1_2\qquad\qquad\qquad\ \end{array}\right\}\ 1_2+1_2=10_2$$
$$\begin{array}{r} \hline 10_2 \end{array}$$

El proceso que se muestra aquí se puede dividir en pasos que utilizan circuitos de semisumador.

Paso 1: Sume P y Q utilizando un semisumador para obtener un número binario de dos dígitos.

$$\begin{array}{r} P \\ +\quad Q \\ \hline C_1S_1 \end{array}$$

Paso 2: Sume R a la suma C_1S_1 de P y Q.

$$\begin{array}{r} C_1S_1 \\ +\quad R \\ \hline \end{array}$$

Para esto, proceda como se muestra a continuación:

Paso 2a: Sume R a S_1 utilizando un semisumador para obtener el número de dos dígitos C_2S.

$$\begin{array}{r} S_1 \\ +\quad R \\ \hline C_2S \end{array}$$

Entonces S es el dígito del extremo derecho de la suma total de P, Q y R.

Paso 2b: Determine el dígito del extremo izquierdo, C, de la suma total de la siguiente manera: En primer lugar observe que es imposible que tanto C_1 como C_2 sean 1. Si $C_1 = 1$, entonces P y Q son 1 y así $S_1 = 0$. En consecuencia, la suma de S_1 y R da un número binario C_2S_1 donde $C_2 = 0$. Después observamos que C será un 1 en el caso de que la suma de P y Q da como resultado llevar un 1 o en el caso de que la suma de S_1 (el dígito del extremo derecho de $P + Q$) y R da como resultado llevar 1. En otras palabras, $C = 1$ si y sólo si, $C_1 = 1$ o $C_2 = 1$. De lo que se deduce que el circuito que se muestra en la figura 2.5.2 calculará la suma de tres dígitos binarios.

SEMISUMADOR

Circuito

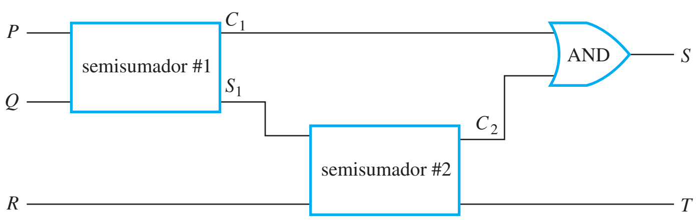


Tabla de entrada/salida

P	Q	R	C	S
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Figura 2.5.2 **Circuito para sumar $P + Q + R$, donde P, Q y R son dígitos binarios**

Dos sumadores completos y un semisumador se pueden utilizar juntos para construir un circuito que va a sumar dos números binarios de tres dígitos *PQR* y *STU* para obtener la suma *W X Y Z*. Esto se muestra en la figura 2.5.3. Tal circuito se llama un **sumador en paralelo**. Los sumadores en paralelo pueden construirse para sumar números binarios de cualquier longitud finita.

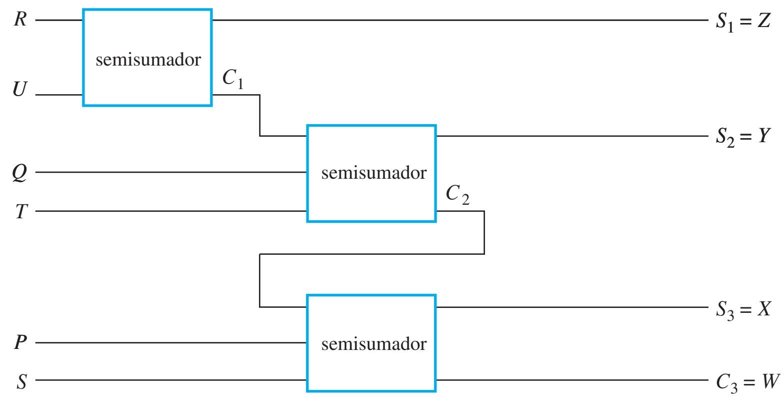


Figura 2.5.3 Un sumador en paralelo para sumar *PQR* y *STU* para obtener *W X Y Z*

Complementos de dos y la representación en computadora de enteros negativos

En general, se utiliza un número fijo de bits para representar números enteros en una computadora y estos son necesarios para representar números enteros negativos y no negativos. A veces un bit particular, normalmente el del extremo izquierdo, se utiliza como un indicador de señal y los bits restantes se toman como el valor absoluto del número en notación binaria. El problema con este enfoque es que los procedimientos para la suma de los números resultantes son un poco complicados y la representación del 0 no es única. Un método más común, usando *complementos de dos* permite sumar enteros con bastante facilidad y da como resultado una representación única del 0. Los complementos de dos de un entero con respecto a una longitud de bits fija se definen como sigue:

