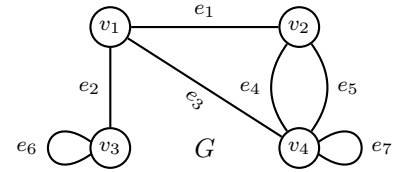
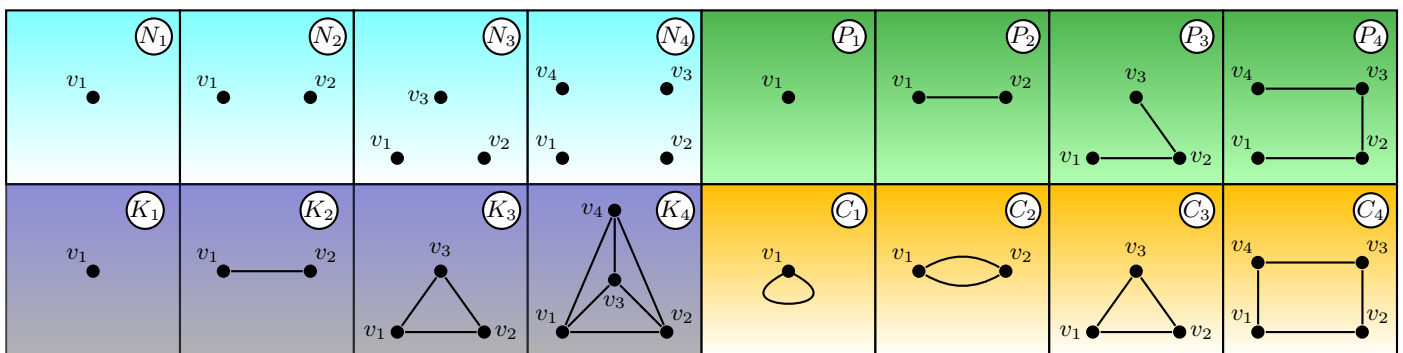


1. (–) *Nociones básicas.* Definir grafo y los conceptos básicos relativos a grados y métrica; ilustrar cada una de las definiciones referidas al grafo G cuyo diagrama se muestra en la figura. Definir en particular los grafos N_n, C_n, P_n, K_n , indicando su radio, diámetro y tamaño; representarlos para $n = 1, 2, 3, 4$.



♣ Resp. parcial. Un *grafo (graph)* G es una terna $(V(G), E(G), \psi_G)$, donde $V(G)$ es el conjunto de *vértices (vertices)*, disjunto del conjunto de *aristas (edges)* $E(G)$, $\psi_G : E(G) \rightarrow \{u, v : u, v \in V(G)\}$ es la *función de incidencia (incidence function)* que asigna a cada arista un conjunto de dos elementos (o de un elemento) de $V(G)$. Si $\psi_G(e) = \{u, v\}$ (escrito brevemente $e = uv$) los vértices u, v se llaman *adyacentes (adjacent)* y se dice que e *une (join)* u y v , que son sus *extremos (ends)*, sobre los que *incide* (y también cada vértice incide sobre la arista que los une). Si $u = v$ la arista $e = uu$ es un *lazo (loop)*, y dos aristas con los mismos extremos se llaman *paralelas (parallel edges)*. Un vértice $u \neq v$ es *vecino (neighbour)* de v si $uv \in E(G)$, y el conjunto de los vecinos de v es el *entorno, neighborhood* (abierto) del vértice v y se designa con $\Gamma_G(v)$, mientras que $\Gamma_G[v] \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_G(v) + \{v\}$ es su entorno cerrado. El grafo G es *finito (finite)* si tanto $V(G)$ como $E(G)$ son finitos, siendo $n(G) \stackrel{\text{def}}{=} |V(G)|$ su *orden (order)* y $m(G) \stackrel{\text{def}}{=} |E(G)|$ su *tamaño, (size)*, designando con $G(n, m)$ un tal grafo. El *grado (degree)* $d(v)$ de un vértice es la cantidad de veces que las aristas inciden sobre él, y la sucesión de grados (*degree-sequence*) $d(G)$ es la sucesión no decreciente de sus grados (un grafo todos cuyos vértices tienen el mismo grado k se llama *k-regular*). El *grado mínimo (minimum degree)* es $\delta(G) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d(v) : v \in V(G)\}$, su *grado máximo (maximum degree)* $\Delta(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{d(v) : v \in V(G)\}$, su *grado promedio (average degree)* $\bar{d}(G) \stackrel{\text{def}}{=} (1/n(G)) \sum_{v \in V(G)} d(v)$. Un $v_0 - v_q$ *camino (walk)* w de *longitud (length)* q es una sucesión alternada de vértices y aristas $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{q-1}, e_q, v_q$ con $\psi_G(e_k) = \{v_{k-1}, v_k\}, 0 < k \leq q$, es *cerrado (closed)* si $v_0 = v_q$ y *abierto (open)* en otro caso. Un grafo es *conexo (connected)* si para cada par de vértices u, v , existe un $u - v$ camino, es *disconexo (disconnected)* en otro caso. Un camino abierto es un *recorrido (trail)* si $e_i \neq e_j, i \neq j$, y es un *camino simple (path)* si $v_i \neq v_j, i \neq j$. Un camino cerrado $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{q-1}, e_q, v_0$ con $e_i \neq e_j, i \neq j$ es un *circuito (circuit)*, y si $v_i \neq v_j, i \neq j, 0 < i < q, 0 < j < q$, es un *ciclo (cycle)*. Un *path* de q vértices se designa con P_q , un ciclo de longitud q se designa con C_q . Un grafo se llama *simple (simple)* si carece de lazos y aristas paralelas; en tales grafos cada arista e queda definida por sus extremos, y alcanza con escribir simplícidamente uv en lugar de $\psi_G(e) = \{u, v\}$. La *distancia (distance)* $d(u, v)$ entre los vértices u y v es la longitud de un $u - v$ camino de longitud mínima (*geodésico, geodesic*) (si tal camino no existe, es $d(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \infty$). La *excentricidad (eccentricity)* de un vértice v es $e(v) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$, el *diámetro (diameter)* del grafo es $\phi(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}$, el *radio (radio)* del grafo es $r(G) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}$, el *centro (center)* $C(G)$ es el conjunto de vértices de excentricidad mínima, la *periferia (periphery)* $P(G)$ del grafo es el conjunto de vértices de excentricidad máxima. La *cintura (girth)* del grafo $g(G)$ es la longitud mínima de sus ciclos, la *circunferencia (circumference)* $\text{cir}(G)$ es la longitud máxima de sus ciclos (si el grafo es acíclico es $g(G) = \text{cir}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \infty$).

Para el grafo finito conexo (y no simple) $G(4, 7)$ representado en la figura, es $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, siendo $\psi_G(e_1) = \{v_1, v_2\}, \psi_G(e_2) = \{v_1, v_3\}, \psi_G(e_3) = \{v_1, v_4\}, \psi_G(e_4) = \{v_2, v_4\}, \psi_G(e_5) = \{v_2, v_4\}, \psi_G(e_6) = \{v_3\}, \psi_G(e_7) = \{v_4\}$. Es un grafo finito de orden $n(G) = 4$ y tamaño $m(G) = 7$, siendo e_6, e_7 lazos, mientras que e_4, e_5 son aristas paralelas. Los vecinales de cada vértice son: $\Gamma_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}, \Gamma_G(v_2) = \{v_1, v_4\}, \Gamma_G(v_3) = \{v_1\}, \Gamma_G(v_4) = \{v_1, v_2\}$, los grados de cada vértice son $d(v_1) = 3, d(v_2) = 3, d(v_3) = 3, d(v_4) = 5$, luego $d(G) = (3, 3, 3, 5), \delta(G) = 3, \Delta(G) = 5, \bar{d}(G) = 3.5$. El camino $v_4, e_5, v_2, e_4, v_4, e_5, v_2, e_1, v_1$ de longitud 4 no es un recorrido (dado que repite la arista e_5), el recorrido $v_4, e_5, v_2, e_4, e_3, v_1, e_2, v_3$ de longitud 4 no es un *path* (pues repite el vértice v_4); $v_3, e_2, v_1, e_1, v_2, e_5, v_4$ es un *path* de longitud 3 (es un P_4). El camino cerrado v_2, e_5, v_4, e_5, v_2 de longitud 2 no es un circuito (pues repite la arista e_5); el camino cerrado $v_2, e_5, v_4, e_7, v_4, e_4, v_2$ de longitud 3 es un circuito que no es un ciclo (pues repite el vértice v_4); el camino cerrado $v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_3, v_1$ es un ciclo de longitud 3 (es un C_3), el camino v_2, e_5, v_4, e_4, v_2 es un ciclo C_2 , el camino v_3, e_6, v_3 es un C_1 . La cintura del grafo es $g(G) = 1$, su circunferencia $\text{cir}(G) = 3$. Las excentricidades son $e(v_1) = 1, e(v_2) = 2, e(v_3) = 2, e(v_4) = 2$, luego $r(G) = 1, \phi(G) = 2, C(G) = \{v_1\}, P(G) = \{v_2, v_3, v_4\}$.

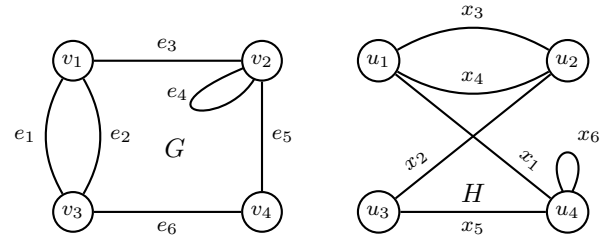


Un grafo sin aristas de n vértices se llama *grafo nulo (null graph)* y se designa con N_n , el grafo simple de n vértices con la máxima cantidad de aristas (esto es con $n(n - 1)/2$ aristas) se llama *grafo completo (complete graph)* y se designa con K_n . Los grafos

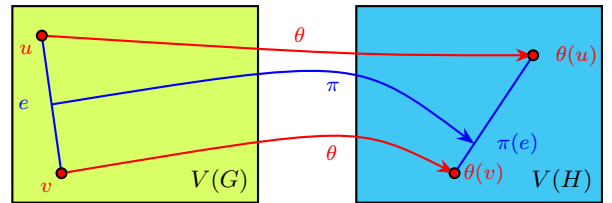
N_n, C_n, K_n son, respectivamente, $0, 2, n - 1$ regulares, para todo $n \in \mathbb{N}$. El grafo C_n es simple sii $n \geq 3$. El grafo P_n es regular sii $n < 3$. Cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ es $m(N_n) = 0, m(P_n) = n - 1, m(C_n) = n, m(K_n) = n(n - 1)/2$, lo que se prueba por las mismas definiciones; por ejemplo, para el completo K_n se tiene que de cada vértice parte una arista hacia los $n - 1$ restantes, y siendo n la cantidad de vértices las aristas son la mitad (para no contarlas dos veces) de $n(n - 1)$. Más inmediato: hay $\binom{n}{2}$ pares de vértices, y una arista que tiene por extremos cada par.

Observación. El grafo sin vértices (y entonces sin aristas, con la función vacía de incidencia) se llama grafo vacío; todas las definiciones deben entenderse exceptuando (quizá) al grafo vacío, que se mantiene por conveniencia en algunas expresiones.

2. (+) *Isomorfismo.* Definir igualdad $G = H$ e isomorfismo $G \cong H$ entre dos grafos $G = (V(G), E(G), \psi_G), H = (V(H), E(H), \psi_H)$, probar que la relación de isomorfismo es de equivalencia en el conjunto de los grafos $G(n, m)$; analizar si los grafos de la figura son isomorfos y proponer tres grafos no isomorfos con $d(G) = (2, 3, 3, 4, 4)$ (tres grafos son no isomorfos si dos cualesquiera no lo son).

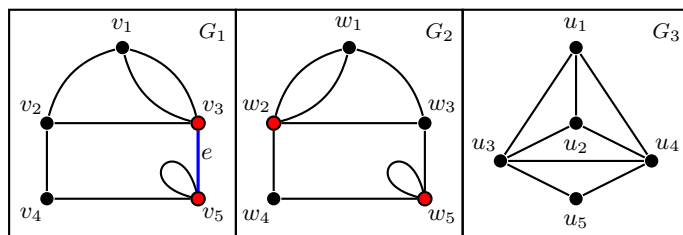


♣ Resp. parcial. $G = H$ significa la igualdad de la terna, esto es $V(G) = V(H), E(G) = E(H), \psi_G = \psi_H$, mientras que $G \cong H$ significa que existen *dos* biyecciones $\theta : V(G) \rightarrow V(H), \pi : E(G) \rightarrow E(H)$ tales que $\psi_G(e) = uv$ sii $\psi_H(\pi(e)) = \theta(u)\theta(v)$. Si los grafos son simples, ya que π queda definida completamente por θ (pues $\pi(e) = \theta(u)\theta(v)$), basta con la sola biyección θ , y entonces los grafos (¡simples!) $(V(G), E(G)), (V(H), E(H))$ son isomorfos sii existe *una* biyección θ que *preserva adyacencias*, esto es que $uv \in E(G)$ sii $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.



La relación \cong es reflexiva, dado que las biyecciones identidades $\theta(v) = v, \pi(e) = e$ cumplen trivialmente $\psi_G(e) = uv$ sii $\psi_G(\pi(e)) = \psi_G(e) = uv = \theta(u)\theta(v)$; es simétrica, pues dadas θ, π , existen (por ser biyectivas) θ^{-1}, π^{-1} tales que cualquiera sea $w \in E(H)$ existe $\pi^{-1}(w) \in E(G)$ tales que $\psi_H(w) = xy$ sii $\psi_G(\pi^{-1}(w)) = \theta^{-1}(x)\theta^{-1}(y)$. Para la transitividad, si $G \cong H, H \cong S$ existen las biyecciones $\theta, \theta', \pi, \pi'$ tales que $\psi_G(e) = uv$ sii $\psi_H(\pi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ sii $\psi_S(\pi'(\pi(e))) = \theta'(\theta(u))\theta'(\theta(v))$, luego existen las biyecciones $\theta^* = \theta' \circ \theta : V(G) \rightarrow V(S), \pi^* = \pi' \circ \pi : E(G) \rightarrow E(S)$ tales que $\psi_G(e) = uv$ sii $\psi_S(\pi^*(e)) = \theta^*(u)\theta^*(v)$, de modo que entonces $G \cong S$. Luego \cong es una relación de equivalencia, de modo que el diagrama de un grafo (sin etiquetados) representa una clase de equivalencia del conjunto cociente $G(n, m)/\cong$.

Los grafos G y H son isomorfos, pues las biyecciones $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $\theta(v_1) = u_1, \theta(v_2) = u_4, \theta(v_3) = u_2, \theta(v_4) = u_3$ y $\pi : E(G) \rightarrow E(H)$ tal que $\pi(e_1) = x_3, \pi(e_2) = x_4, \pi(e_3) = x_1, \pi(e_4) = x_6, \pi(e_5) = x_5, \pi(e_6) = x_3$ verifican (¡comprobarlo!) la definición. Observar que si en H se suprimiera x_6 , las adyacencias aún se preservarían, mas ya no habría isomorfismo (la *necesaria* preservación de adyacencias *no es suficiente* para asegurar isomorfismo entre grafos *no simples*).



G_3 es un grafo simple (y entonces no isomorfo a G_1 ni a G_2 , que tienen lazos, pues las biyecciones deben preservar los lazos). Dado que los isomorfismos preservan el grado (¡probar esta afirmación!), y en G_1 hay solo dos vértices (v_3, v_5) de grado 4 que son adyacentes ($e = v_3v_5 \in E(G)$), cualquier pretendido isomorfismo debe asignar a este par de vértices el par w_2, w_5 , que son los únicos de grado 4 en G_2 , pero dado que w_2 no es adyacente a w_5 , tal isomorfismo no existe. Luego G_1 no es isomorfo a G_2 .

Observación. Los tres grafos comparten el orden (5), tamaño (8), secuencia de grados ($d = (2, 3, 3, 4, 4)$), radio (2), diámetro (2), circunferencia (4). Todas estas características son estructurales (esto es, invariantes ante isomorfismos), pero como puede verse, si bien necesarias, no son suficientes para asegurar el isomorfismo; sin embargo, sí pueden actuar para rechazar la existencia de isomorfismo, en tanto no se compartan (por ejemplo, dado que la cintura de G_3 es 3, mientras que la de G_1 y G_2 es 1, G_3 no puede ser isomorfo a ninguno de ellos (como ya se probó antes más directamente mediante la definición misma)).

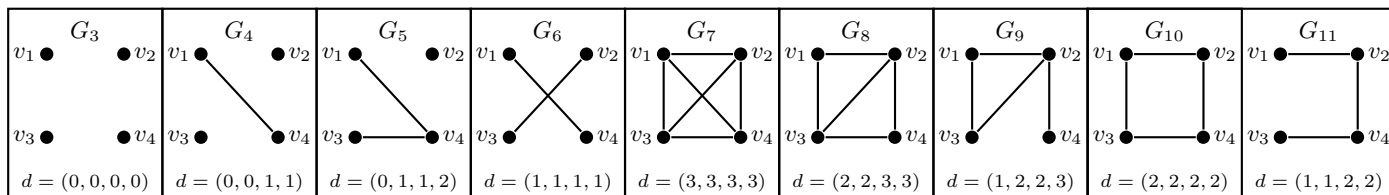
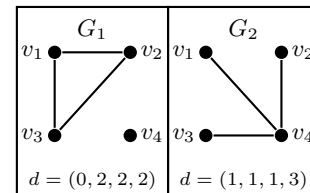
3. (-) *Isomorfismo.* Sean G, H dos grafos isomorfos. Probar que el isomorfismo dado por $\theta : V(G) \rightarrow V(H), \pi : E(G) \rightarrow E(H)$ preserva el orden, el tamaño, el grado, la sucesión de grados, los entornos ($\forall v \in V(G) : \theta(\Gamma_G(v)) = \Gamma_H(\theta(v))$), el radio, el centro, el diámetro, la periferia, la cintura, la circunferencia, la conexidad...¿Vale que $d_G(v) = |\Gamma_G(v)| = d_H(\theta(v)) = |\Gamma_H(\theta(v))|$?