• Definición

Dado un número entero positivo a, los **complementos de dos de *a* respecto de una longitud de bits fija** n es la representación binaria de n bits de

$$2^n - a.$$

Longitudes de bits de 16 y 32 son las más comúnmente utilizadas en la práctica. Sin embargo, ya que los principios son los mismos para todas las longitudes de bits, utilizamos una longitud de 8 bits por simplicidad en este análisis. Por ejemplo, ya que

$$(2^8 - 27)_{10} = (256 - 27)_{10} = 229_{10} = (128 + 64 + 32 + 4 + 1)_{10} = 11100101_2,$$

el complemento de dos de 8 bits de 27 es 11100101_2.

Resulta que hay una manera conveniente para calcular complementos de dos que implican menos aritmética que la aplicación directa de la definición. Para una representación de 8 bits se basa en tres hechos:

1. $2^8 - a = [(2^8 - 1) - a] + 1$.
2. La representación binaria de $2^8 - 1$ es 11111111_2.
3. Restar un número binario de 8 bits a de 11111111_2 sólo cambia todos los 0 en a a 1 y todos los 1 a 0. (El número resultante se llama el **complemento de uno** del número dado.)

Por ejemplo, por 2) y 3), con $a = 27$

Los 0 y los 1 están cambiados

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|l}
\cline{2-9}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2^8 - 1 \\
\cline{2-9}
- & & & & & & & & & \\
\cline{2-9}
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 27 \\
\cline{2-9}
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (2^8 - 1) - 27 \\
\cline{2-9}
\end{array} \qquad 2.5.1$$

y así, en notación binaria de la diferencia $(2^8 - 1) - 27$ es 11100100_2. Pero por 1) con $a = 27$, $2^8 - 27 = [(2^8 - 1) - 27] + 1$ y por lo que si sumamos 1 a (2.5.1), se obtiene la representación binaria de 8 bits, de $2^8 - 27$, que es el complemento de dos de 8 bits de 27:

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|l}
\cline{2-9}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (2^8 - 1) - 27 \\
\cline{2-9}
+ & & & & & & & & & \\
\cline{2-9}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\cline{2-9}
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2^8 - 27 \\
\cline{2-9}
\end{array}$$

En general,

Para encontrar el complemento de dos de 8 bits de un entero positivo a es a lo más igual a 255:

- Escriba la representación binaria de 8 bits para a.
- Mueva los bits (es decir, cambie todos los 1 por 0 y todos los 0 por 1).
- Sume 1 en notación binaria.

Ejemplo 2.5.6 Determinación de un complemento de dos

Encuentre el complemento de dos de 8 bits de 19.

Solución Escriba la representación binaria de 8 bits para el 19, cambie todas los 0 por 1 y todos los 1 por 0 y sume 1.

$$19_{10} = (16 + 2 + 1)_{10} = 00010011_2 \xrightarrow{\text{voltee los bits}} 11101100 \xrightarrow{\text{sume 1}} 11101101$$

Para comprobar este resultado, observe que

$$\begin{aligned} 11101101_2 &= (128 + 64 + 32 + 8 + 4 + 1)_{10} = 237_{10} = (256 - 19)_{10} \\ &= (2^8 - 19)_{10}, \end{aligned}$$

que *es* el complemento de 19. ■

Observe que, ya que

$$2^8 - (2^8 - a) = a$$

el *complemento de dos del complemento de dos de un número es el número mismo* y por tanto,

> Para determinar la representación decimal del número entero con un complemento dado de dos de 8 bits:
>
> - Encuentre el complemento de dos del complemento de dos dado.
> - Escriba el equivalente decimal del resultado.

Ejemplo 2.5.7 Determinación de un número con un complemento de dos dado

¿Cuál es la representación decimal del número entero con el complemento de dos 10101001?

Solución

$$10101001_2 \xrightarrow{\text{voltee los bits}} 01010110$$
$$\xrightarrow{\text{sume 1}} 01010111_2 = (64 + 16 + 4 + 2 + 1)_{10} = 87_{10}$$

Para comprobar este resultado, observe que el número dado es

$$10101001_2 = (128 + 32 + 8 + 1)_{10} = 169_{10} = (256 - 87)_{10} = (2^8 - 87)_{10},$$

que es el complemento de dos de 87. ■

Representación 8 bits de un número

Ahora considere el complemento de dos de un entero n que satisface la desigualdad $1 \le n \le 128$. Entonces,

$$-1 \ge -n \ge -128 \qquad \text{ya que la multiplicación por } -1 \text{ invierte la dirección de la desigualdad}$$

y

$$2^8 - 1 \ge 2^8 - n \ge 2^8 - 128 \qquad \text{sumando } 2^8 \text{ en todas las partes de la desigualdad.}$$

Pero $2^8 - 128 = 256 - 128 = 128 = 2^7$. Por tanto

$$2^7 \le \text{complemento de dos de } n < 2^8.$$

De lo que se deduce que el complemento de dos de 8 bits de un número entero de 1 a 128 bits tiene un bit principal de 1. Observe también que la representación ordinaria de 8 bits de un entero de 0 a 127 tiene un bit principal de 0. En consecuencia, se pueden usar ocho bits para representar los números enteros no negativos y negativos, representando cada número entero no negativo hasta 127 usando la notación ordinaria binaria de 8 bits y representando cada número entero negativo entre -1 y -128 como el complemento de dos de su valor absoluto. Es decir, para cualquier entero a de -128 a 127,

> La representación de 8 bits de a
>
> $$= \begin{cases} \text{representación binaria de 8 bits de } a & \text{si } a \ge 0 \\ \text{representación binaria de 8 bits de } 2^8 - |a| & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

En la tabla 2.5.2 se muestran las representaciones.

Tabla 2.5.2

Entero	Representación de 8 bits (ordinaria 8 bits notación binaria si es no negativo o 8 bits complemento de dos del valor absoluto si es negativo)	Forma decimal del complemento de dos para enteros negativos
127	01111111	
126	01111110	
⋮	⋮	
2	00000010	
1	00000001	
0	00000000	
-1	11111111	$2^8 - 1$
-2	11111110	$2^8 - 2$
-3	11111101	$2^8 - 3$
⋮	⋮	⋮
-127	10000001	$2^8 - 127$
-128	10000000	$2^8 - 128$

Suma en computadora con enteros negativos

A continuación se presenta un ejemplo de cómo complemento de dos permiten sumar circuitos para realizar la resta. Suponga que queremos calcular $72 - 54$. Primero observe que esto es lo mismo que $72 + (-54)$ y que las representaciones binarias de 8 bits de 72 y -54 son 01001000 y 11001010, respectivamente. Así si se suma las representaciones binarias de 8 bits para los dos números, se obtiene

$$\begin{array}{rcccccccc} & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ + & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Y si trunca el 1 principal, se obtiene 00010010. Esta es la representación binaria de 8 bits de 18, que ¡es la respuesta correcta!

La descripción que se muestra a continuación explica cómo utilizar este método para sumar cualquiera de dos números enteros entre -128 y 127. Es fácil generalizar para aplicar las representaciones de 16 bits y 32 bits para obtener la suma de enteros entre $-2\,000\,000\,000$ y $2\,000\,000\,000$.

Para sumar dos números enteros en el rango de -128 a 127 cuya suma está también en el rango de -128 a 127:

- Convierta los dos números enteros a sus representaciones de 8 bits (que representan los números enteros negativos usando los complementos de dos de sus valores absolutos).
- Sume los enteros resultantes usando suma binaria ordinaria.
- Trunque cualquier 1 principal (desbordamiento) que se presente en la posición 2^8ava.
- Convierta el resultado de nuevo a la forma decimal (interpretando los números enteros de 8 bits con un 0 principal como no negativo y enteros de 8 bits con 1 principales como negativo).

Para ver por qué este resultado es verdadero, considere cuatro casos: 1) ambos enteros son no negativos 2) un entero es no negativo y el otro entero es negativo y el valor absoluto del entero no negativo es menor que el del negativo, 3) un entero es no negativo y el otro es negativo y el valor absoluto del entero negativo es menor o igual que el del no negativo y 4) ambos enteros son negativos.

Caso 1 (ambos son enteros no negativos): Este caso es fácil porque si dos números enteros de 0 a 127 se escriben en sus representaciones de 8 bits y si su suma también está en el rango de 0 a 127, entonces, la representación de los 8 bits de su suma tiene un 0 principal y es por tanto interpretado correctamente como un entero no negativo. El siguiente ejemplo muestra lo que sucede cuando se suman 38 y 69.