♣ Resp. parcial. Que $n(G) = n(H), m(G) = m(H)$ es inmediato desde que θ, π son biyectivas (y los grafos son finitos). Para probar que $\forall v \in V(G) : d_G(v) = d_H(\theta(v))$ bastan las definiciones: e incide en v sii $\pi(e)$ incide en $\theta(v)$, luego se cuentan tantas incidencias de aristas en v como incidencias de las imágenes de esas aristas a través de π en $\theta(v)$, pero eso es precisamente que

$d_G(v) = d_H(\theta(v))$, y entonces $d(G) = d(H)$. La expresión $d_G(v) = |\Gamma_G(v)|$ vale solo para los grafos simples (pues aristas múltiples o lazos incrementan el grado sin añadir vecinos).

4. *Isomorfismo*. Determinar la cantidad de grafos *simples* (etiquetados) de orden n y probar que para $n = 4$, la relación de isomorfismo \cong produce un conjunto cociente $G(4, m)/\cong$ de cardinal 11, dando un representante de cada clase; ¿algún par de grafos de clases distintas tienen la misma sucesión gráfica? Probar que $|G(8, m)/\cong| \geq 6000$ (¡la cantidad de clases de equivalencia crece muy rápidamente con el orden!).

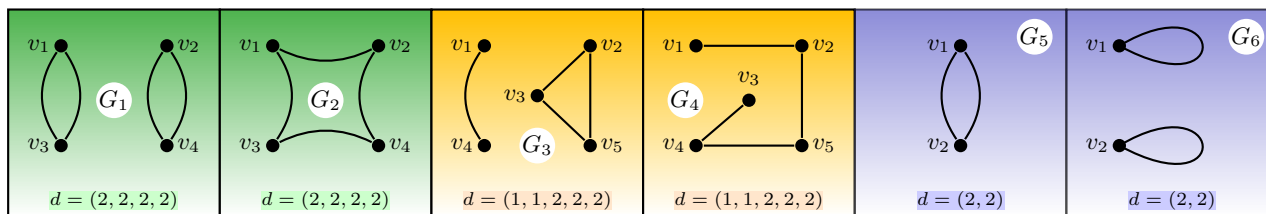
♣ Resp. Parcial. Siendo G simple hay a lo sumo $\binom{n}{2}$ aristas (¿por qué?), y como cada par de vértices de $V(G)$ pueden o no ser adyacentes, se tiene un total de $2^{\binom{n}{2}}$ grafos, que para $n = 4$ resulta en $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ grafos. Las figuras muestran 11 clases de equivalencia a través de sendos representantes. También se observa directamente que no hay dos grafos no isomorfos con la misma sucesión de grados d .



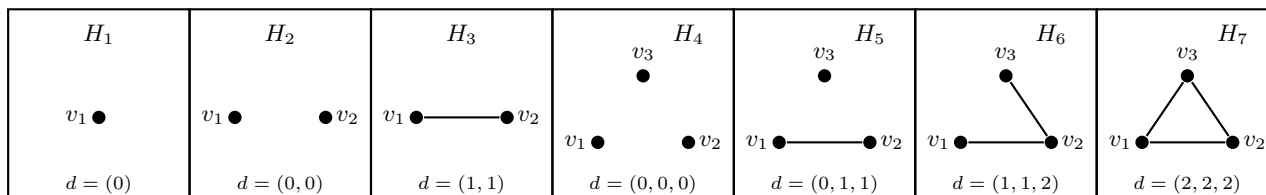
Si $n = 8$, se tiene un total de $2^{\binom{8}{2}} = 2^{28} = 268435456$ grafos etiquetados, y como hay $n! = 8! = 40320$ biyecciones en $V(G)$, cada grafo etiquetado puede ser, a lo sumo, isomorfo a 40320 grafos. Esto exige una cantidad de al menos $\lceil 268435456/40320 \rceil = 6658$ clases de equivalencia (*Observación*: la cota inferior dada por $\lceil 2^{\binom{n}{2}}/n! \rceil$ es muy conservadora; por ejemplo, para $n = 4$ dice que $3 \leq 11$).

5. (–) *Isomorfismo*. Determinar el *mínimo* orden $n(G)$ para que exista un par de grafos no isomorfos con la misma $d(G)$ en los tres siguientes casos: (a) grafos cualesquiera; (b) grafos sin lazos (pero permitiendo aristas múltiples); (c) grafos simples. Dar en cada caso el par de grafos no isomorfos de la misma $d(G)$, probando que no son isomorfos.

♣ Resp. Parcial. Los mínimos órdenes son 2 para (a), 4 para (b) y 5 para (c). La figura muestra los pares de grafos sin lazos no isomorfos G_1, G_2 con la misma $d = (2, 2, 2, 2)$, de orden $n(G_1) = n(G_2) = 4$; los pares de grafos simples no isomorfos G_3, G_4 con la misma $d = (1, 1, 2, 2, 2)$, de orden $n(G_3) = n(G_4) = 5$; los pares de grafos de cualquier tipo no isomorfos G_5, G_6 con la misma $d = (2, 2)$, de orden $n(G_5) = n(G_6) = 2$. Para afirmar que los grafos que integran cada pareja no son isomorfos, basta decir que uno de ellos es conexo y el otro desconexo (sabido que la conexidad es un invariante ante isomorfismos).

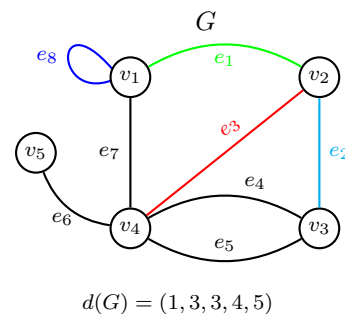


Resta probar que tales órdenes son mínimos (esto es que no hay, con un orden menor, un par de grafos isomorfos con la misma sucesión. Esto puede hacerse en este caso examinando que no hay clases de equivalencia distintas con la misma d para todo n estrictamente menor. Así, para probar que 5 es efectivamente el menor orden para el caso de los grafos simples, del ejercicio previo, se sabe que ninguna de las 11 clases correspondientes a $n = 4$ (Cf. ejercicio previo) comparte d . Las restantes 7 clases de orden $n = 1, 2, 3$ se muestran en la siguiente figura, que evidencian ninguna d compartida. Luego, efectivamente, $n = 5$ es el mínimo para el caso (c) (Resta hacer el mismo análisis para (a) y (b)).



Observación. Combinando los grafos listados en estos dos últimos ejercicios, puede verse que la cantidad de grafos *simples* $G(n, m), n \leq 4$ (salvo isomorfismos), es bastante baja: ordenando la cantidad según el orden son $1 + 2 + 4 + 11 = 18$. En cambio, ya con $n \leq 5$ la suma sube a 52. Si $n \leq 6$ es $|G(n, m)| = 208$.

6. *Dos matrices básicas.* Dado el grafo $G = (V(G), E(G), \psi_G), V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, definir la *matriz de adyacencia* A_G y la *matriz de incidencia* M_G . Probar que la suma de los elementos de una fila (o columna) de A_G es el grado del vértice correspondiente (esto es: $d(v_i) = \sum_{k=1}^n A_G(i, k) = \sum_{k=1}^n A_G(k, i), i = 1, 2, \dots, n$), que el tamaño del grafo es la semisuma de todos los elementos de A_G (esto es $m(G) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_G(i, k)$), que la traza de A_G es el doble de la cantidad de lazos, que la suma de los elementos de una fila de M_G es el grado del vértice correspondiente a esa fila (esto es, $d(v_i) = \sum_{k=1}^m M_G(i, k), i = 1, 2, \dots, n$), mientras que cada columna de M_G suma constantemente 2 (esto es, $\sum_{i=1}^m M_G(i, k) = 2, k = 1, 2, \dots, m$). Escribir ambas matrices para el grafo $G(5, 8)$ representado en la figura (y comprobar en este caso particular las relaciones probadas en general). Probar además que para un grafo sin lazos, es, $M_G M_G^T = A_G + D$, siendo $D = \text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$.



♣ Resp. parcial. La *matriz de incidencia* (*incidence matrix*) $M_G \in \{0, 1, 2\}^{n \times m}$ tiene por elemento $M_G(i, j)$ la cantidad de veces que la arista e_j incide sobre el vértice v_i , con $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$; la *matriz de adyacencia* (*adjacency matrix*) $A_G \in \{0, 1, \dots, \Delta(G)\}^{n \times n}$ tiene por elemento $A_G(i, j)$ la cantidad de aristas que tienen por extremos los vértices v_i, v_j , cada lazo contado dos veces (en otros términos, $M_G(i, j) = |\psi_G^{-1}(\{v_i, v_j\})|$ si $i \neq j, M_G(i, i) = 2|\psi_G^{-1}(\{v_i, v_i\})|, i, j = 1, 2, \dots, n$). La matriz de adyacencia es simétrica ($A_G^T = A_G$) puesto que $\psi_G(e) = \{u, v\} = \{v, u\}$.

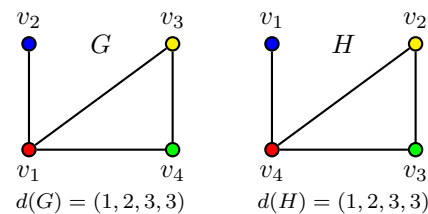
Las matrices son inmediatas de la definición; por ejemplo, los dos unos de la tercera columna (roja) de M_G , ubicados en la segunda y cuarta fila, localizan la arista (roja) e_3 que tiene por extremos a los vértices v_2 y v_4 (esto es $\psi_G(e_3) = \{v_3, v_4\}$). En la matriz de adyacencia, $A_G(3, 4) = 2 = A_G(4, 3)$ indica el cardinal de $\psi_G^{-1}(\{v_3, v_4\}) = \{e_4, e_5\}$.

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Todas las propiedades se prueban de modo directo por las mismas definiciones. Por ejemplo, la prueba de que $M_G M_G^T = A_G + D$ para un grafo sin lazos (i.e. $A(i, i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$): llamando $m_{ij} = M_G(i, j)$, es $M_G M_G^T(i, j) = \sum_{k=1}^m m_{ik} m_{jk}$ de donde, si $i = j$ queda $M_G M_G^T(i, i) = \sum_{k=1}^m m_{ik}^2 = \sum_{k=1}^m m_{ik} = d(v_i)$ (pues $m_{ik}^2 = m_{ik}$ ya que $m_{ik} \in \{0, 1\}$). Ahora, si $i \neq j, M_G M_G^T(i, j) = \sum_{k=1}^m m_{ik} m_{jk}$, con $m_{ik} m_{jk} = 1$ cada vez que existe una arista $\{v_i, v_j\}$ (y es nulo en todo otro caso), luego la suma sobre k devuelve la cantidad de aristas que conectan v_i con v_j , y esto, precisamente es $A_G(i, j) = |\psi_G^{-1}(\{v_i, v_j\})|$.

Observación: Para los grafos *simples*, ambas matrices son binarias, ($M_G \in \{0, 1\}^{n \times m}, A_G \in \{0, 1\}^{n \times n}$), la matriz de adyacencia tiene su diagonal principal nula y además $M_G M_G^T(i, i) = d(v_i)$; para los grafos sin lazos $A_G(i, j)$ cuenta la cantidad de caminos de longitud 1 entre v_i y v_j .

7. (–) *Isomorfismo y semejanza.* La matriz de adyacencia A_G (e incidencia M_G) queda definida salvo isomorfismo, esto es que si se permutan los vértices y aristas mediante automorfismos, las filas (columnas) de las correspondientes matrices reflejan las mismas permutaciones: $G \cong H$ con el isomorfismo definido por $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ sii la correspondiente matriz de permutación $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$ satisface $A_G = P^{-1} A_H P$, esto es que A_G, A_H son *semejantes* (*similar*). Mostrar que así sucede con los G, H representados en la figura.



♣ Resp. parcial. Siendo G, H simples, basta definir $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ dado por $\theta(v_1) = v_4, \theta(v_2) = v_1, \theta(v_3) = v_2, \theta(v_4) = v_3$ que verifica $v_i v_j \in E(G)$ sii $\theta(v_i) \theta(v_j) \in E(H), 1 \leq i, j \leq 4$, lo que prueba que $G \cong H$. La matriz asociada a θ es la matriz de permutación P (matriz que en cada fila y en cada columna tiene exactamente un 1, observar que P se obtiene sencillamente permutando las filas de la matriz identidad I_n como lo indica la permutación θ , mientras que P^{-1} se obtiene procediendo del mismo modo con las columnas de I_n).

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_G = P^{-1} A_H P$$

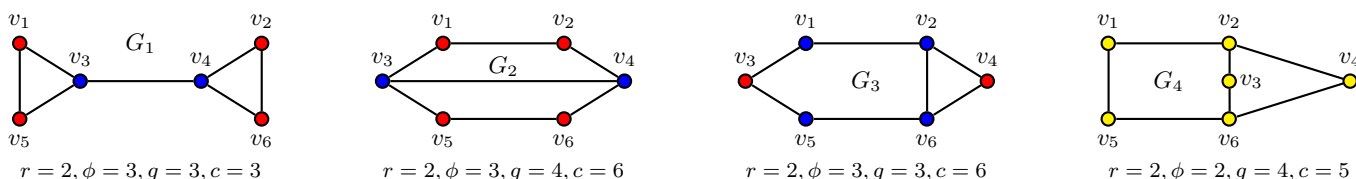
Observación 1. La semejanza de las matrices de adyacencia permite hablar del *espectro* de un grafo G como el de “su” matriz de adyacencia, ya que se sabe que el polinomio característico de una matriz es invariante (junto a su rango, nulidad, determinante,

traza...) en la clase de matrices semejantes. En particular, para el grafo G (y entonces para el grafo H) el polinomio característico es $p_G(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_G) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$.

Observación 2. También vale que dos grafos son isomorfos sii sus matrices de incidencia pueden obtenerse una de otra permutando filas y columnas.

8. (+) *Adyacencia y potencias.* Si A_G es la matriz de adyacencia del grafo sin lazos $G = (V(G), E(G))$ de orden $n(G) = |V(G)|$, probar que el elemento (i, j) de A_G^q indica el número de caminos de longitud q que conectan el vértice v_i con el vértice v_j . Pobar que, para grafos simples, $A_G^2(i, i) = d(v_i) = |\Gamma_G(v_i)|$ ¿Vale si el grafo no es simple? Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A_G para que G sea conexo. Graficar *todos* (salvo isomorfismo) los grafos simples con sucesión $d(G) = (2, 2, 2, 2, 3, 3)$, determinar su radio, diámetro, centro, periferia, cintura, circunferencia, escribir A_G , ilustrar el resultado anterior para $q = 4$.

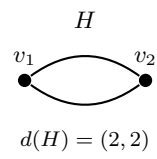
♣ Resp. Parcial. De d resulta que $n = 6, m = 7$ y resultan posibles los cuatro grafos de las figuras, se dan las correspondientes matrices de adyacencia de tres de ellos. Si se considera la matriz del primer grafo, el elemento $A_1^4(3, 4) = 4$ indica que son cuatro los caminos de longitud 4 entre los vértices v_3, v_4 : $v_3 v_1 v_5 v_3 v_4, v_3 v_5 v_1 v_3 v_4, v_3 v_4 v_2 v_6 v_4, v_3 v_4 v_6 v_2 v_4$ ¿Cuáles son los 7 caminos de longitud 4 entre v_1 y v_1 ?



$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A_1)^4 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo $A = A_G, n = n(G)$, sea $p(q)$ a la proposición: $A^q(i, j)$ indica la cantidad de caminos de longitud q que comunican los nodos v_i, v_j . Se tiene que $p(1)$ se cumple, pues $A^1(i, j) = A(i, j)$ es, por definición de matriz de adyacencia, la cantidad de aristas (y entonces caminos de longitud 1) entre v_i y v_j . Ahora se quiere probar que $p(q) \Rightarrow p(q + 1)$, esto es que el número de caminos de longitud $q + 1$ entre v_i y v_j es $A^{q+1}(i, j)$, supuesto que haya $A^q(i, j)$ caminos de longitud q entre esos nodos. Pero como $A^{q+1} = A^q A$, es $A^{q+1}(i, j) = \sum_{k=1}^n A^q(i, k) A(k, j)$; para cualquier k fijo, el producto $A^q(i, k) A(k, j)$ es no nulo sii $A^q(i, k)$ y $A(k, j)$ son no nulos, pero esto indica que hay $A^q(i, k)$ caminos de longitud q entre el nodo v_i y el nodo v_k y hay $A(k, j)$ aristas entre el nodo v_k y el nodo v_j : de esta manera hay $A^q(i, k) A(k, j)$ caminos de longitud $q + 1$ entre los nodos v_i, v_j que pasan por v_k (pues a cada uno de los caminos de v_i a v_k se le puede añadir una de esas aristas para llegar a v_j). Ahora, variando k de 1 a n se recorren y suman todos los caminos de longitud $q + 1$, contabilizando así en $A^{q+1}(i, j)$ la totalidad de esos caminos.

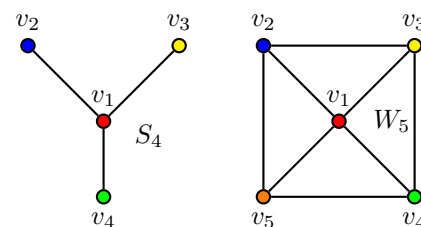
Para un grafo simple, $d(v_i)$, la cantidad de aristas que inciden en v_i coincide con la cantidad de vecinos de v_i , de modo que $d(v_i) = |\Gamma_G(v_i)|$; por otra parte, $A_G^2(v_i, v_i)$ cuenta los caminos de longitud 2 entre v_i y v_i , que no son sino los caminos de ida y vuelta con sus vecinos, esto es, la cantidad de aristas incidentes en v_i , de allí que $A_G^2(i, i) = d(v_i) = |\Gamma_G(v_i)|$. Si el grafo no es simple esto pierde validez: por ejemplo, para el grafo H es $\Gamma_G(v_1) = \{v_2\}, A_G = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_G^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, de modo que $|\Gamma_G(v_1)| = 1, d(v_1) = 2, A_G^2(1, 1) = 4$.