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|l}
\cline{2-9}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 38 \\
\cline{2-9}
+ \\
\cline{2-9}
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 69 \\
\cline{2-9}
\hline
\cline{2-9}
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 107 \\
\cline{2-9}
\end{array}
$$

Los casos 2) y 3), ambos implican la suma de un entero negativo y de un no negativo. Para ser concretos, sea a el entero no negativo y sea $-b$ el entero negativo y supongamos que tanto a como $-b$ están en el rango de -128 a 127. La observación crucial es que la suma de las representaciones de 8 bits de a y $-b$ es equivalente a calcular

$$a + (2^8 - b)$$

ya que la representación de 8 bits de $-b$ es la representación binaria de $2^8 - b$.

Caso 2 (a es negativa y −b es negativo y |a| < |b|): En este caso, observe que $a = |a| < |b| = b$ y

$$a + (2^8 - b) = 2^8 - (b - a),$$

y la representación binaria de este número es la representación de los 8 bits $-(b - a) = a + (-b)$. Debemos tener cuidado en comprobar que $2^8 - (b - a)$ está entre 2^7 y 2^8. Pero esto es porque

$$2^7 = 2^8 - 2^7 \le 2^8 - (b - a) < 2^8 \qquad \text{ya que } 0 < b - a \le b \le 128 = 2^7.$$

Por tanto en caso de que $|a| < |b|$, sumando las representaciones de 8 bits de a y de $-b$ se obtiene la representación de 8 bits de $a + (-b)$.

Ejemplo 2.5.8 Cálculo de $a + (-b)$ donde $0 \le a < b \le 128$

Utilice las representaciones de 8 bits para calcular $39 + (-89)$.

Solución

Paso 1: Cambie a decimal las representaciones de 8 bits utilizando el complemento de dos para representar a -89.

Ya que $39_{10} = (32 + 4 + 2 + 1)_{10} = 100111_2$, la representación de 8 bits de 39 es 00100111. Ahora la representación de 8 bits de -89 es el complemento de dos de 89. Este se obtiene de la siguiente manera:

$$89_{10} = (64 + 16 + 8 + 1)_{10} = 01011001_2 \xrightarrow{\text{voltee los bits}} 10100110 \xrightarrow{\text{sume 1}} 10100111$$

Así la representación de 8 bits de -89 es 10100111.

Paso 2: Sume las representaciones de 8 bits en notación binaria y trunque el uno en la posición 2^8ava si es que existe:

$$\begin{array}{r} \boxed{0\,|\,0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,1\,|\,1} \\ + \quad \\ \boxed{1\,|\,0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,1\,|\,1} \\ \hline \boxed{1\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,0} \end{array}$$

No hay un 1 en la 2^8ava posición para truncarlo. →

Paso 3: Encuentre el equivalente decimal del resultado. Ya que su bit principal es 1, este número es la representación de 8 bits de un entero negativo.

$$11001110 \xrightarrow{\text{voltee los bits}} 00110001 \xrightarrow{\text{sume 1}} 00110010$$
$$\leftrightarrow -(32 + 16 + 2)_{10} = -50_{10}$$

Observe que puesto que $39 - 89 = -50$, este procedimiento da la respuesta correcta. ■

Caso 3 (a es no negativo y −b es negativo y |b| ≤ |a|): En este caso, observamos que $b = |b| \leq |a| = a$ y

$$a + (2^8 - b) = 2^8 + (a - b).$$

También

$$2^8 \leq 2^8 + (a - b) < 2^8 + 2^7 \qquad \text{ya que } 0 \leq a - b \leq a < 128 = 2^7.$$

Así la representación binaria de $a + (2^8 - b) = 2^8 + (a - b)$ tiene un 1 principal en la novena (2^8ava) posición. Este 1 principal conduce con frecuencia a lo que se llama un "desbordamiento", ya que no caben en el formato entero de 8 bits. Ahora, restando 2^8 de $2^8 + (a - b)$ es equivalente a truncar el 1 principal en la posición 2^8ava de la representación binaria del número. Sin embargo,

$$[a + (2^8 - b)] - 2^8 = 2^8 + (a - b) - 2^8 = a - b = a + (-b).$$

Por tanto en caso de que $|a| \geq |b|$, agregando las representaciones de 8 bits de a y $-b$ y truncando el 1 principal (que está seguro de que está presente) se obtiene la representación de 8 bits de $a + (-b)$.

Ejemplo 2.5.9 Cálculo de $a + (-b)$ donde $1 \leq b \leq a \leq 127$

Utilice las representaciones de 8 bits para calcular $39 + (-25)$.

Solución

Paso 1: Cambio de decimal a las representaciones de 8 bits utilizando el complemento de dos para representar a -25.

Como en el ejemplo 2.5.8, la representación de 8 bits de 39 es 00100111. Ahora la representación de 8 bits de -25 es el complemento de dos de 25, que se obtiene de la siguiente manera:

$$25_{10} = (16 + 8 + 1)_{10} = 00011001_2 \xrightarrow{\text{voltee los bits}}$$
$$11100110 \xrightarrow{\text{sume 1}} 11100111$$

Así que la representación de 8 bits de -25 es 11100111.

Paso 2: Sume las representaciones de 8 bits en notación binaria y trunque el 1 en la 2^8ava posición si es que existe:

$$\begin{array}{rr} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0&1&1&1\\ \hline\end{array} \\ + & \\ & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&0&0&1&1&1\\ \hline\end{array} \\ \hline \text{Trunque} \rightarrow \ 1 & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1&1&1&0\\ \hline\end{array} \end{array}$$

Paso 3: Encuentre el equivalente decimal del resultado:

$$00001110_2 = (8 + 4 + 2)_{10} = 14_{10}.$$

Ya que $39 - 25 = 14$, esta es la respuesta correcta. ■

Caso 4 (ambos enteros son negativos): Este caso implica la suma de dos números enteros negativos en el rango de -1 a -128 cuya suma también está en este rango. Para especificar, considere la suma $(-a) + (-b)$ donde a, b y ab están todas en el rango de 1 a 128. En este caso las representaciones de 8 bits de $-a$ y $-b$ son las representaciones de 8 bits, de $2^8 - a$ y $2^8 - b$. Así si las representaciones de 8 bits de $-a$ y $-b$ se suman, el resultado es

$$(2^8 - a) + (2^8 - b) = [2^8 - (a + b)] + 2^8.$$

Recordemos que truncar un 1 principal en la novena (2^8ava) posición de un número binario es al restar 2^8. Así que cuando se trunca el 1 principal de la representación de 8 bits de $(2^8 - a) + (2^8 - b)$, el resultado es $2^8 - (a + b)$, que es la representación de 8 bits de $-(a + b) = (-a) + (-b)$. (En el ejercicio 37 se le pide que muestre que la suma $(2^8 - a) + (2^8 - b)$ *tiene* un 1 principal en la novena (2^8ava) posición.)

Ejemplo 2.5.10 Cálculo de $(-a) + (-b)$ donde $1 \leq a, b \leq 128$ y $1 \leq a + b \leq 128$

Utilice las representaciones de 8 bits para calcular $(-89) + (-25)$.

Solución

Paso 1: Cambio de decimal a las representaciones de 8 bits usando los complementos de dos para representar a -89 y -25.

Las representaciones de 8 bits de -89 y -25 se mostraron en los ejemplos 2.5.8 y 2.5.9 de 10100111 y 11100111, respectivamente.

Paso 2: Sume las representaciones de 8 bits en notación binaria y trunque el 1 en la 2^8ava posición si es que existe:

$$\begin{array}{rr} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&0&0&1&1&1\\ \hline\end{array} \\ + & \\ & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&0&0&1&1&1\\ \hline\end{array} \\ \hline \text{Trunque} \rightarrow \ 1 & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&1&1&1&0\\ \hline\end{array} \end{array}$$

Paso 3: Encuentre el equivalente decimal del resultado. Debido a que su bit principal es 1, este número es la representación de 8 bits de un entero negativo.

$$10001110 \xrightarrow{\text{voltee los bits}} 01110001 \xrightarrow{\text{sume 1}} 01110010_2$$
$$\leftrightarrow -(64 + 32 + 16 + 2)_{10} = -114_{10}$$

Ya que $(-89) + (-25) = -114$, esta es la respuesta correcta. ■

Notación hexadecimal

Ahora debería ser obvio que los números escritos en notación binaria ocupan mucho más espacio que los números escritos en notación decimal. Sin embargo, muchos aspectos del funcionamiento de la computadora pueden ser mejor analizados usando números binarios. La **notación hexadecimal** es mucho más compacta que la notación decimal y es mucho más fácil para convertir de ida y vuelta entre la notación hexadecimal y binaria que entre la notación binaria y la decimal. El palabra *hexadecimal* proviene del griego *hex-* que significa "seis" y la raíz latina *deci-*, que significa "diez". Por tanto hexadecimal se refiere a "dieciséis" y la notación hexadecimal también se llama **notación de base 16**. La notación hexadecimal se basa en el hecho de que cualquier número entero se puede expresar de manera única como una suma de números de la forma

$$d \cdot 16^n,$$

donde cada n es un entero no negativo y cada d es uno de los números enteros de 0 a 15. Con el fin de evitar ambigüedad, cada dígito hexadecimal se debe representar por un solo símbolo. Los enteros del 10 al 15 están representados por los símbolos A, B, C, D, E y F. En la tabla 2.5.3, se muestran los dieciséis dígitos hexadecimales, junto con sus equivalentes decimales y, para futura referencia, sus 4 bits equivalentes binarios.