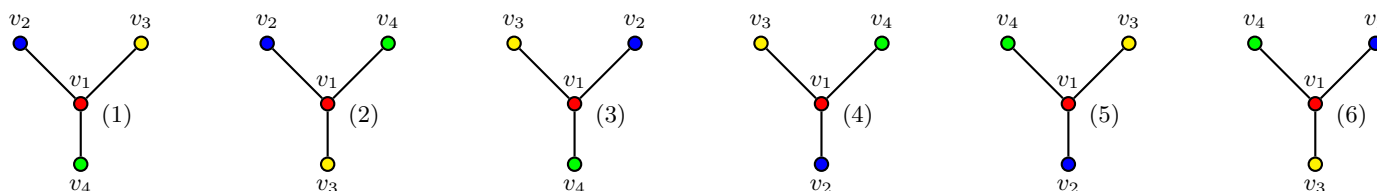
$G(n, m)$ es conexo sii existe un $u - v$ camino (y entonces un *path*) para cualquier par $u, v \in V(G)$, y la longitud máxima de tales *paths* es a lo sumo $n - 1$ (pues $d(u, v) \leq \phi(G) \leq n - 1$ ¿por qué la segunda desigualdad?: probarla). De este modo, cualesquiera sean $v_i, v_j \in V(G)$, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $A^k(i, j) > 0$. Esto esquivale a decir que $\sum_{k=0}^{n-1} A^k(i, j)$ debe ser positivo, para todo $1 \leq i, j \leq n$. En particular, dado que $(I_n + A)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k$, resulta que G es conexo sii $(I_n + A)^{n-1}$ tiene todos sus elementos positivos. En el caso en que $I_n - A$ es regular (se admite conocido que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3 + \dots$), lo anterior equivale a decir que $(I_n - A)^{-1}$ tiene todos sus elemntos positivos. Resumiendo lo anterior, puede escribirse:

$$G \text{ es conexo sii } \forall v_i, v_j \in V(G), \exists k, 0 \leq k \leq n - 1, \forall i, j : A^k(i, j) > 0 \text{ sii } \forall i, j : \sum_{k=0}^{n-1} A^k(i, j) > 0 \text{ sii } \forall i, j : (I_n + A)^{n-1}(i, j) > 0$$

9. *Automorfismo.* Un automorfismo en G es un isomorfismo de G en sí mismo, y $\text{Aut}(G)$ designa el conjunto de los automorfismos en G . Determinar $|\text{Aut}(G)|$ en los grafos (etiquetados) $N_n, K_n, C_n, P_n, S_n, W_n$, donde S_n es la *estrella* (*star*) y W_n es la *rueda* (*wheel*). En particular, explicitar tales automorfismos para los grafos S_4 y W_5 . De todos los grafos analizados, ¿alguno es casi regular? (Si todos los vértices de G tienen grado $\delta(G)$, excepto uno de grado $\Delta(G) = \delta(G) + 1$, el grafo se llama *casi regular*). Proponer (si existe) un grafo $G(7, m)$ tal que $|\text{Aut}(G)| = 1$

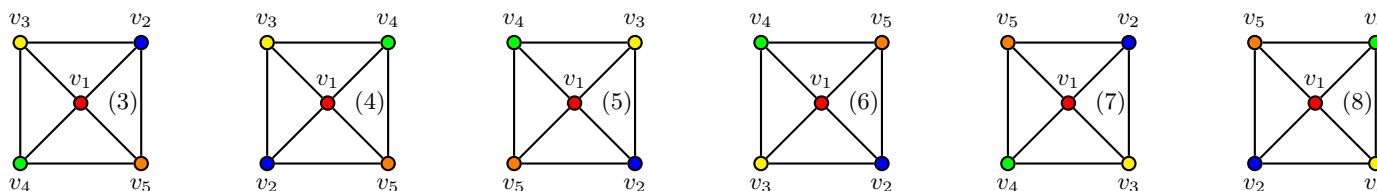
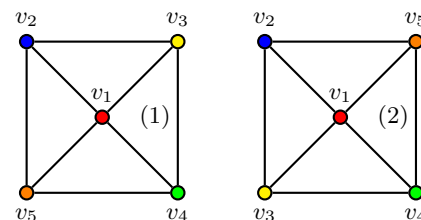


♣ Resp. parcial. Los automorfismos de S_4 : dado que debe preservarse el grado, el vértice v_1 debe permanecer fijo, y como los restantes tres son independientes (esto es, ningún par de ellos es adyacente), cualquier permutación preserva la adyacencia con v_1 , luego hay $|\text{Aut}(S_4)| = 3! = 6$ automorfismos. En la figura se muestran los seis grafos isomorfos al original. Por ejemplo, el quinto está dado por la función biyectiva $\theta_5 : V(S_4) \rightarrow V(S_4)$ tal que $\theta_5(v_1) = v_1, \theta_5(v_2) = v_4, \theta_5(v_3) = v_3, \theta_5(v_4) = v_2$. El mismo razonamiento en general lleva a $|\text{Aut}(S_n)| = (n - 1)!, n = 1, 2, \dots$ (la estrella S_n es el grafo en que un vértice de grado $n - 1$ es adyacente a los $n - 1$ restantes, de grado 1).



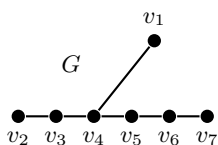
Para el grafo K_n (y el N_n) cualquier permutación de sus vértices preserva las adyacencias, de modo que $|\text{Aut}(K_n)| = |\text{Aut}(N_n)| = n!$. Es inmediato que C_1, C_2 tienen, respectivamente, 1, 2 automorfismos; ahora para $C_n, n \geq 3$ basta considerar que si u, v son adyacentes, deberán serlo también $\theta(u), \theta(v)$ en cualquier automorfismo $\theta : V(C_n) \rightarrow V(C_n)$, pero entonces si w es el otro vértice adyacente a v (es único, pues C_n es 2-regular), $\theta(w)$ resultará el otro vértice adyacente a $\theta(v)$, y así siguiendo; en otras palabras, la asignación de dos vértices define por completo el automorfismo, y como el primero se puede asignar a n vértices, luego el segundo solo a dos vértices, hay $|\text{Aut}(C_n)| = 2n, n = 3, 4, \dots$. Es inmediato que P_1 tiene solo un automorfismo, ahora, para $n \geq 2$, en un $u - v$ path, los únicos vértices de grado 1 son precisamente sus extremos u y v , de modo que un automorfismo debe dejarlos fijos o intercambiarlos; pero una vez asignados $\theta(u), \theta(v)$, el automorfismo θ queda definido completamente (¿por qué?), de modo que $|\text{Aut}(P_n)| = 2, n = 2, 3, \dots$

Los automorfismos de W_5 : el vértice v_1 , único de grado 4 debe quedar fijo; para el resto, asignado uno cualquiera, p.e. v_2 a v_2 , en las asignaciones restantes debe preservarse $\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_5\}$, luego solo hay dos posibilidades: o se dejan v_3, v_5 fijos (1) o se permutan (2); en cualquier caso, v_4 ya es obligado fijo. Como la asignación original puede hacerse de cuatro maneras ($v_2 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_3, v_2 \rightarrow v_4, v_2 \rightarrow v_5$), resultan $|\text{Aut}(W_5)| = 8$ automorfismos.



Para la rueda $W_n, n \geq 4$ (grafo que consta de un ciclo de longitud $n - 1$, cada uno de cuyos vértices es adyacente a un único vértice (el *eje* (*hub*) de la rueda) de grado $n - 1$, se tiene que $W_4 = K_4$ tiene $4! = 24$ isomorfismos; si $n \geq 5$, razonando como en W_5 (¡detallar, precisar!), resulta $|\text{Aut}(W_n)| = 2(n - 1), n = 5, 6, \dots$. La rueda W_5 es casi regular (y es la única que lo es), el path $P_3 = S_3$ es el único path y la única estrella casi regular (desde luego, ninguno de los regulares N_n, K_n, C_n puede ser casi regular).

El grafo $G(7, 6)$ de la siguiente figura es solo esomorfo a sí mismo (es un *grafo identidad*). Prueba: cualquier automorfismo θ debe preservar el grado, y como v_4 es el único de grado 3, debe ser $\theta(v_4) = v_4$; por la misma razón, siendo v_1, v_2, v_7 los únicos de grado 1, debe ser $\theta(v_1) \in \{v_1, v_2, v_7\}$ y como v_4 es adyacente a v_1 , debe ser $\theta(v_4) = v_4$ adyacente a $\theta(v_1)$, lo que solo es posible con $\theta(v_1) = v_1$ (pues $\theta(v_1) = v_2$ o $\theta(v_1) = v_7$ no son adyacentes a v_4).



Ahora, los únicos vértices de grado 2 son v_3, v_5, v_6 , de modo que $\theta(v_3) \in \{v_3, v_5, v_6\}$ y siendo v_3 adyacente a v_4 , debe ser $\theta(v_3)$ adyacente a $\theta(v_4) = v_4$, esto exige que $\theta(v_3) = v_3$ o $\theta(v_3) = v_5$. Pero v_3 es adyacente a un vértice de grado 1 (que es v_2), por lo que $\theta(v_3) \neq v_5$, luego debe ser $\theta(v_3) = v_3$. Hasta aquí, entonces $\theta(v_1) = v_1, \theta(v_3) = v_3, \theta(v_4) = v_4$ y entonces necesariamente, $\theta(v_2) = v_2$ y por la misma consideración de grados, $\theta(v_7) = v_7$. Análogamente se prueba (detallar) que $\theta(v_5) = v_5, \theta(v_6) = v_6$, de modo que $\theta = I_d$.

10. (–) *Métrica*. Probar que la distancia d definida en el conjunto de vértices de un grafo conexo verifica los axiomas de una métrica, y utilizar la desigualdad triangular para probar que $r(G) \leq \phi(G) \leq 2r(G)$. ¿Radio y diámetro de $N_n, K_n, C_n, P_n, S_n, W_n$?

♣ Resp. parcial. El axioma (1): $\forall v \in V(G) : d(v, v) = 0$, pues el camino trivial v de longitud 0; por otra parte, si para $vu, v \in V(G)$ es $d(u, v) = 0$, es que hay un camino de longitud 0 entre u y v , pero el único camino de longitud 0 es el trivial, de modo que $u = v$. El axioma (2): $\forall u, v \in V(G) : d(u, v) = d(v, u)$, se cumple pues $d(u, v)$ es la longitud de un $u - v$ camino geodésico, que es también un $v - u$ camino geodésico, y entonces $d(v, u) = d(uv)$. El axioma (3): $\forall u, v, w \in V(G) : d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ se cumple pues un $u - v$ camino de longitud $d(u, v)$ junto a un $v - w$ camino de longitud $d(v, w)$ forma un $u - w$ camino de longitud $l = d(u, v) + d(v, w)$, y como $d(u, w)$ es la longitud mínima entre todos los $u - w$ caminos, en particular, deberá ser a lo sumo l , pero eso es precisamente que $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$. Ahora, $r(G) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d(u, v) : u, v \in V(G)\} \leq \max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\} \stackrel{\text{def}}{=} \phi(G)$, lo que prueba que $r(G) \leq \phi(G)$, resta probar que $\phi(G) \leq 2r(G)$: deben existir u, w tales que $d(u, w) = \phi(G)$ y también un vértice $v \in C(G)$, y dado que G es conexo, hay un $u - v$ camino y un $v - w$ camino, luego por el axioma (3) es $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$, pero por definición de centro, $d(u, v) \leq r(G), d(v, w) \leq r(G)$, y entonces queda $\phi(G) = d(u, w) \leq r(G) + r(G) = 2r(G)$. Algunos radios y diámetros: $r(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor, \phi(P_n) = n - 1, r(S_n) = 1, \phi(S_n) = 2, n = 1, 2, \dots$,

11. (–) *Handshaking lemma*. Probar el resultado conocido como HSL (*handshaking lemma*), esto es que en cualquier grafo $G(m, n)$ se cumple que $\sum_{k=1}^n d_G(v_k) = 2m$ (la suma de los grados de todos los vértices iguala al doble del tamaño) y dos corolarios: (1) la cantidad de vértices de grado impar es par, (2) $\forall q \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n d_G^q(v_k)$ es par. ¿Cuántos vértices puede tener un grafo conexo simple k -regular de tamaño 22 ?

♣ Resp. Parcial. Cada arista $e = uv$ es contada tanto en el grado de u como en el de v (también si e es un lazo con $u = v$); de este modo, cada arista contribuye en dos unidades a la suma de los grados de los vértices sobre los que incide, y entonces las m aristas contribuyen con $2m$ a la suma de todos los vértices del grafo. En particular, la suma entonces debe ser par. Si S, T son, respectivamente, los conjuntos de vértices de grado impar y par, y dado que $S + T = V(G), ST = \emptyset$, es:

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in S} d_G(v) + \underbrace{\sum_{v \in T} d_G(v)}_{\text{par}} = \underbrace{2m}_{\text{par}}$$

De esta expresión resulta que $\sum_{v \in S} d_G(v)$ debe ser par, y como por definición $d_G(v), v \in S$ es impar, resulta que necesariamente $|S|$ es par. Para la última parte (sabido que las potencias de un par (impar) son pares (impares), lo que puede probarse por inducción), la suma $\sum_{k=1}^n d_G^q(v_k)$ tiene un número par de sumandos impares (y un número cualquiera de sumandos pares), de modo que debe ser par.

Si el grafo k -regular tiene $m = 22$ aristas, entonces debe ser $kn = 44$, de modo que $n|44$, esto es alguno de los valores $1, 2, 4, 11, 22, 44$. Pero n no puede tomar los valores $1, 2, 4$ pues excede la cantidad máxima de aristas que puede admitir un grafo simple de esos órdenes (respectivamente $0, 1, 6$), luego solo cabe analizar los tres valores restantes. El valor $n = 44$ tampoco es posible, pues exigiría $k = 1$, lo que obliga a 22 pares de vértices conectados por sendas aristas sin conexión posible entre pares, por lo que no es conexo. Si $n = 22$ debe ser $k = 2$, lo que es posible con C_{22} , que es 2-regular y conexo. Finalmente, también es posible $n = 11$ (¡probarlo!). Así que n solo puede tomar el valor 11 o el valor 22.

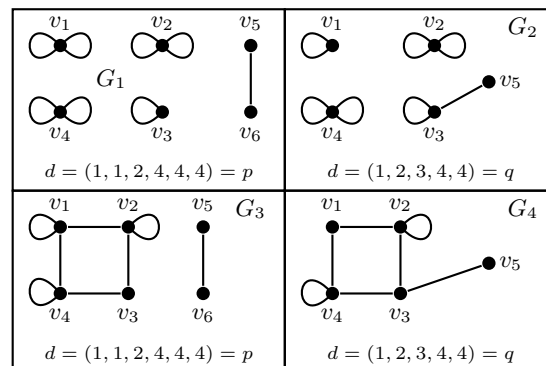
Observación. Como $\delta(G) \leq \bar{d}(G) \leq \Delta(G)$ siendo $\bar{d}(G) = (1/n(G)) \sum_1^{n(G)} d_G(v_k) = 2m(G)/n(G)$, resulta que en cualquier grafo (simple o no) debe ser $\delta(G) \leq \lfloor 2m(G)/n(G) \rfloor \leq \lceil 2m(G)/n(G) \rceil \leq \Delta(G)$. En particular, si el grafo es simple, el máximo grado para un vértice es $n(G) - 1$, y se reencuentra la expresión $m(G) \leq n(G)(n(G) - 1)/2$.

12. (+) *Sucesión gráfica*. La sucesión no decreciente de números naturales $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ se llama *sucesión gráfica* si es la sucesión de grados de algún grafo simple $G(n, m)$. Analizar si es gráfica cada una de las siguientes sucesiones: (a) $p = (1, 1, 2, 4, 4, 4)$; (b) $q = (1, 2, 3, 4, 4)$. Si no fueran gráficas, proponer sendos grafos cuyas sucesiones de grados sean las dadas. Probar, ahora en general, que la paridad de la sucesión es suficiente para que exista algún grafo que la tenga por su sucesión de grados. Si fuera posible, dar grafos no isomorfos que ajusten las sucesiones p y q . ¿Existe una sucesión gráfica sin elementos repetidos?

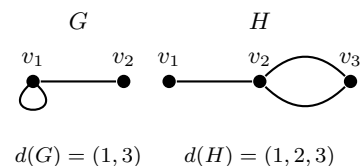
♣ Resp. Parcial. Ambas cumplen la condición *necesaria* de que la suma es par. (a) d no es gráfica. Suponiendo que exista el grafo simple $G = (V(G), E(G))$ tal que $d(G) = p$, y sea $S \subset V(G)$ el conjunto formado por los tres vértices de grado 4, y como G es simple, a lo sumo son tres las aristas de $E(G)$ que pueden tener por extremos un par de vértices en S , esto es, cada vértice de S debe tener al menos dos aristas conectando con vértices en $V(G) - S$. Pero como $|S| = 3$, hay al menos 6 aristas entre S y

$V(G) - S$. Pero la suma de los grados de los vértices de $V(G) - S$ es $1 + 1 + 2 = 4$, que es menor que 6. Esta contradicción prueba que d no es gráfica. (b) p no es gráfica, otra vez, suponiendo que $q = d(G)$ para algún grafo simple G de 5 vértices y 7 aristas con dos vértices de grado 4 conectados, cada uno de ellos, con los tres restantes: pero entonces tales tres vértices deben tener grado al menos 2, lo que no sucede, pues uno de ellos tiene grado 1. La contradicción prueba que p no es gráfica. Estos dos ejemplos muestran que la paridad de la sucesión *no es suficiente* para asegurar que sea gráfica.

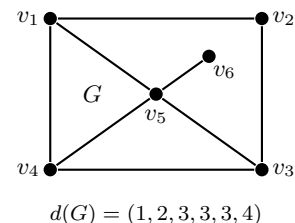
Cuando se elimina la restricción de que el grafo sea simple, ya pueden construirse grafos que ajusten cada sucesión de grados. Para cualquier $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, la condición necesaria (naturales de suma par) es también ahora *suficiente*, si se permiten lazos. Prueba: se conecta con una arista un apareamiento de vértices de grado impar (lo que siempre es posible porque su cantidad es par), y los grados remanentes (ya todos pares) se completan con $\lfloor p_k/2 \rfloor$ lazos en cada vértice $v_k, k = 1, 2, \dots, n$. La prueba es constructiva, ya que no solo prueba la existencia, sino que a la vez brinda un método para obtener un tal grafo: aplicado ese método a las sucesiones dadas, resultan los grafos G_1 y G_2 de la figura, que no son únicos, como lo prueban los grafos G_3 y G_4 , no isomorfos (respectivamente) a los anteriores.