Tabla 2.5.3

Decimal	Hexadecimal	4-bit binario equivalente
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Ejemplo 2.5.11 Convirtiendo de notación hexadecimal a decimal

Convierta $3CF_{16}$ a la notación decimal.

Solución Aquí se puede utilizar un esquema similar al introducido en el ejemplo 2.5.2.

$$\begin{array}{ccc} 16^2 = 256 & 16^1 = 16 & 16^0 = 1 \\ 3_{16} & C_{16} & F_{16} \\ \| & \| & \| \\ 3_{10} & 12_{10} & 15_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 15 \cdot 1 & = & 15 \\ 12 \cdot 16 & = & 192 \\ 3 \cdot 256 & = & \underline{768} \\ & & 975_{10} \end{array}$$

Así $3CF_{16} = 975_{10}$.

Ahora considere como convertir de la notación hexadecimal a la notación binaria. En el ejemplo que se muestra a continuación los números se reescriben usando potencias de 2 y se aplican las leyes de los exponentes. El resultado sugiere un procedimiento general.

$$\begin{array}{cccc} 16^3 = 4096 & 16^2 = 256 & 16^1 = 16 & 16^0 = 1 \\ C_{16} & 5_{16} & 0_{16} & A_{16} \\ \| & \| & \| & \| \\ 12_{10} & 5_{10} & 0_{10} & 10_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcll} 10 \cdot 16^0 & = & (2^3 + 2) \cdot 1 & = & 2^3 + 2 & \text{ya que } 10 = 2^3 + 2 \\ 0 \cdot 16^1 & = & 0 \cdot 2^4 & = & 0 & \text{ya que } 16^1 = 2^4 \\ 5 \cdot 16^2 & = & (2^2 + 1) \cdot 2^8 & = & 2^{10} + 2^8 & \text{ya que } 5 = 2^2 + 1,\ 16^2 = (2^4)^2 = 2^8 \text{ y } 2^2 \cdot 2^8 = 2^{10} \\ 12 \cdot 16^3 & = & (2^3 + 2^2) \cdot 2^{12} & = & 2^{15} + 2^{14} & \text{ya que } 12 = 2^3 + 2^2,\ 16^2 = (2^4)^3 = 12^{12}, \\ & & & & & 2^3 \cdot 2^{12} = 2^{15} \text{ y } 2^2 \cdot 2^{12} = 2^{14} \end{array}$$

Pero

$$\begin{aligned} &(2^{15} + 2^{14}) + (2^{10} + 2^8) + 0 + (2^3 + 2) \\ &\qquad = 1100\ 0000\ 0000\ 0000_2 + 0101\ 0000\ 0000_2 \\ &\qquad\qquad + 0000\ 0000_2 + 1010_2 \end{aligned}$$

por las reglas de escritura de los números binarios.

Por lo que

$$C50A_{16} = \underbrace{1100}_{C_{16}}\ \underbrace{0101}_{5_{16}}\ \underbrace{0000}_{0_{16}}\ \underbrace{1010_2}_{A_{16}}$$

por las reglas de la suma de números binarios.

El procedimiento que se muestra en este ejemplo se puede generalizar. De hecho, la siguiente secuencia de pasos, siempre dará la respuesta correcta:

> Para convertir un entero de la notación hexadecimal a la binaria:
>
> - Escriba cada digito hexadecimal del entero a la notación binaria de 4 bits.
> - Yuxtaponga los resultados.

Ejemplo 2.5.12 Conversión de notación hexadecimal a binaria

Convierta $B09F_{16}$ a notación binaria.

Solución $B_{16} = 11_{10} = 1011_2$, $0_{16} = 0_{10} = 0000_2$, $9_{16} = 9_{10} = 1001_2$ y $F_{16} = 15_{10} = 1111_2$. En consecuencia,

$$\begin{array}{cccc} \text{B} & 0 & 9 & \text{F} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1011 & 0000 & 1001 & 1111 \end{array}$$

y la respuesta es 1011000010011111_2. ■

Para convertir números enteros escritos en notación binaria a notación hexadecimal, invierta los pasos del procedimiento anterior.