Si el grafo es trivial, $d = (0)$ no repite elementos; en todo otro caso, la sucesión gráfica, tiene al menos dos elementos iguales, dado que el grado de un vértice debe ser algún número del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, de modo que la única sucesión que no repite grados es, precisamente, $d = (0, 1, 2, \dots, n - 1)$, lo que indica que un vértice es *dominante* (el de grado $n - 1$) que conecta con *todos los restantes*, lo que hace imposible la presencia de otro vértice *aislado* (de grado 0). *Observación.* Si se retira la restricción de que el grafo sea simple, ya pueden proponerse grafos con lazos (como G) o aristas múltiples (como H) cuya sucesión de grados no repite elementos.

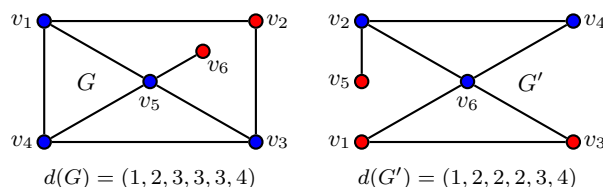


13. *Complemento.* Definir *complemento (complement)* G' del grafo simple $G = (V(G), E(G))$ de orden $n(G)$ y tamaño $m(G)$, y obtenerlo para el grafo de la figura. Probar que es imposible que G y G' sean ambos desconexos. Probar que las sucesiones gráficas de G y G' (ordenadas inversamente) suman la sucesión gráfica del completo $K_{n(G)}$. Probar que dos grafos son isomorfos sii sus complementos son isomorfos y que un grafo es regular sii su complemento es regular. ¿Cada vértice central de G es vértice periférico de G' ? Determinar *todos los paths*, estrellas y ciclos autocomplementarios.



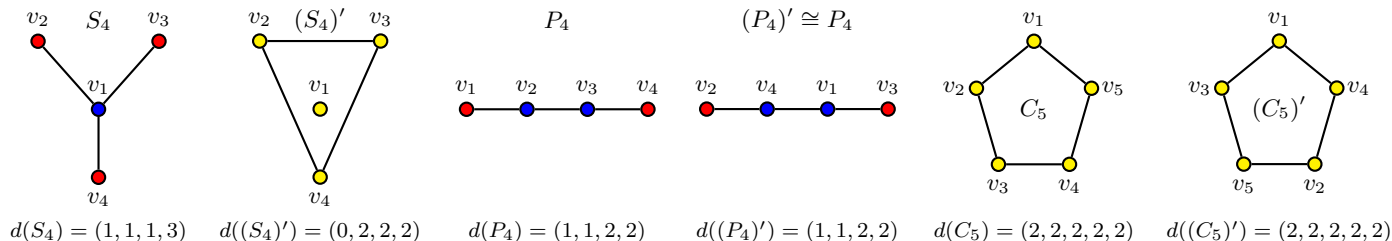
♣ Resp. Parcial. $G' = (V(G'), E(G'))$ es el grafo simple con $V(G') = V(G)$ y $uv \in E(G')$ sii $uv \notin E(G)$ (dos vértices son adyacentes en G' sii no son adyacentes en G). Como $E(G)E(G') = \emptyset, E(G) + E(G') = E(K_{n(G)})$, es $m(G) + m(G') = m(K_{n(G)}) = \binom{n}{2}$ y además $\forall v \in V(G) : d_G(v) + d_{G'}(v) = n(G)$. Esta última igualdad prueba que $d(G) + d(G') = d(K_{n(G)}) - 1$ (sobrentendido la sucesión del complemento ordenada no creciente). La imposibilidad de que tanto G como G' sean no conexos: suponiendo G no conexo, se debe probar que hay un camino entre cualquier par de vértices u y v de G' . Si en G los vértices u y v se hallan en distintas componentes conexas, entonces no hay una arista uv en G , de modo que en G' (por definición de G') se tiene el camino uv . Si, por el contrario, u y v se encuentran en la misma componente conexa de G , existe un vértice w en otra componente (pues G es no conexo), y por lo tanto no pertenecen a G las aristas uw ni vw , pero entonces, (otra vez, por definición de G') esas aristas están en G' , luego existe el camino uwv que conecta u con v en G' , de modo que G' es conexo (de hecho, su diámetro es a lo sumo 2). Un isomorfismo entre G y H (simples) es una función biyectiva $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserva adyacencias en G (y no adyacencias, por consiguiente), luego la misma función θ preserva las no adyacencias (y adyacencias) en G' . Si G es k -regular, como $d(G) + d(G') = d(K_n(G)) - 1$, su complemento resultará $n - 1 - k$ regular.

En la figura se han distinguido con colores los vértices del centro (azul) y de la periferia (rojo), y bien puede apreciarse que no se verifica el intercambio de centro y periferia: por ejemplo, el vértice v_4 pertenece tanto al centro de G como al centro de G' . La cintura es la misma (3) para ambos, no así su circunferencia $\text{cir}(G) = 4 \neq 3 = \text{cir}(G')$.



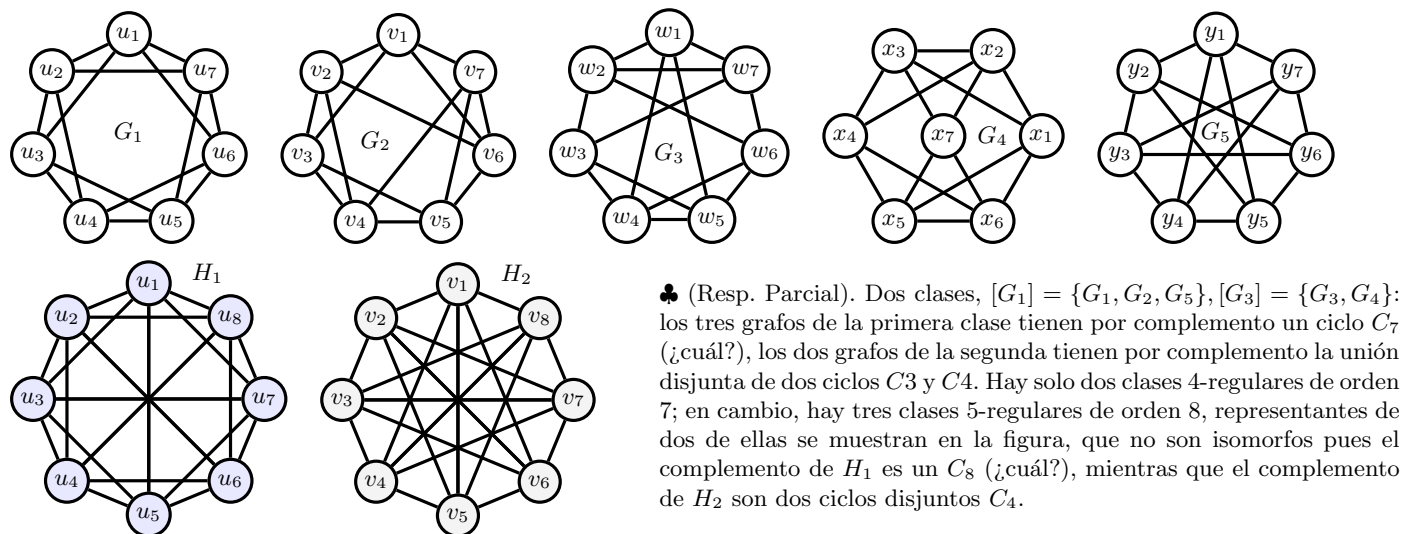
Si G es isomorfo a su complemento G' deben tener el mismo tamaño $m(G) = m(G')$ y entre ambos sumar el de K_n , que es $m(K_n) = n(n - 1)/2$, debiendo ser entonces $m(G) = m(G') = n(n - 1)/4$ y siendo esto un entero y no siendo los números n y $n - 1$ *ambos* pares, debe ser uno de ellos divisible en 4, esto es que o bien $n(G) \equiv 0 \pmod{4}$ o $n(G) \equiv 1 \pmod{4}$. La recíproca es falsa, basta considerar, por ejemplo, C_4 , cuyo número de vértices es múltiplo de 4 y sin embargo no es autocomplementario (pues

C'_4 tiene dos aristas, mientras que C_4 tiene cuatro aristas). El grafo trivial ($K_1 = P_1 = N_1$) es (trivialmente) autocomplementario; ahora para $n > 1$ (se simplifica la notación $n(G) = n$ si no hay confusión posible), si P_n (o S_n) es autocomplementario, debe ser $m(P_n) = m(S_n) = n - 1 = n(n - 1)/4$ de donde necesariamente $n = 4$, luego los únicos *paths* o estrellas que *pueden* ser autocomplementarios son P_4 y S_4 ; en cuanto a C_n , debe ser $m(C_n) = n = n(n - 1)/4$ de donde $n = 5$ (recordar, el grafo vacío con $n = 0$ fuera de análisis), de donde el único ciclo que *puede* ser autocomplementario es C_5 .

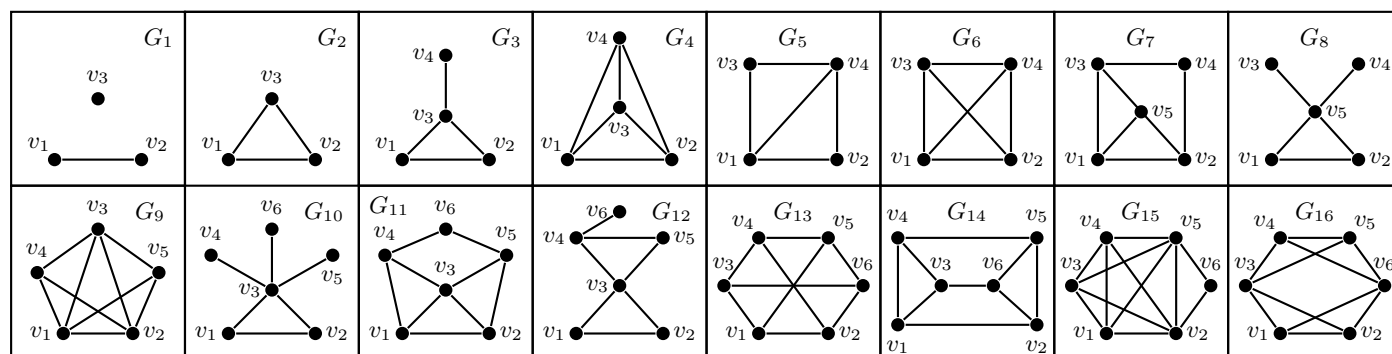


Como puede verse en la figura, claramente la estrella S_4 no es autocomplementaria (se podía descartarla sin representarla: el vértice de grado 3 necesariamente tiene grado 0 en el complemento, que deja de ser conexo), mientras que P_4 y C_5 son, efectivamente autocomplementarios. De hecho son dos de los tres no triviales autocomplementarios más pequeños (el otro es el conocido *toro* (*bull*)). Los vértices amarillos son tanto centrales como periféricos.

14. (+) *Clases de equivalencia.* Dados los grafos G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 , determinar cuántas clases de equivalencia representan por la relación de equivalencia $G \cong H$ si G es isomorfo a H , explicitando los isomorfismos entre los grafos situados en una misma clase y probando la imposibilidad de establecerlos entre los que se hallan en clases distintas. ¿Cuántas clases de equivalencia hay entre los grafos simples 4-regulares de orden 7? ¿Cuántas entre los grafos simples 5-regulares de orden 8? Obtenerlas y graficar sendos representantes.



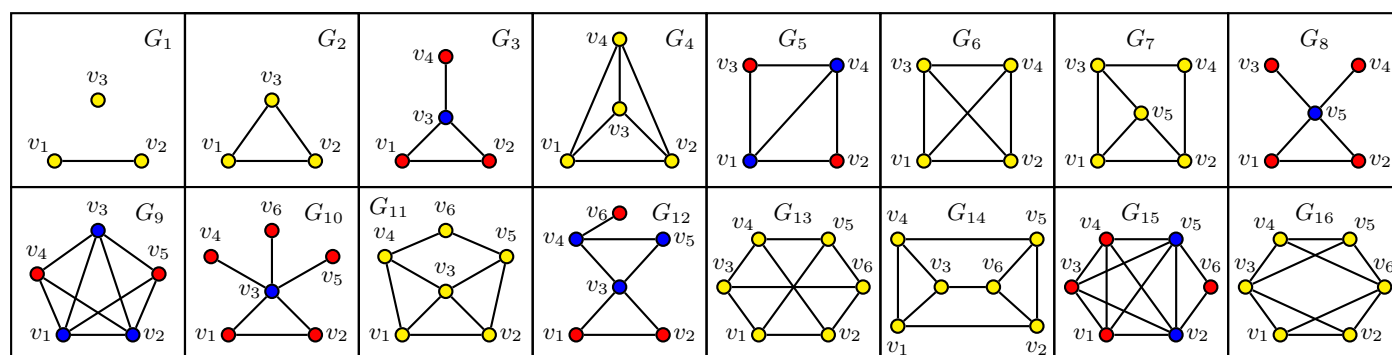
15. (-) *Invariantes.* Para cada grafo simple (*graph*) $G = (V(G), E(G))$ determinar al menos 10 invariantes, incluyendo entre ellos el centro y la periferia. Determinar además los grafos que resulten isomorfos y los autocomplementarios. Consignar cuáles son regulares.



♣ (Resp. Parcial). La siguiente tabla muestra algunos invariantes ante isomorfismos, que se obtienen directamente por simple inspección o efectuando cuentas sencillas. El cálculo del grado medio $\bar{d}(G)$ se simplifica mucho con el HSL, ya que siendo la suma de los grados el doble del tamaño, es $\bar{d}(G) = 2m(G)/n(G)$. Los grafos G_4 y G_6 son isomorfos ¡son iguales!, y no hay otros isomorfos (¿por qué no lo son G_{13} y G_{14} ?). Hay cinco grafos regulares: uno 2-regular (G_2) y cuatro 3-regular (G_4, G_6, G_{13}, G_{14}). Son completos $G_2, G_4 = G_6$.

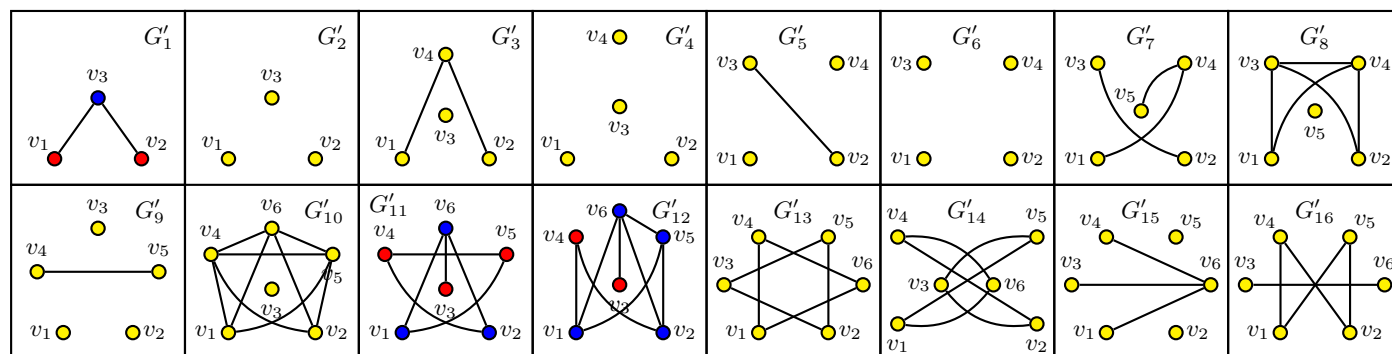
En la figura que sigue a la tabla, por otra parte, se sigue el código de colores ya utilizado: son amarillos los vértices v que están en la intersección del centro y periferia (esto es, $v \in C(G) \cap P(G)$), azules los que solo son centrales ($v \in C(G) - P(G)$), rojos los que solo son periféricos ($v \in P(G) - C(G)$). No hay, en estos grafos, ningún vértice $v \in V(G) : v \notin (V(G) + P(G))'$ (¿puede haber tales vértices en el complemento?)

Grafo	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}	G_{12}	G_{13}	G_{14}	G_{15}	G_{16}
$n(G)$	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6
$m(G)$	1	3	4	6	5	6	7	5	9	6	9	7	9	9	12	10
$\delta(G)$	0	2	1	3	2	3	2	1	3	1	2	1	3	3	2	3
$\bar{d}(G)$	2/3	2	2	3	5/2	3	14/5	2	18/5	2	3	7/3	3	3	4	10/3
$\Delta(G)$	1	2	3	3	3	3	3	4	4	5	4	4	3	3	5	4
$r(G)$	∞	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	2	1	2
$\phi(G)$	∞	1	2	1	2	1	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
$g(G)$	∞	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3
$\text{cir}(G)$	∞	3	3	3	4	4	4	3	5	3	5	3	6	6	6	6



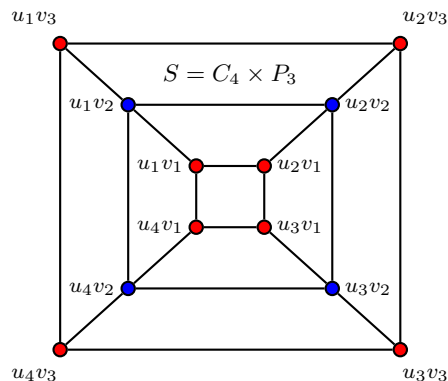
16. (-) Complemento. Graficar, para cada uno de los 16 grafos del ejercicio anterior, su grafo complementario G' , mostrar que tanto G como G' pueden ser conexos.

♣ Resp. Parcial. Tanto G_{12} como G'_{12} son conexos; por otra parte, para G_{12} resultó (ordenado no decreciente) $d(G_{12}) = (1, 2, 2, 2, 3, 4)$, mientras que para G'_{12} es $d(G'_{12}) = (4, 3, 3, 3, 2, 1)$, siendo así $d(G_{12}) + d(G'_{12}) = (5, 5, 5, 5, 5, 5) = d(K_6)$. Lo mismo se ve en, por ejemplo, G_{13} , para el que $d(G_{13}) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$, con $d(G'_{13}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$. En las figuras se muestran los complementarios. Se advierte que el isomorfismo original entre G_4, G_6 se preserva en sus complementarios G'_4, G'_6 . También se observa que el grafo 2-regular G_2 tiene un complemento G'_2 que es 0-regular, que los grafos 4-regular G_4, G_6 tienen complementos 0-regular G'_4, G'_6 y que los grafos 3-regular G_{13}, G_{14} tienen complementos 2-regular G'_{13}, G'_{14} (en general, si un grafo de orden n es k -regular, su complemento es $n - k - 1$ regular como se probó anteriormente).