> Para convertir un número entero de notación binaria a hexadecimal:
>
> - Agrupe los dígitos del número binario en conjuntos de cuatro, empezando por la derecha y agregando ceros principales según sea necesario.
> - Convierta los números binarios en cada conjunto de cuatro de dígitos hexadecimales. Yuxtaponga los dígitos hexadecimales.

Ejemplo 2.5.13 Conversión de notación binaria a hexadecimal

Convierta 100110110101001_2 a la notación hexadecimal.

Solución Primero agrupe los dígitos binarios en grupos de cuatro, trabajando de derecha a izquierda y agregando 0 principales si es necesario.

$$0100 \quad 1101 \quad 1010 \quad 1001.$$

Convierta cada grupo de cuatro dígitos binarios en un dígito hexadecimal.

$$\begin{array}{cccc} 0100 & 1101 & 1010 & 1001 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 4 & \text{D} & \text{A} & 9 \end{array}$$

Después yuxtaponga los dígitos hexadecimales.

$$4DA9_{16}$$ ■

Ejemplo 2.5.14 Lectura de un volcado de memoria

La unidad más pequeña de memoria direccionable en la mayoría de las computadoras es un byte, u ocho bits. En algunas operaciones de depuración de un volcado es de contenido de la memoria, es decir, se muestra o se imprime en orden el contenido de cada posición de memoria. Para ahorrar espacio y hacer la salida más fácil a ojo, se les dan las versiones hexadecimales del contenido de la memoria, en lugar de las versiones binarias. Supongamos, por ejemplo, que un segmento del volcado de memoria se parece a

A3 BB 59 2E.

¿Cuál es el contenido real de las cuatro posiciones de memoria?

Solución

$$\begin{aligned}
A3_{16} &= 10100011_2\\
BB_{16} &= 10111011_2\\
59_{16} &= 01011001_2\\
2E_{16} &= 00101110_2
\end{aligned}$$

Autoexamen

1. Representar un entero no negativo en notación binaria significa escribirlo como una suma de productos de la forma _____, donde _____.
2. Para sumar enteros en notación binaria, se utilizan los hechos de que $1_2 + 1_2 =$ _____ y $1_2 + 1_2 + 1_2 =$ _____.
3. Para restar números enteros en notación binaria, se utiliza el hecho de que $10_2 - 1_2 =$ _____ y $11_2 - 1_2 =$ _____.
4. Un semisumador es un circuito digital lógico que _____ y un sumador completo es un circuito digital lógico que _____.
5. El complemento de dos de 8 bits de un entero positivo a es _____.
6. Para encontrar el complemento de dos de 8 bits de un entero positivo que es a lo más 255, usted _____, _____ y _____.
7. Si a es un entero con $-128 \le a \le 127$, la representación de 8 bits de a es _____ si $a \ge 0$ y es _____ si $a < 0$.
8. Para sumar dos números enteros en el rango de -128 a 127 —cuya suma también está en el rango de -128 a 127, usted _____, _____, _____ y _____.
9. Representar un entero no negativo en notación hexadecimal significa escribirlo como una suma de productos de la formas _____, donde _____.
10. Para convertir un número entero no negativo de la notación hexadecimal a la notación binaria, usted _____ y _____.

Conjunto de ejercicios 2.5

En los ejercicios 1 al 6 represente los números enteros decimales en notación binaria.

1. 19　　2. 55　　3. 87

4. 458　　5. 1 609　　6. 1 424

En los ejercicios del 7 al 12 represente los números enteros en notación decimal.

7. 1110_2　　8. 10111_2　　9. 110110_2

10. 1100101_2　　11. 1000111_2　　12. 1011011_2

En los ejercicios del 13 al 20 realice la aritmética usando la notación binaria.