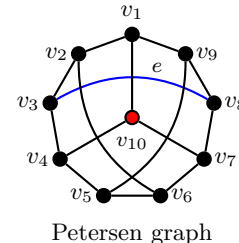
17. (+) *Tres operaciones binarias básicas.* α Dados los grafos simples $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$ se define la *unión disjunta* (*disjoint union*) $G + H = (V(G + H), E(G + H)), V(G + H) = V(G) + V(H), E(G + H) = E(G) + E(H)$, el *ensamble* (*join*) $G * H = (V(G * H), E(G * H)), V(G * H) = V(G) + V(H), E(G * H) = E(G) + E(H) + \{uv : u \in G, v \in H\}$ y el *producto cartesiano* (*cartesian product*) $G \times H = (V(G \times H), E(G \times H)), V(G \times H) = V(G) \times V(H), (u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E(G \times H)$ sii $(u_1 = v_1, u_2 v_2 \in E(H))$ o $(u_2 = v_2, u_1 v_1 \in E(V))$. Determinar el orden y tamaño de cada uno y en particular representar $P_2 + P_3, P_2 * P_3, P_2 \times P_3$. ¿Qué es $K_1 * C_n$? ¿Qué es $K_2 * K_2$? ¿Qué operación produce la estrella S_n ? Representar el grafo $S = C_4 \times P_3$, determinar su centro y periferia y comprobar las relaciones de orden y tamaño. Escribir $*$ mediante sumas y complementos.

♣ Resp. Parcial. De las mismas definiciones es inmediato que $n(G + H) = n(G) + n(H), m(G + H) = m(G) + m(H), n(G * H) = n(G) + n(H), m(G * H) = m(G) + m(H) + n(G)n(H), n(G \times H) = n(G)n(H), m(G \times H) = n(G)m(H) + n(H)m(G)$. En cuanto a $P_2 + P_3$, es el grafo desconexo con dos componentes conexas: P_2 y P_3 , mientras que $P_2 \times P_3$ es la cuadrícula (*grilla* (*grid*)) que se designa como $G_{2,3}$. En cuanto a $K_1 * C_n$, es la rueda W_{n+1} , mientras que $K_2 * K_2$ es K_4 . La estrella es $S_n = N_1 * N_{n-1}$. La representación del producto cartesiano $C_4 \times P_3$, con $V(C_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ tiene simplificada la notación de los pares ordenados que representan los vértices: se ha puesto $u_i v_j$ en lugar de (u_i, v_j) . Puede verse que $S(12, 20)$, verificándose $12 = 4 \times 3, 20 = 4 \times 2 + 3 \times 4$. Los vértices centrales están indicados en color azul (de excentricidad 3), rojo los periféricos (de excentricidad 4). Considerando la definición se llega a $G * H = (G' + H)'$.

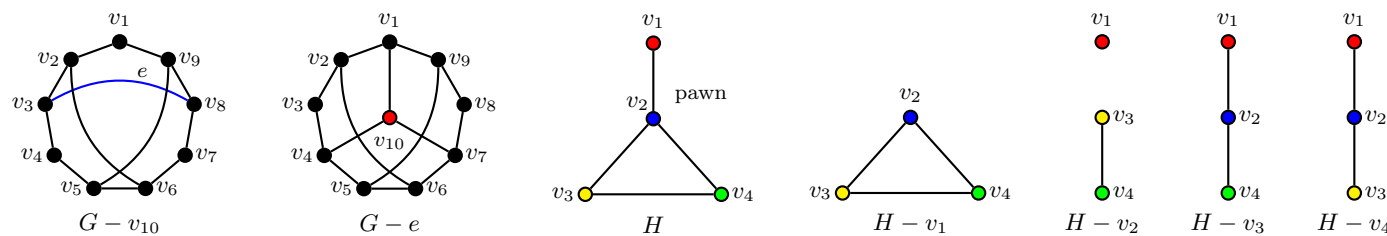


Observación. El producto cartesiano entre grafos es solo uno de los 256 productos que pueden definirse (según cómo se definan vértices y adyacencias); la suma (unión disjunta) sobrentiende que los vértices son conjuntos disjuntos (tanto si son etiquetados o no). Las operaciones se entienden entre clases de grafos representantes salvo isomorfismos. Para el producto cartesiano por sí mismo no se utiliza la notación de “cuadrado”, que se reserva para la potenciación de grafos (a veces suele escribirse $G \times G = G^{\times 2}$). El grafo $C_4 \times P_3 = W_{4,3}$ es de la familia *web graph* $W_{p,q} = C_p \times P_q$ consistente en q copias concéntricas de C_p con los vértices correspondientes conectados por aristas formando la telaraña; en el caso particular de $q = 2$, el grafo $C_p \times P_2$ se llama *p-prisma* (*p-prism*), para $p = 3$ se llama *prisma triangular*, para $p = 4$ el *cubo*, $p = 5$ el *prisma pentagonal*...

18. (-) *Operaciones de eliminación y decks.* Dado el grafo $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, y un vértice $v \in V(G)$ (una arista $e \in E(G)$), definir las operaciones *eliminación de vértice* (*vertex deletion*) y *eliminación de arista* (*edge deletion*) y sus efectos sobre las matrices de adyacencia e incidencia. Ilustrar estas operaciones en el grafo G de Petersen. Definir *deck* $\mathcal{D}(G)$ y *edge-deck* $\mathcal{E}(G)$ y hallar el *deck* del grafo simple H con $d(H) = (1, 2, 2, 3)$ (grafo llamado *peón* (*pawn*)). El proceso inverso, de hallar un G a partir de $\mathcal{D}(G)$ se llama *reconstrucción* (*reconstruction*) y si toda reconstrucción devuelve un grafo isomorfo a G , se dice que G es *reconstruible* (*reconstructible*): mostrar que K_2 no lo es.



♣ Resp. Parcial. El subgrafo $G - v$ se obtiene eliminando de G el vértice v junto con todas las aristas incidentes en v , mientras que $G - e$ se obtiene eliminando e , dejando sin alterar el conjunto $V(G)$. Precisando: llamando S al conjunto de aristas que incide en v es $V(G - v) = V(G) - \{v\}, E(G - v) = E(G) - S$, siendo ψ_{G-v} la restricción de ψ_G a $E(G - v)$; por otra parte, $V(G - e) = V(G), E(G - e) = E(G) - \{e\}$, con ψ_{G-e} la restricción de ψ_G a $E(G - e)$. Los cuatro últimos grafos de la figura constituyen $\mathcal{D}(H) = \{C_3, K_1 + P_2, P_3, P_3\}$ el *deck* de H . Por otra parte, K_2 no es reconstruible, ver que $\mathcal{D}(K_2) \cong \mathcal{D}(N_2)$, no siendo N_2 isomorfo a K_2 . En el grafo de Petersen es $\hat{\iota} G - v_{10} \cong G - v_1$?

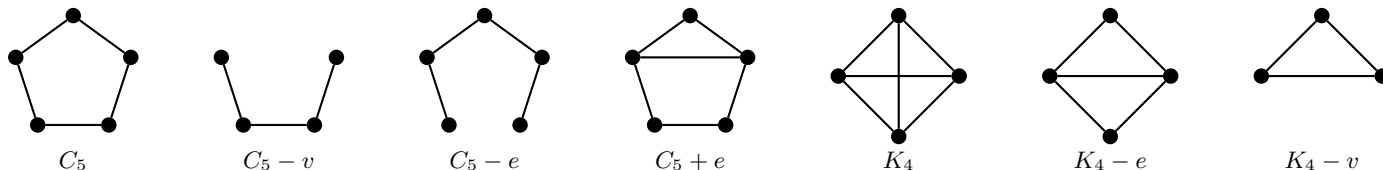


Si se considera la numeración de vértices v_1, v_2, \dots, v_n , la eliminación de la arista $v_i v_j$ elimina la correspondiente columna de la matriz de incidencia, mientras que disminuye en uno el valor original de la matriz de adyacencia en las posiciones simétricas (i, j) y (j, i) . La eliminación del vértice v_i elimina la fila i de la matriz de incidencia a la vez que las columnas de cada arista incidente en v_i . En la matriz de adyacencia elimina la fila i y la columna i sin afectar al resto de la matriz de adyacencia original. Para el caso de grafos simples puede decirse que $n(G - v) = n(G) - 1, m(G - v) = m(G) - d(v), n(G - e) = n(G), m(G - e) = m(G) - 1$.

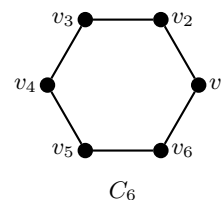
19. (-) Dado el grafo G con vértices no adyacentes u, v , se define el grafo $G + e$, donde $e = uv$ siendo $V(G + e) = V(G)$, $E(G + e) = E(G) + \{e\}$. Mostrar que las operaciones de eliminación (suma) de vértice o arista en grafos tales como C_5, K_4 es independiente del vértice o arista que se considere (y en tal caso, se escribe, por ejemplo, $K_4 - e$ para designar al único (salvo isomorfismo) grafo *diamante* (*diamond*) que resulta, sin necesidad de indentificar la arista eliminada).

♣ Resp. Parcial. La figura muestra las operaciones pedidas; asegurarse de ver que, por ejemplo, *cualquiera* sea e , el grafo $C_5 + e$ es isomorfo al representado, de mismo modo que cualquiera sea v es $K_4 - v$ isomorfo a C_3 y que $C_5 - e \cong P_5, C_5 - v \cong P_4$, etcétera. Observar que no sucede lo mismo con los vértices del peón.

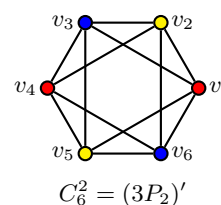
Observación. En lugar de escribir $C_5 - e \cong P_5, C_5 - v \cong P_4$ suele escribirse $C_5 - e = P_5, C_5 - v = P_4$, sobrentendiéndose la igualdad salvo isomorfismo.



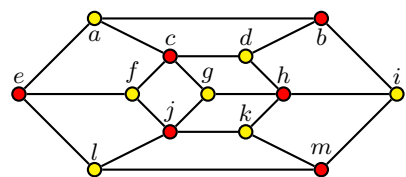
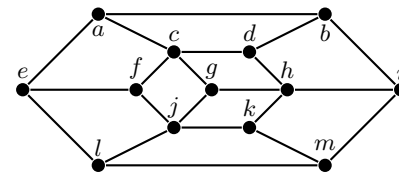
20. (-) *Potencias de un grafo.* Definir la *potencia* k -ésima G^k del grafo simple G , para $k \in \mathbb{N}$. Determinar las potencias del grafo C_6 de la figura; escribir C_6^2 utilizando sumas y complementos. Determinar el cuadrado de C_5 y de P_4 . Determinar el diámetro del cuadrado de P_n . ¿Cuál es la mínima potencia k para la que cualquier grafo conexo G de orden n cumpla $G^k = K_n$. ¿Se cumple que $(G^p)^q = G^{p+q}$? Si u, v son vértices de G de orden n que se hallan a distancia a , ¿a qué distancia se encuentran en G^2 ? ¿Y a qué distancia se encuentran en G^k , para $k = 1, 2, \dots$? ¿Es $(G + H)^2 = G^2 + H^2$?



♣ Resp. Parcial. El grafo G^k tiene $V(G^k) = V(G)$, $uv \in E(G^k)$ sii $d_G(u, v) \leq k, u \neq v$; en particular $G^1 = G$. Resulta que $C_6^2 = (3P_2)'$, $C_5^2 = K_5, P_4^2 = K_5, \phi(P_n^2) = \lfloor n/2 \rfloor$. La mínima potencia (probarlo) es $\phi(G)$. Es falso (probarlo) que $(G^p)^q = G^{p+q}$ (en cambio, sí vale $(G^p)^q = G^{pq}$). Considerar primero $k = 2$ y ver que $d_{G^2}(u, v) = \lceil a/2 \rceil$, y luego probar que $d_{G^k}(u, v) = \lceil a/k \rceil$. El grafo C_6^2 es de la familia *p-cocktail graph* (los $2p = 6$ vértices representan $p = 3$ parejas en un *cocktail*, las adyacencias cuentan los estrechamientos de manos, que se producen entre todos, excepto con la propia pareja: se identifica en la figura con el mismo color a cada pareja). $C_6^k = K_6, k \geq 3$. Sobrentendiendo unión disjunta, vale la igualdad $(G + H)^2 = G^2 + H^2$ (en otro caso, solo vale la inclusión $(G + H)^2 \supset G^2 + H^2$).



21. (+) *Bipartito, k-partito.* Definir *grafo bipartito* $G(V_1, V_2)$ y *bipartito completo* $K_{p,q}$, mostrar que el grafo de la figura es bipartito y dar cuatro invariantes suyos; graficar el bipartito completo $K_{3,3}$. Probar que un grafo es bipartito sii carece de ciclos impares. Definir *grafo k-partito* y *k-partito completo* K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , graficar el tripartito $K_{2,2,2}$, el *libro triangular* (*triangular book*) triangular de cinco páginas $K_{1,1,5}$ y el *3-libro* (*book*). Definir las *coronas* (*crown graphs*) determinando su cintura y graficar la 8-corona. Analizar el tipo de k -partición en un grafo de Petersen, en un *web graph* y en el *cubo* (*cube*) Q_p .



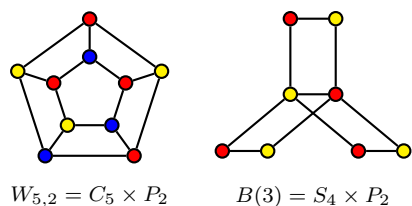
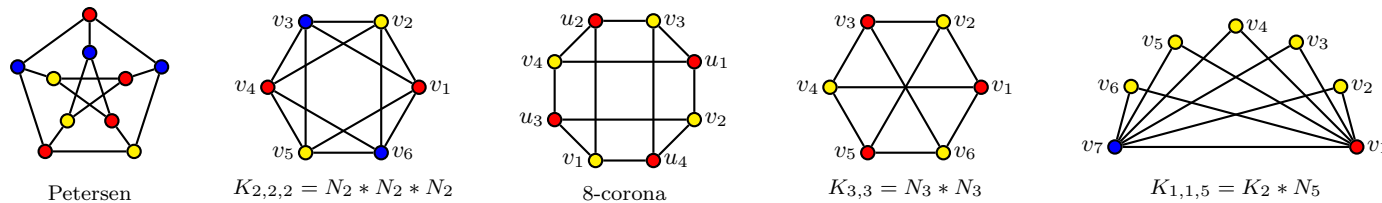
$r(G) = 3, \phi(G) = 4, g(G) = 4, \text{cir}(G) = 12$

♣ Resp. Parcial. Se dice que $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ es *bipartito* (*bipartite graph=bigraph*) si existen dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 tales que $V(G) = V_1 \cup V_2$ y toda arista de $E(G)$ une un vértice de V_1 con un vértice de V_2 . El grafo es *bipartito completo* (*complete bipartite*) si, siendo bipartito, para todo $u \in V_1, v \in V_2$ existe $e \in E(G) : \psi_G(e) = \{u, v\}$, y si $p = |V_1|, q = |V_2|$, se denota con $K_{p,q}$. En general, se escribe $G(V_1, V_2)$ y se dice que V_1, V_2 es una *bipartición* (*bipartition*) de $V(G)$, siendo V_1, V_2 sus *partes* (*parts*). El grafo dado es bipartito $G(V_1, V_2), V_1 = \{a, d, f, g, i, k, l\}$ (amarillos), $V_2 = \{b, c, e, h, j, m\}$ (rojos), cumpliendo cada arista del grafo tener por extremos vértices no pertenecientes a un mismo conjunto de la partición.

El grafo G es *k-partito* (*k-partite*) si $V(G)$ puede particionarse en k subconjuntos (partes) V_1, V_2, \dots, V_k de modo que ninguna arista tenga sus extremos en la misma parte; es *k-partito completo* si, siendo k -partito, dos cualesquiera vértices de partes distintas son adyacentes, y se escribe K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , con $n_i = |V_i|, i = 1, 2, \dots, k$. De estas definiciones se tiene de manera inmediata que $K_{1,1} = P_2, K_{1,n} = S_{n+1}, K_{2,2} = C_4$.

Si $G(V_1, V_2)$ es bipartito, cualquier ciclo $v_1 v_2 \dots v_p v_1$, con $v_1 \in V_1$ debe alternar vértices en cada parte (de modo que los subíndices impares están en V_1 , los subíndices pares en V_2), y entonces la longitud del ciclo es par, al haber la misma cantidad de vértices en cada parte. Para la recíproca, se supone que G es conexo y carece de ciclos impares, y tomando un cualquier $v_1 \in V(G)$,

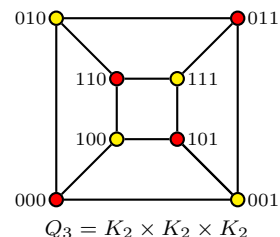
definiendo $V_1 = \{x \in V(G) : d(v_1, x) \text{ es par}\}$, $V_2 = V(G) - V_1$, se tiene que $V_1 V_2 = \emptyset$, $V_1 + V_2 = V(G)$ y se quiere probar que toda arista une un vértice de V_1 con un vértice de V_2 ; si se supone lo contrario, que existe una arista uv con u y v en V_1 , por definición de V_1 hay un $v_1 - u$ path de longitud par y un $v - v_1$ path de longitud par, por lo que hay un ciclo $v_1 - uv - v_1$ de longitud impar!, contradicción que prueba que no puede existir una arista con extremos en V_1 (Si G no fuera conexo, vale esta misma prueba, aplicada a cada componente conexa de G , lo que completa la prueba de la recíproca, considerando que un grafo es bipartito sii cada componente es bipartita).



El libro triangular (*triangular book*) de p páginas triangulares es el tripartito $K_{1,1,p} = K_2 * N_p$ (las páginas comparten una arista, el “lomo” del libro); una $2p$ -corona es un grafo bipartito $G(U_1, V_2)$ de $2p$ vértices, $U_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$, $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ con $E(G) = \{u_i v_j, i \neq j\}$. El p -book de p páginas es el grafo bipartito de $2(p + 1)$ vértices definido por $B(p) = S_{p+1} \times P_2$ (aquí las páginas que comparten una arista son rectangulares). El grafo de Petersen es tripartito (ver figura), el *web graph* $W_{p,q} = C_p \times P_q$ es bipartito (tripartito) con p par (impar): probar estas afirmaciones.

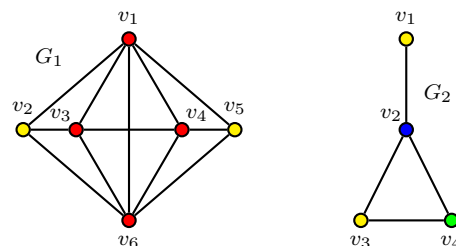
El cubo (*cube*) $Q_p = K_2^{\times p}$ es el grafo simple cuyos vértices son las cadenas binarias de longitud p que son adyacentes sii su distancia de Hamming es 1. De esta definición resulta (¡probarlo!) que es un grafo simple conexo bipartito p -regular de 2^p vértices, $p2^{p-1}$ aristas, de radio y diámetro p , cintura 4 y circunferencia 2^p (con $p \geq 2$). Alternativamente, puede definirse Q_p como el grafo que tiene por vértices los subconjuntos de un conjunto de p elementos, siendo dos vértices adyacentes sii la diferencia simétrica de los correspondientes conjuntos es un conjunto unitario (probar que esta definición produce un grafo isomorfo al de la primera definición).

La prueba de que es bipartito: un vértice es par o impar según lo sea la cantidad de 1 de su etiqueta (en la figura, los rojos son pares, los amarillos impares), y llamando V_1, V_2 a los conjuntos que los agrupan es $V(Q_p) = V_1 + V_2$, $V_1 V_2 = \emptyset$; cada arista de Q_p tiene (por definición) un vértice par y un vértice impar por extremos, de modo que ninguna arista tiene por extremos la misma parte, lo que concluye la prueba de que Q_p es un *bigraph* $G(V_1, V_2)$. Como la cadena que etiqueta los vértices es binaria de longitud p , resulta $n(Q_p) = 2^p$; además $\forall v \in V(Q_p) : |\Gamma(v)| = p$ (cada vecino de v se obtiene permutando uno de los p dígitos), luego es p -regular, y entonces la suma de sus grados es $p2^p = 2m(Q_p)$, de donde $m(Q_p) = p2^{p-1}$.



Observación. El cubo Q_k es un subgrafo de Q_p , para $k = 0, 1, \dots, p$; por ejemplo, para el Q_3 hay ocho (los vértices) subgrafos Q_0 , doce (las aristas) subgrafos Q_1 , seis (los C_4) subgrafos Q_2 , uno (el mismo Q_3) subgrafo Q_3 . En general, hay $\binom{p}{k} 2^{p-k}$ subgrafos Q_k de Q_p . ¿Cuántos cubos son subgrafos de un p -cubo?

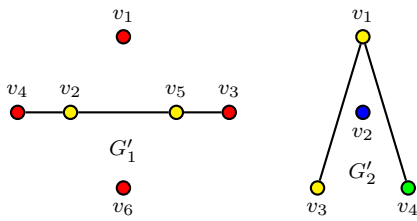
22. *Clique, anticlique.* Definir *clan (clique)*, *conjunto independiente (anticlique)*, *número de clique*, *número de independencia* de un grafo $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ y determinarlos para cada uno de los grafos de la figura y de sus correspondientes complementos. El número de clique se designa con $\omega(G)$, el número de independencia con $\alpha(G)$. Calcular α y ω para los grafos: $K_n, P_n, C_n, S_n, W_n, N_n, K_{p,q}, P_p \times P_p, Q_p, P_2 \times C_p$, Petersen.



♣ Resp. Parcial. $S \subset V(G)$ es un *clan (clique)* de G sii dos cualesquiera vértices de S son vecinos (y entonces el subgrafo inducido por S es un completo); $S \subset V(G)$ es un *conjunto independiente (anticlique)* de G sii dos cualesquiera vértices de S no son vecinos. Un clique (anticlique) es maximal si no es subconjunto propio de otro clique (anticlique); es máximo si no existe otro clique (anticlique) H tal que $|H| > |S|$. El cardinal de un clique (anticlique) máximo es el *número de clique* $\omega(G)$ (*número de independencia* $\alpha(G)$).

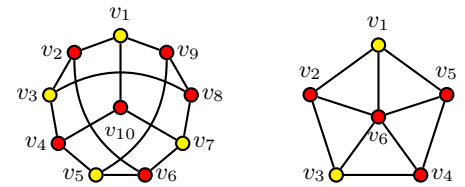
Para G_1 se tiene que solo dos vértices (v_2 y v_5) tienen grado 3, restando cuatro vértices, de modo que ningún subgrafo puede alcanzar a ser K_5 (pues no son suficientes los vértices de grado mayor o igual a cuatro); por otra parte K_4 es un subgrafo (hay tres de ellos, uno es el formado por los vértices rojos $V(K_4) = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$, $E(K_4) = \{v_1 v_3, v_1 v_4, v_1 v_6, v_3 v_4, v_3 v_6, v_4 v_6\}$), de donde $\omega(G_1) = 4$; por otra parte, puesto que dos vértices (v_1 y v_6) son adyacentes a todos los restantes, cualquier anticlique que contenga

a uno de ellos solo puede tener un vértice; eliminándolos queda $G_1 - \{v_1, v_6\} \cong P_4$ en el que el máximo cardinal de un conjunto independiente es 2 (y hay tres de estos conjuntos: $\{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}$ y el amarillo $\{v_2, v_5\}$), de donde $\alpha(G_1) = 2$. En total, G_1 tiene 6 cliques de cardinal 1 (los vértices), $12 = |\psi_{G_1}(E(G_1))|$ cliques de cardinal 2, 8 cliques de cardinal 3, y 3 cliques de cardinal 4. En G_2 los cliques maximales son $\{v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}$ (como el primero es máximo, $\omega(G_2) = 3$) y los anticliques maximales son $\{v_2\}, \{v_1, v_4\}$ y el amarillo $\{v_1, v_3\}$, siendo los dos últimos también máximos (¿Por qué no están en esta lista $\{v_1\}$ ni $\{v_3\}$ ni $\{v_4\}$?, y entonces es $\alpha(G_2) = 2$.



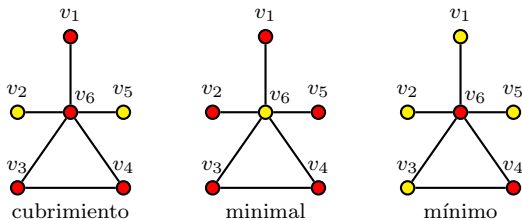
De las definiciones, es inmediato que S es un clique (anticlique) del grafo simple G sii S es un anticlique (clique) de G' , de modo que, en particular, $\alpha(G) = \omega(G'), \omega(G) = \alpha(G')$, lo que se observa en el ejemplo: $\alpha(G'_1) = 4$ (los vértices rojos constituyen un anticlique de este cardinal en G'_1), $\omega(G'_1) = 2, \alpha(G'_2) = 3, \omega(G'_2) = 2$. Además (probarlo) es $\alpha(K_n) = 1, \omega(K_n) = n, \alpha(P_n) = \lceil n/2 \rceil, \omega(P_n) = \min\{2, n\}, \alpha(S_n) = \max\{1, n-1\}, \omega(S_n) = \min\{2, n\}, \alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor, \omega(C_n) = 2$ si $n > 3, 3$ si $n = 3, \omega(W_n) = 4$ si $n = 4, 3$ si $n > 4, \alpha(N_n) = n, \alpha(K_{p,q}) = \max\{p, q\}, \alpha(P_p \times P_p) = \lceil p^2/2 \rceil, \alpha(Q_p) = 2^{p-1}, \alpha(P_2 \times C_p) = 2\lfloor p/2 \rfloor (p \geq 3), \alpha(\text{Petersen}) = 4$.

23. *Independencia y cubrimiento (vértices)*. Definir *cubrimiento de vértices (vertex cover)*, *número de cubrimiento de vértices (vertex cover number)* de un grafo $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ y determinarlos para cada uno de los grafos de la figura (Petersen y W_6). El número de cubrimiento de vértices se designa con $\beta(G)$: probar que $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$. Calcular $\beta(G)$ para los grafos: $K_n, P_n, C_n, S_n, W_n, N_n, K_{p,q}, P_p \times P_p, Q_p, P_2 \times C_p$.



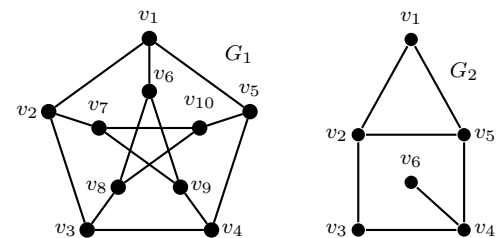
♣ Resp. Parcial. $S \subset V(G)$ es un *cubrimiento de vértices (vertex cover)* de G sii $\forall e \in E(G), \psi_G(e) = \{u, v\} : u \in S \vee v \in S$, esto es que cualquier arista de G debe tener al menos un extremo en S . Un cubrimiento S es *minimal* sii ningún subconjunto propio es un cubrimiento; es *mínimo* si no hay otro cubrimiento H tal que $|H| < |S|$. El cardinal de un cubrimiento mínimo es el *número de cubrimiento de vértices (vertex cover number)* $\beta(G)$. Se tiene que $S \subset V(G)$ es un conjunto independiente de G sii $V(G) - S$ es un cubrimiento de vértices (pues S es independiente sii no hay dos vértices de S vecinos, de modo que cualquier arista $e \in E(G)$ debe tener al menos un extremo en $V(G) - S$, y esto es precisamente decir que $V(G) - S$ es un cubrimiento de vértices de G). De aquí resulta que $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$; la prueba: siendo S es un anticlique máximo (i. e. $|S| = \alpha(G)$), el conjunto $V(G) - S$ es un cubrimiento de cardinal $n(G) - \alpha(G)$ y entonces $\beta(G) \leq n(G) - \alpha(G)$; por otra parte, si H es un cubrimiento mínimo (i. e. $|H| = \beta(G)$), el conjunto $V(G) - H$ es un anticlique máximo y entonces $n(G) - \beta(G) \leq \alpha(G)$. Puestas juntas estas dos condiciones dicen que $n(G) \leq \alpha(G) + \beta(G) \leq n(G)$ de donde $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

La figura muestra cubrimientos mínimos (rojo) y entonces sus complementos (amarillo) son anticliques máximos, de modo que $\alpha(\text{Petersen}) = 4, \beta(\text{Petersen}) = 6, \alpha(W_6) = 2, \beta(W_6) = 4$ (probar que son cubrimientos mínimos). Para responder el $\beta(G)$ del listado se puede, naturalmente, hacer la cuenta $\beta(G) = n(G) - \alpha(G)$, pero es recomendable alcanzar ese número por un argumento autónomo que pruebe, por ejemplo, que $\beta(K_{p,q}) = \min\{p, q\}$.

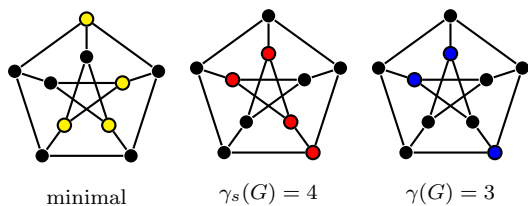


Observación. Por definición, todo cubrimiento mínimo es, necesariamente, minimal, pero el recíproco es falso, como muestran las tres figuras: la primera muestra un cubrimiento que no es minimal (¿por qué?), la segunda un cubrimiento $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ minimal, (suprimiendo cualquiera de sus vértices ya no es un cubrimiento); sin embargo, no es mínimo, ya que la tercera figura muestra que $S_1 = \{v_4, v_6\}$ es un cubrimiento de cardinal $\beta(G) = 2$ (y es mínimo, ya que un cubrimiento de cardinal 1 exigiría un vértice de grado 6 que incida sobre las 6 aristas; tal vértice no existe, pues $d(G) = (1, 1, 1, 2, 2, 5)$).

24. (+) *Dominación (domination) (de vértices)*. Definir *Conjunto dominante (dominating set)* y *fuertemente dominante (strongly dominating)* de un grafo $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ y los correspondientes *número dominante (dominant number)* $\gamma(G), \gamma_s(G)$, e ilustrar las definiciones para los grafos G_1 y G_2 de la figura. ¿Independencia y dominación son equivalentes? ¿Dominación y cubrimiento de vértices son equivalentes? Determinar conjuntos dominantes mínimos y cubrimientos de vértices máximos del grafo simple G_3 cuyos vértices son las diagonales de un hexágono regular y cuyas aristas conectan las diagonales que se cruzan.

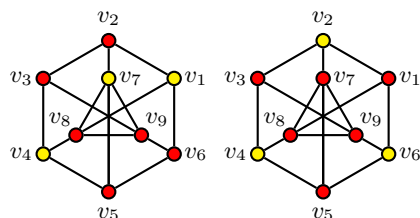
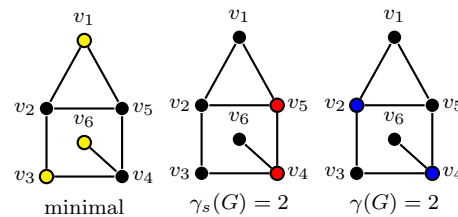


♣ Resp. Parcial. $S \subset V(G)$ es un *conjunto dominante (dominant set)* de G sii $\Gamma_G[S] = V(G)$ (todo vértice que no está en S tiene un vecino en S); es *fuertemente dominante* sii $\Gamma_G(S) = V(G)$ (todos los vértices tienen un vecino en S). El conjunto dominante S es *minimal* sii ningún subconjunto propio es dominante, mientras que es *mínimo* si no hay otro conjunto dominante H tal que $|H| > |S|$. El cardinal de un conjunto dominante mínimo es el *número dominante (dominating number)* $\gamma(G)$, y el de un conjunto fuertemente dominante mínimo es $\gamma_s(G)$. Por definición, entonces, $\gamma(G) \leq \gamma_s(G)$.



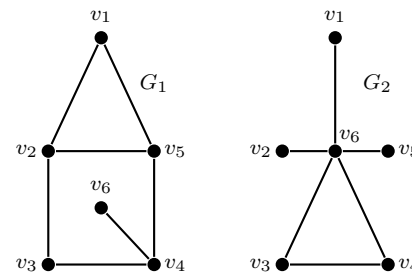
La figura muestra tres conjuntos dominantes del grafo de Petersen: el de vértices amarillos es minimal pero no fuertemente dominante, el de vértices rojos es fuertemente dominante mínimo y el de los azules es mínimo (probar estas afirmaciones). Observar que los conjuntos que definen los números de dominancia no son únicos; por ejemplo, un conjunto dominante mínimo distinto del azul $S = \{v_4, v_6, v_7\}$ es $H = \{v_2, v_9, v_{10}\}$.

Se observa que los conjuntos dominantes pueden o no ser anticliques: los conjuntos de vértices amarillos y azules son independientes, en tanto que los de vértices rojos no lo son (más aún, en G_2 el conjunto $T = \{v_4, v_5\}$ es un clique). No obstante, vale que un anticlique es dominante sii es un anticlique maximal (probarlo), como puede apreciarse en las figuras: los conjuntos amarillos y azules son anticliques maximales.

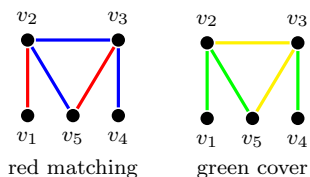


Para G_3 , se muestran dos conjuntos dominantes minimales (que también son mínimos: probarlo) de vértices amarillos (observar que también son anticliques maximales) y dos cubrimientos minimales (que también son mínimos: probarlo) de vértices rojos; de esto resulta que $\alpha(G_3) = \gamma(G_3) = 3, \beta(G_3) = 6$. Este grafo tiene la propiedad de que todos sus anticliques maximales tienen el mismo cardinal (en este caso 3), propiedad que no tiene, por ejemplo, el grafo de Petersen ¿Hay ciclos con esa propiedad? ¿Hay bipartitos completos con esa propiedad?

25. (+) *Apareamiento y cubrimiento (matching, edge cover) (aristas)*. Definir *cubrimiento de aristas (edge cover)*, *número de cubrimiento de aristas (edge cover number)*, *conjunto independiente de aristas (matching)*, *número de matching (matching number)* de un grafo $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ y determinarlos para los grafos G_1, G_2 . El número de matching se designa con $\alpha'(G)$ y el de cubrimiento de aristas se designa con $\beta'(G)$: probar que para cualquier grafo simple que admita ambos conjuntos $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$. Definir *matching perfecto (perfect matching)*, y probar que G_1 y el grafo de Petersen admiten un matching perfecto (mostrar que el grafo de Petersen admite exactamente 6 matching perfectos).



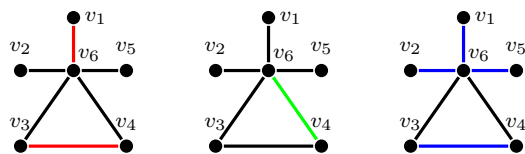
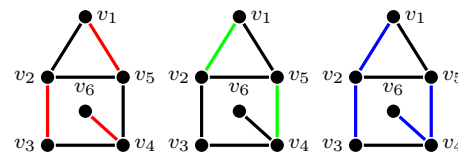
♣ Resp. Parcial. El subconjunto $S \subset E(G)$ es un *conjunto independiente de aristas (matching)* de G sii no existe un par de aristas de S vecinas. Un matching S es *maximal* sii no es subconjunto propio de otro matching, y es *máximo* si no hay otro matching H tal que $|H| > |S|$; el cardinal de un matching máximo es el *número de matching (matching number)* $\alpha'(G)$. Un matching es *perfecto* sii es también un cubrimiento de aristas. $S \subset E(G)$ es un *cubrimiento de aristas (edge cover)* de G sii $\forall u \in V(G), \exists e \in S : \psi_G(e) = \{u, v\}$, esto es que cualquier vértice de G incide en alguna arista de S . Un cubrimiento S es *minimal* sii ningún subconjunto propio es un cubrimiento, y es *mínimo* si no hay otro cubrimiento H tal que $|H| < |S|$; el cardinal de un cubrimiento mínimo es el *número de cubrimiento de aristas (edge cover number)* $\beta'(G)$.