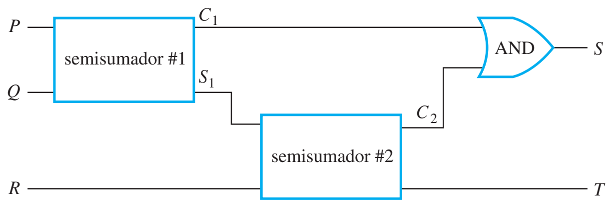
13. $\begin{array}{r} 1011_2 \\ +\ \ 101_2 \\ \hline \end{array}$　　14. $\begin{array}{r} 1001_2 \\ +1011_2 \\ \hline \end{array}$

15. $\begin{array}{r} 101101_2 \\ +\ \ 11101_2 \\ \hline \end{array}$　　16. $\begin{array}{r} 110111011_2 \\ +1001011010_2 \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 10100_2 \\ -\ \ 1101_2 \\ \hline \end{array}$　　18. $\begin{array}{r} 11010_2 \\ -\ \ 1101_2 \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 101101_2 \\ -\ \ 10011_2 \\ \hline \end{array}$　　20. $\begin{array}{r} 1010100_2 \\ -\ \ 10111_2 \\ \hline \end{array}$

21. De las señales de salida S y T para el circuito en la columna de la derecha si las señales de entrada P, Q y R se especifican. Considere que este *no* es el circuito de un sumador completo.
    a. $P = 1, Q = 1, R = 1$
    b. $P = 0, Q = 1, R = 0$
    c. $P = 1, Q = 0, R = 1$



22. Agregue $11111111_2 + 1_2$ y convierta el resultado a notación decimal, para comprobar que $11111111_2 = (2^8 - 1)_{10}$.

En los ejercicios del 23 al 26, encuentre los complementos de dos de 8 bits para los enteros.

23. 23　　24. 67　　**25.** 4　　26. 115

En los ejercicios 27 al 30, encuentre las representaciones decimales de los enteros con representaciones de 8 bits.

27. 11010011　　28. 10011001

29. 11110010　　30. 10111010

En los ejercicios 31 al 36, utilice las representaciones de 8 bits para calcular las sumas.

31. $57 + (-118)$　　**32.** $62 + (-18)$

33. $(-6) + (-73)$　　34. $89 + (-55)$

35. $(-5) + (-46)$　　36. $123 + (-94)$

✶ 37. Demuestre que si a, b y $a + b$ son enteros en el rango de 1 al 128, entonces,

$$(2^8 - a) + (2^8 - b) = (2^8 - (a + b)) + 2^8 \geq 2^8 + 2^7.$$

Explique por qué resulta que si se calcula la representación binaria de 8 bits de la suma de los negativos de dos números en el rango dado, el resultado es un número negativo.

En los ejercicios 38 al 40 convierta los enteros de notación hexadecimal a decimal.

38. $A2BC_{16}$ 39. $E0D_{16}$ 40. $39EB_{16}$

En los ejercicios 41 al 43 convierta los números enteros de notación hexadecimal a binaria.

41. $1C0ABE_{16}$ 42. $B53DF8_{16}$ 43. $4ADF83_{16}$

En los ejercicios 44 al 46 convierta los números enteros de notación binaria a hexadecimal.

44. 00101110_2 45. $10110111110001 01_2$

46. 1100100101100_2

47. **Notación octal:** Además de la notación binaria y hexadecimal, los científicos de la computación también usan la *notación octal* (base 8) para representar los números. La notación octal se basa en el hecho de que cualquier número entero se puede representar como una única suma de los números de la forma $d \cdot 8^n$, donde cada n es un entero no negativo y cada d es uno de los números enteros de 0 a 7. Así, por ejemplo, $5073_8 = 5 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 2619_{10}$.
   a. Convierta 61502_8 a notación decimal.
   b. Convierta 20763_8 a notación decimal.
   c. Describa los métodos para convertir enteros de notación octal a binaria y de binaria a octal que son similares a los métodos utilizados en los ejemplos 2.5.12 y 2.5.13 para convertir de un lado a otro de notación hexadecimal a binaria. Dé ejemplos que demuestren que estos métodos dan las respuestas correctas.

Respuestas del autoexamen

1. $d \cdot 2^n$: $d = 0$ o $d = 1$ y n es un entero no negativo 2. 10_2; 11_2 3. 1_2; 10_2
4. las salidas de la suma de dos dígitos binarios cualesquiera; las salidas de la suma de cualesquiera tres dígitos binarios
5. $2^8 - a$ 6. escriba la representación binaria de 8 bits de a; voltear los bits, sume 1 en notación binaria
7. la representación binaria de 8 bits de a, la representación binaria de 8 bits de $2^8 - a$
8. convierta ambos números enteros a sus representaciones binarias de 8 bits, sume los resultados utilizando la notación binaria; trunque cualquier 1 principal; convierta de nuevo a la forma decimal
9. $d \cdot 16^n$; $d = 0, 1, 2, \ldots 9, A, B, C, D, E, F$ y n es un entero no negativo
10. escriba cada dígito hexadecimal en notación binaria de 4 bits; yuxtaponga los resultados