Observación. Con anticliques y cubrimientos de vértices vale que S es un anticlique sii $V(G) - S$ es un cubrimiento (de vértices), de donde resultó bastante directo que $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$; en el caso de aristas, en cambio, es *falso* que S sea un matching sii $E(G) - S$ es un cubrimiento (de aristas), como puede verse en la figura: el complemento del matching rojo es el conjunto de aristas azules que no es un cubrimiento (no cubre a v_1); tampoco el complemento del cubrimiento verde, el conjunto de aristas amarillas, es un matching de G (pues son vecinas). De aquí resulta previsible que la prueba de que $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$ vaya a ser más ardua.

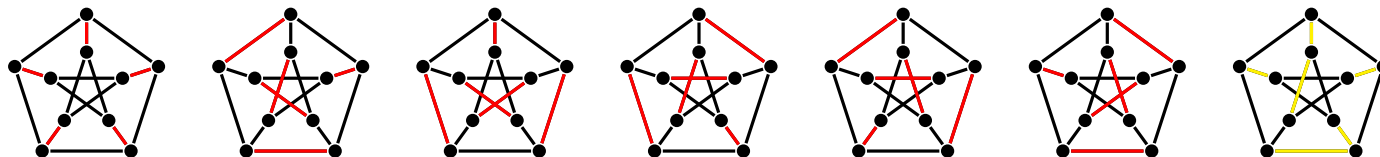
La prueba de que $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$. Lo primero, el grafo G no tiene vértices aislados (pues en tal caso no existe un cubrimiento de aristas), esto es $\delta(G) > 0$. Si se empieza por un matching máximo S (y entonces de cardinal $\alpha'(G)$) el conjunto H de vértices que no son extremos de una arista de S debe ser un anticlique (puesto que S es máximo: si H tuviese vértices adyacentes, la correspondiente arista podría añadirse a S y se tendría un matching mayor) de cardinal $|H| = n(G) - 2\alpha'(G)$; escogiendo de cada uno de estos vértices una arista (lo que siempre es posible, ya que ninguno es aislado) se forma el conjunto T , disjunto con S que, añadido a S , es un cubrimiento de aristas (ya no quedan vértices no incidentes) y su cardinal es $|S + T| = |S| + |T| = \alpha'(G) + n(G) - 2\alpha'(G) = n(G) - \alpha'(G) \geq \beta'(G)$, con la última desigualdad por definición de $\beta'(G)$, de donde $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq n(G)$. Si en cambio se empieza por un cubrimiento de aristas mínimo S (y entonces de cardinal $\beta'(G)$), el subgrafo H inducido por S tiene (en H) un matching máximo M y entonces el conjunto W de vértices que no inciden sobre alguna arista de M es independiente (¿por qué?) de donde $|S| - |M| = |S - M| \geq |W| = n(G) - 2|M|$ que equivale a $|M| + |S| \geq n(G)$ y dado que $\alpha'(G) \geq |M|, \beta'(G) = |S|$, queda $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq |M| + |S| \geq n(G)$. Puestas las desigualdades juntas es $n(G) \leq \alpha'(G) + \beta'(G) \leq n(G)$ de donde lo que se quería probar: $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$.

Un matching máximo y a la vez cubrimiento de aristas mínimo (y entonces un matching perfecto) de G_1 se muestra en rojo en la figura, de modo que $\alpha'(G_1) = \beta'(G_1) = 3$; en verde, un matching maximal que no es un cubrimiento de aristas, en azul, un cubrimiento de aristas que no es un matching (probar estas afirmaciones).

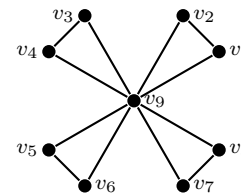


G_2 no admite un matching perfecto; el matching rojo es máximo (y entonces $\alpha'(G_2) = 2$), el matching verde es maximal, y en color azul se tiene un cubrimiento de aristas mínimo (luego $\beta'(G_2) = 4$). Probar estas afirmaciones.

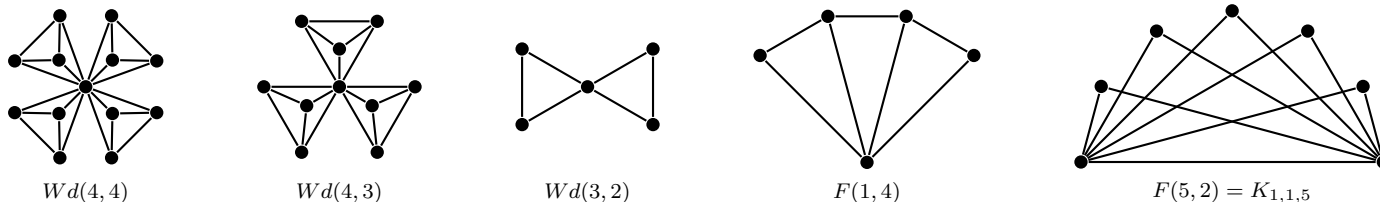
Se muestran (en rojo) 6 apareamientos perfectos del grafo de Petersen (para afirmar que son exactamente 6 debe probarse que no hay otros). Los invariantes entonces para el grafo de Petersen son $\alpha' = \beta' = 5$. El conjunto de aristas amarillas es un cubrimiento de aristas minimal que no es mínimo.



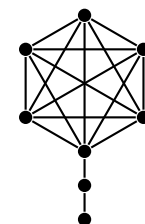
26. (–) Molinos y abanicos. El molino (Windmill), definido por $Wd(p, q) = qK_{p-1} * K_1$ (con $p, q \geq 2$) consiste de q copias de K_p compartiendo un vértice dominante; el abanico (fan) se define por $F(p, q) = N_p * P_q$. Graficar algunos miembros de estas familias, mostrar la superposición con otras familias para valores particulares de p, q , y determinar algunos invariantes. Los molinos $Wd(3, q)$ se llaman “de la amistad” (ilustran un teorema de Erdős: si cada par de personas comparte exactamente un amigo en común, debe haber uno que es amigo de todos, como sucede con los nueve amigos de la figura que muestra $Wd(3, 4)$).



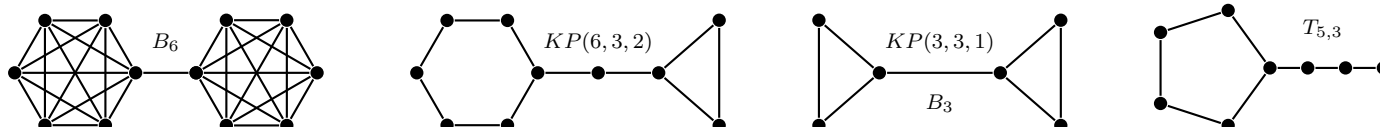
♣ Resp. Parcial. Algunos miembros particulares que resultan de las mismas definiciones: $Wd(2, q) = S_{q+1}$ el grafo $Wd(3, 2)$ es el llamado bowtie (también butterfly); $F(p, 2) = K_{1,1,p} = K_2 * N_p$ (el libro triangular de p páginas), $F(p, 3) = K_{1,2,p}$, $F(1, 3) = F(2, 2) = K_4 - e$, $F(2, 3) = W_5$, $F(1, 2) = C_3$. Algunos invariantes de los molinos: $n(Wd(p, q)) = 1 + (p - 1)q$, $m(Wd(p, q)) = pq(p - 1)/2$, $\phi(Wd(p, q)) = 2$, $r(Wd(p, q)) = 1$, $g(Wd(p, q)) = 3(p \geq 3)$, $\alpha(Wd(p, q)) = q$, $\beta(Wd(p, q)) = 1 + (p - 2)q$.



27. (–) Chupetín, remo, pesa, renacuajo. El chupetín (Lollipop) $L_{p,q}$ (con $p \geq 3$) es el grafo simple compuesto por el subgrafo K_p y el subgrafo P_q conectados por un puente (arista cuyos extremos son un vértice en K_p y otro en un extremo de P_q). El remo (Kayak Padle graph) $KP(p, q, l)$ es el grafo simple resultante de unir el ciclo C_p con el ciclo C_q mediante un path de longitud l . La pesa (Barbell) B_p es el grafo simple obtenido de conectar dos copias de K_p con un puente. El renacuajo (Tadpole) $T_{p,q}$ resulta de conectar C_p (con $p \geq 3$) con P_q mediante un puente. Graficar algunos individuos de cada familia y calcular algunos invariantes (la figura muestra un chupetín $L_{6,2}$). ¿Estas familias tienen intersecciones no vacías?



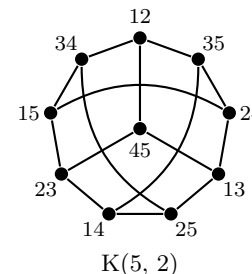
♣ Resp. Parcial. La figura muestra un grafo que es tanto un remo como una pesa: $KP(3, 3, 1) \cong B_3$ (¿hay otro grafo que sea remo y pesa?). Algunos invariantes de las pesas para $p \geq 3$ son: $n(B_p) = 2p$, $m(B_p) = 1 + p(p - 1)$, $\phi(B_p) = 3$, $r(B_p) = 2$, $g(B_p) = 3$, $\alpha(B_p) = 2$, $\beta(B_p) = 2(p - 1)$, $\omega(B_p) = p$, $\gamma(B_p) = \gamma_s(B_p) = 2$, $\delta(B_p) = p - 1$, $\Delta(B_p) = p$, $\text{cir}(B_p) = p$ (los valores de estos invariantes para $p = 1, 2$ resultan inmediatos: basta observar que $B_1 \cong P_2$, $B_2 \cong P_4$).



En todos los casos, asegurarse de probar en detalle que el invariante toma el valor que se afirma; por ejemplo, una prueba de que $\phi(T(p, q)) = \lfloor p/2 \rfloor + q$: Si u, v son vértices de, respectivamente, C_p, P_q , y x es el vértice que articula el ciclo con el path,

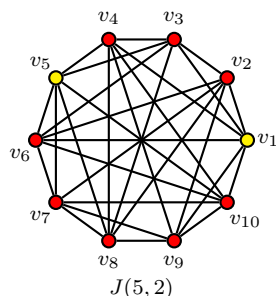
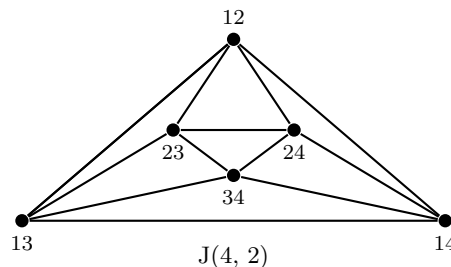
la desigualdad triangular permite escribir $d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, v)$, pero siendo que $\phi(C_p) = \lfloor p/2 \rfloor, \phi(P_{q+1}) = q$, se tiene que $d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, v) \leq \phi(C_p) + \phi(P_{q+1}) = \lfloor p/2 \rfloor + q$, esto es que $d(u, v)$ es a lo sumo $\lfloor p/2 \rfloor + q$ (resta probar que ese valor es alcanzado por dos vértices del renacuajo).

28. (-) *Grafo de Kneser*. Dado un p -conjunto H fijo, se define el grafo simple $G = K(p, q)$ *Kneser graph* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, siendo $V(G) = \mathcal{P}_q(H)$ (los q -subconjuntos de H), y $\psi_G(e) = \{u, v\}$ sii $uv = \emptyset$ (dos vértices son adyacentes sii los correspondientes conjuntos son disjuntos). El grafo de Kneser *generalizado* es $K(p, q, s)$ con $\psi_G(e) = \{u, v\}$ sii $|uv| \leq s$ (y entonces $K(p, q)$ es el caso $s = 0$). Un miembro ilustre de la familia Kneser es $K(5, 2)$, representado en la figura, donde cada vértice es un 2-subconjunto de $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con la escritura simplificada así: el vértice 12 representa $\{1, 2\}$. Determinar el orden y tamaño de $K(p, q)$, caracterizar las subfamilias $K(p, 0), K(p, 1), K(p, p), K(p, p - 1), K(2q, q)$. Determinar el tamaño de $K(4, 2), K(4, 2, 1), K(5, 3), K(5, 3, 1)$.



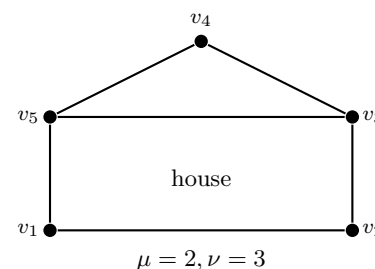
♣ Resp. Parcial. Si $p = q$ es $K(p, p) = K_1$, mientras que si $q > p$ el grafo es vacío. En lo que resta se considera $p > q$: $K(p, 0) = K_1, K(p, 1) = K_p, K(p, p - 1) = N_p, K(2q, q) = \frac{1}{2} \binom{2q}{q} P_2$. El orden es $n(K(p, q)) = \binom{p}{q}$ (que es precisamente la cantidad de q -subconjuntos del p -conjunto). El grado de cada vértice es $\forall v \in V(K(p, q)) : d(v) = \binom{p-q}{q}$ (pues los q -subconjuntos disjuntos de un dado q -subconjunto deben escogerse de su complemento de cardinal $p - q$), de modo que es un grafo regular y entonces el tamaño es $m(K(p, q)) = \frac{1}{2} \binom{p}{q} \binom{p-q}{q}$. *Observación:* la expresión anterior es nula si $p - q < q$, esto es si $p < 2q$, de modo que en este caso, el grafo es N_k con $k = \binom{p}{q}$. Finalmente, $m(K(4, 2)) = 3$ (ver que $K(4, 2) = 3P_2$), $m(K(4, 2, 1)) = 15$ (ver que $K(4, 2, 1) = K_6$), $m(K(5, 3)) = 0$ (pues $K(5, 3) = N_{10}$), $m(K(5, 3, 1)) = 45$.

29. (+) *Grafo de Johnson*. Dado un p -conjunto H fijo ($p \geq 1$), se define el grafo simple $G = J(p, q)$ *Johnson graph*, con $1 \leq q \leq p$, como $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, siendo $V(G) = \mathcal{P}_q(H)$ (los q -subconjuntos de H), y $\psi_G(e) = \{u, v\}$ sii $|uv| = q - 1$ (dos vértices son adyacentes sii la intersección de los correspondientes conjuntos es de cardinal $q - 1$). El $J(4, 2)$ es representado en la figura, donde cada vértice es un 2-subconjunto de $H = \{1, 2, 3, 4\}$ con la notación simplificada: 12 representa el conjunto $\{1, 2\}$. Determinar $n(G), d(v), m(G), J(p, 1), J(p, p - 1), (J(4, 2))'$ ¿Qué grafo es, en general, el complemento de $J(p, 2)$? Graficar $J(5, 2)$ y determinar sus invariantes $\phi(J(5, 2)), r(J(5, 2)), \alpha(J(5, 2)), \beta(J(5, 2)), \omega(J(5, 2))$. El grafo de Johnson generalizado $J(p, q, r)$, con $r < q$ tiene los vértices como el de Johnson, y $\psi_G(e) = \{u, v\}$ sii $|uv| = r$; determinar $J(5, 2, 0), J(5, 2, 1)$.



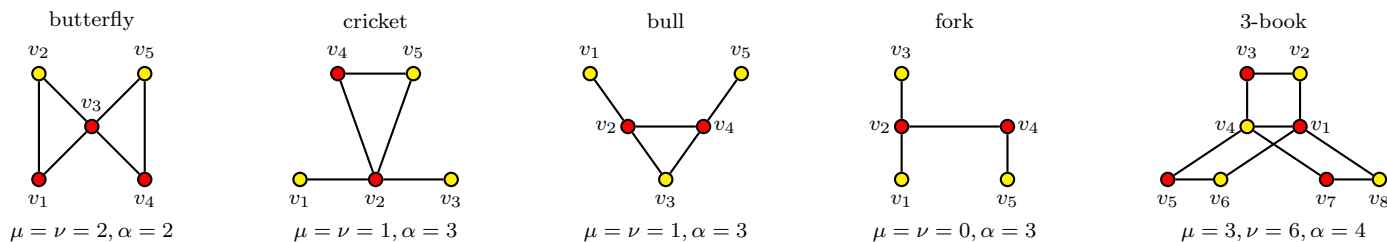
♣ Resp. Parcial. El orden es $n(J(p, q)) = \binom{p}{q}$ (que es precisamente la cantidad de q -subconjuntos del p -conjunto). El grado de cada vértice es $\forall v \in V(J(p, q)) : d(v) = q(p - q)$, de modo que es un grafo regular y entonces el tamaño es $m(J(p, q)) = \frac{1}{2} q(p - q) \binom{p}{q}$; $J(p, 1) \cong J(p, p - 1) \cong K_p, (J(4, 2))' \cong 3P_2$ (en general, el complemento de $J(p, 2)$ es isomorfo a $K(p, 2)$. Por otra parte, $r(J(5, 2)) = \phi(J(5, 2)) = 2, \alpha(J(5, 2)) = 2, \beta(J(5, 2)) = 8, \omega(J(5, 2)) = 3$. En la figura se muestra (amarillo) un anticlique máximo y un cubrimiento de vértices mínimo (rojo). El grafo $J(5, 2, 0)$ es el de Kneser $K(5, 2)$ (esto es, el de Petersen), $J(5, 2, 1)$ es, por supuesto, $J(5, 2)$.

30. (-) *Ciclos y cactus*. Dado el grafo simple $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, se define $\mu(G)$ el *número ciclomático (cyclomatic number)* como la cantidad de aristas que deben eliminarse para que el grafo resulte acíclico, mientras que $\nu(G)$ es la cantidad de ciclos (se prueba que $\mu \leq \nu \leq 2^\mu - 1, \mu(G) = m(G) - n(G) + c(G)$, donde $c(G)$ es la cantidad de componentes conexas). Un grafo conexo G es un *cactus* sii $\mu(G) = \nu(G)$ (de modo equivalente, sii dos ciclos tienen a lo sumo un vértice común). El grafo de la figura (*house*) no es un cactus (pues $\mu = 2 \neq 3 = \nu$) que cumple $\nu = 3 = 2^2 - 1 = 2^\mu - 1$. Determinar todos los cactus de orden a lo sumo 5; proponer, siempre que existan, grafos que satisfagan $\nu = 2^\mu - 1$, con $\mu = 3$, y con $\mu = 4$. Para cada grafo determinar también su número de independencia α . ¿Es el libro $B(3)$ un catus? ¿Satisface $\nu = 2^\mu - 1$? ¿Algún molino es un cactus?



♣ Resp. Parcial. Con $n(G) \leq 5$ hay 17 cactus: a los 13 dados por $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, S_4, S_5, C_3, C_4, C_5, T_{3,1}, T_{4,1}, T_{3,2}$ se añaden los cuatro denominados *butterfly, cricket, bull, fork* (mariposa, grillo, toro, tenedor), que se indican en la figura. Por otra parte, K_4 satisface la igualdad $\nu = 2^\mu - 1$ para $\mu = 3$, mientras que lo propio hace $K_{3,3}$ con $\mu = 4$ (probarlo); $\mu(K_4) = 6 - 4 + 1 = 3$, mientras

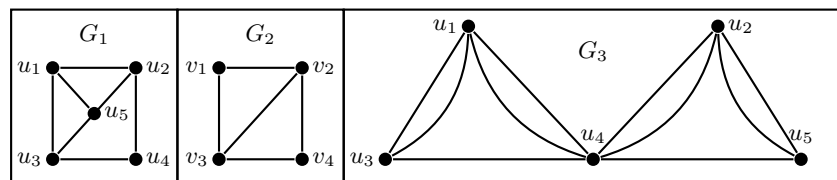
que $\nu(K_4) = 7$ ciclos (graficar K_4 y detallarlos), luego se cumple que $7 = 2^3 - 1$. El libro de tres páginas $B(3)$ no es un cactus (por definición, el libro tiene tres ciclos que comparten una arista, luego comparten dos vértices) y como $\mu(B(3)) = 3, \nu(B(3)) = 6$, es $\nu < 2^\mu - 1$.



Las figuras muestran cubrimientos de vértices mínimos (el conjunto de vértices rojos) y sus complementos, los conjuntos de vértices amarillos, que constituyen anticliques máximos, cuyos cardinales son los correspondientes números de independencia α . La mariposa es el molino $W_d(3, 2)$; en general existen infinitos molinos que son cactus: un molino $W_d(p, q)$ es un cactus sii $p = 2$ o $p = 3$, cualquiera sea $q \geq 2$ (probarlo).

Observación. Todo grafo simple (sea o no conexo) con solo un ciclo cumple $\nu = 2^\mu - 1$, pues si $\nu = \mu = 1$ entonces $1 = 2^1 - 1$; en particular, lo cumplen los cactus (por definición conexos) con solo un ciclo.

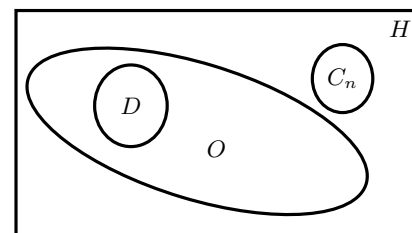
31. (-) *Euleriano, hamiltoniano.* Un grafo conexo G se llama *euleriano* si tiene un circuito (*circuit*: camino cerrado sin aristas repetidas) que incluye todas sus aristas, mientras que se llama *hamiltoniano* si tiene un ciclo (*cycle*: camino cerrado sin vértices repetidos) que incluye todos sus vértices. Es *semieuleriano* si hay un *trail* (camino que no repite aristas) que contiene todas las aristas, y *semihamiltoniano* si hay un *path* (camino que no repite vértices) que incluya todos sus vértices. Clasificar los grafos siguientes. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre p, q para que el bipartito completo $K_{p,q}$ sea euleriano. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre p, q para que el grafo de Johnson $J(p, q)$ sea euleriano. Siendo $s \in \mathbb{N}_0$, dar condiciones necesarias y suficientes sobre q para que el grafo de Kneser $K(2q + s, q)$ sea euleriano.



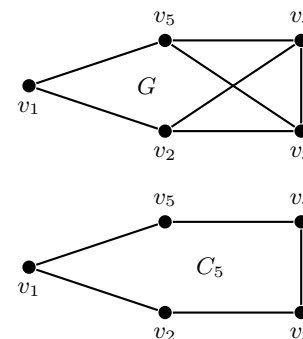
♣ (Resp. Parcial). G_2 es hamiltoniano (circuito $v_1 v_2 v_4 v_3 v_1$), no euleriano pero sí semieuleriano (trail $v_2 v_4 v_3 v_2 v_1 v_3$). G_3 es no hamiltoniano (lo impide la articulación u_4) y semieuleriano (¿trail?); G_1 es hamiltoniano (ciclo $u_1 u_5 u_2 u_4 u_3 u_1$), no euleriano ni semieuleriano.

Sabido que $K_{p,q}$ es euleriano sii todos sus vértices tienen grado par, y como el grado de cada uno de los p vértices es q , mientras que el grado de cada uno de los q vértices es p (por definición de $K_{p,q}$, resulta que tanto p como q deben necesariamente ser pares; tal condición es también suficiente). El Kneser $K(2q + s, q)$ es un grafo regular: si $s = 0$ es el grafo $K(2q, q) = \frac{1}{2} \binom{2q}{q} P_2$ que no es conexo (con sus vértices de grado 1); si $s = 1$ el grafo $K(2q + 1, q)$ es (¿por qué?) conexo $(q + 1)$ -regular, de modo que es necesario y suficiente que q sea impar (para que el grado de todos sus vértices sea par); finalmente, si $s \geq 2$ el grafo es conexo con todos sus vértices de grado $(q + 1)(q + 2) \cdots (q + s)$, un producto de s números consecutivos, y como $s \geq 2$, entre ellos hay al menos uno par, siendo entonces un grafo con todos sus vértices de grado par, cualquiera sea q . Puesto todo junto: $K(2q + s, q)$ es euleriano sii $s = 1$ con q impar, o $s \geq 2$, con cualquier $q \in \mathbb{N}$.

32. (+) *Dirac, Ore.* Sea D el conjunto de los grafos que satisfacen las hipótesis del teorema de Dirac, O el conjunto de los grafos que satisfacen las hipótesis del teorema de Ore, H el conjunto de los grafos hamiltonianos y C_n el conjunto de los ciclos de orden $n \geq 5$. *Demostrar* que se dan las inclusiones estrictas de la figura, esto es que $D \subset O \subset H$ con $D \neq O, O \neq H, C_n \subset H \cap O'$.

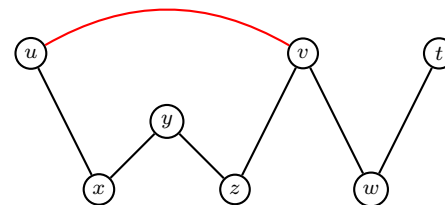


♣ (Resp. Parcial). Sea $G = ((G), E(G))$ un grafo conexo simple de orden $n = |V(G)| \geq 3$. El teorema de Dirac afirma si $\forall v \in V(G) : d(v) \geq n/2$ entonces G es hamiltoniano; el teorema de Ore afirma que si para todo par de vértices no adyacentes u, v es $d(u) + d(v) \geq n$ entonces G es hamiltoniano. Ahora, $D \subset O$, pues si $\forall v \in V(G) : d(v) \geq n/2$, entonces $d(u) + d(v) \geq n/2 + n/2 = n$ (cualesquiera sean u, v , en particular, no adyacentes). El teorema de Dirac, por lo tanto se deduce del teorema de Ore, y basta probar éste (¡hacerlo, es el núcleo de este ejercicio!) para ver que $O \subset H$. El grafo G de la figura, con $n = 5$ está en O (verificar que los grados de cualquier par de vértices no adyacentes suman al menos n pero no en D (pues $d(v_1) = 2 < n/2$), de modo que $O \neq D$. Finalmente, C_n está en H (es hamiltoniano) pero no en O , pues para cualquier par de vértices no adyacentes $d(u) + d(v) = 4 < 5 \leq n$, de modo que $O \neq H$. *Observación:* los ciclos C_4 y C_3 se encuentran ambos en el conjunto D y entonces no hay ningún ciclo que se encuentre en O pero no en D .



33. (+) *Maximalidad.* Un *path maximal* en $G = (V(G), E(G))$ es un *path* P en G que no está contenido en un *path* de mayor longitud (observar que todo grafo *finito* debe tener un *path* maximal). Probar que si el grado mínimo $\delta(G)$ es al menos 2, entonces G tiene al menos un ciclo. Probar además que todo grafo de orden $n = |V(G)|$ con al menos n aristas contiene un ciclo.

♣ Respuesta parcial. Sea P un *path* maximal en G y sea u un vértice extremo de P ; como P no puede ser extendido todo vértice adyacente a u debe estar ya en P (pues en caso contrario, ese vértice prolongaría P) y como además el grado de u es al menos 2, debe haber al menos un vértice v en $V(G)$ que es adyacente a u y cuya arista uv no está en $E(P)$, de modo que hay un ciclo con esa arista completando la porción de P que va de u a v . *Observación:* como siempre, se sobrentiende un grafo finito; de no ser G un grafo finito la conclusión ya no semantiene, como lo prueba por ejemplo el grafo G cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \mathbb{Z}$ y su conjunto de aristas $E(G) = \{ij : |i - j| = 1\}$, se tiene que el grado de todos los vértices es 2 y no hay ciclo alguno (como tampoco hay un *path* maximal).



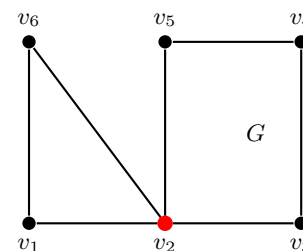
Para la segunda parte se hace inducción sobre n . Si $n = 1$ y tiene al menos una arista, tiene un *loop* que es un ciclo. Si $n > 1$ y G tiene un vértice v de grado a lo sumo 1, $G - v$ tiene $n - 1$ vértices y al menos $n - 1$ aristas (pues la eliminación de v elimina a lo sumo una arista), de modo que por hipótesis inductiva, $G - v$ tiene un ciclo, ciclo que también está en G . Si, en cambio, no hay un tal vértice, entonces todos tienen grado al menos 2 y se aplica lo probado antes. Luego G tiene un ciclo.

34. (-) *Componentes conexas.* Sea $G = (V(G), E(G))$ con $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{15}\}$ y tal que $v_i v_j \in E(G)$ sii $\text{mcd}(i, j) > 1$. Determinar la cantidad de componentes conexas de G y la longitud de un *path* maximal en G y determinar si es bipartito.

♣ (Resp. Parcial). El grafo tiene tres vértices aislados: v_1, v_{11}, v_{13} . Los restantes constituyen una sola componente con un árbol generador $v_7, v_{14}, v_{10}, v_5, v_{15}, v_3, v_9, v_{12}, v_8, v_6, v_4, v_2$, por lo tanto el grafo tiene cuatro componentes, la longitud del *path* maximal es 11 y no es bipartito pues, por ejemplo, contiene al triángulo v_2, v_4, v_6 (y entonces si fuera bipartito y v_2 está en una de las componentes, la existencia de las aristas $v_2 v_4$ y $v_2 v_6$ exige que v_4 y v_6 estén en la otra componente conexa y por lo tanto $v_4 v_6 \notin E(G)$; pero la arista $v_4 v_6 \in E(G)$, contradicción que prueba que G no es bipartito).

35. (-) *Mix.* Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones acerca del grafo $G = (V(G), E(G))$.
- (a) Todo grafo euleriano tiene un número par de aristas.
 - (b) Todo grafo euleriano bipartito tiene un número par de aristas.
 - (c) Todo grafo euleriano simple con un número par de vértices tiene un número par de aristas.
 - (d) Si A es la matriz de adyacencia de un grafo simple bipartito, entonces cualquiera sea el impar k , la matriz A^k tiene su diagonal principal nula.

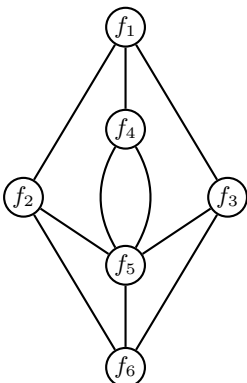
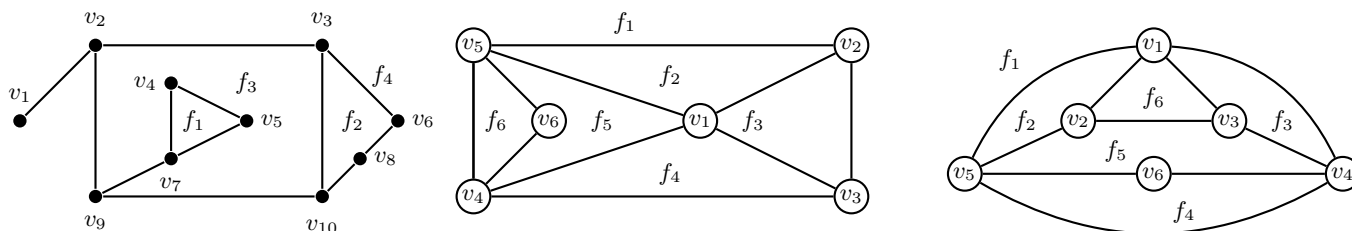
♣ (Resp. Parcial). Para ver que la primera es falsa basta pensar C_3 ; la segunda es verdadera, pues por ser euleriano el grado de todos sus vértices es par; ahora si $V_1 \subset E(G)$ es una de las dos componentes del grafo bipartito, la cantidad de aristas del grafo es la cantidad de aristas que salen de esa componente, valor que se obtiene exactamente sumando los grados de los vértices de V_1 . Como todos los sumandos son pares, la suma (esto es, la cantidad de aristas) es par. La tercera es falsa, para lo que basta considerar la unión de un ciclo par con uno impar que compartan un vértice como articulación: el grafo es euleriano, pues el grado de todos sus vértices es 2, excepto el vértice compartido cuyo grado es 4 y el número de aristas es la suma de un número par (las aristas del ciclo par) y un número impar (las aristas del ciclo impar), valor que es impar. La cuarta es verdadera, pues $A^k(i, i)$ cuenta los caminos cerrados de longitud (impar) k que contiene a $v_i \in V(G)$, pero un bipartito no tiene ciclos impares (y entonces no tiene caminos cerrados impares). *Observación:* la recíproca también es verdadera.



36. (+) *Árbol (tree)*. Un grafo conexo sin ciclos $T = (V(T), E(T))$ con $n(T) = |V(T)|$ vértices y $m(T) = |E(T)|$ aristas es *por definición* un *árbol*. Probar que las siguientes proposiciones son *equivalentes*: (a) T es un árbol; (b) T no tiene ciclos y $m(T) = n(T) - 1$; (c) T es conexo y $m(T) = n(T) - 1$; (d) T es conexo *minimal* (la remoción de cualquier arista desconecta el grafo); (e) Cualquier par de vértices de T está conectado por exactamente un *path*; (f) T no tiene ciclos y el añadido de una arista crea un ciclo.

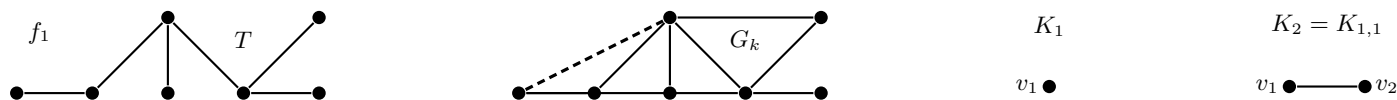
♣ (Resp. Parcial). Aunque la forma más eficiente de probar las cinco equivalencias es disponer las cinco proposiciones en un ciclo conectando cada una con la siguiente por una implicación, se recomienda la prueba de las $10 = \binom{5}{2}$ equivalencias. Por ejemplo (a) \Rightarrow (e): entre cualquier par de vértices existe al menos un *path* pues es T conexo y si hubiese más de un *path* conectándolos, la unión de dos de esos *paths* sería un ciclo, lo que no es posible por hipótesis. Para la recíproca (e) \Rightarrow (a): como hay un *path* entre cualquier par de vértices, T es conexo; además, si T tuviese un ciclo y dos vértices u y v estuvieran incluidos en el ciclo, entonces se tendrían dos (¡y no uno!) *paths* entre esos vértices, de modo que T no tiene ciclos. Otra implicación, (e) \Rightarrow (d): primero, T es conexo (ya que entre cualquier par de vértices hay un *path*); además, si $e \in E(T)$ es una arista que conecta el vértice u con el vértice v , un camino que conecta u con v es, precisamente, uev , pero por hipótesis ese es el *único* modo de conectar u con v , de modo que la supresión de la arista e desconecta el grafo T .

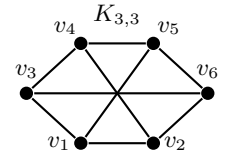
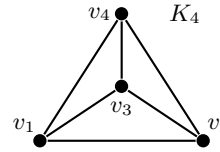
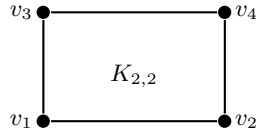
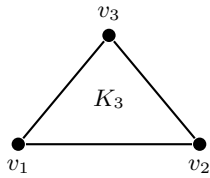
37. (+) *Planaridad, dualidad*. Para un grafo conexo y *planar* (admite una representación en el plano con aristas solo intersecadas eventualmente en vértices) $G = (V(G), E(G))$ de $f(G)$ caras (*faces*), $n(G) = |V(G)|$, $m(G) = |E(G)|$ probar la *fórmula de Euler* ($n - m + f = 2$), el *faceshaking lemma* (la suma de los grados de las caras es igual al doble de su tamaño m), y que el grafo dual G^* tiene f vértices, n caras y m aristas. Probar además que en un grafo planar conexo simple con $n \geq 3$ debe ser $m \leq 3(n - 2)$, y si G no tiene triángulos $m \leq 2(n - 2)$ y utilizar estos resultados para probar que K_5 y $K_{3,3}$ no son planares. Mostrar el cumplimiento de la fórmula de Euler y el *faceshaking lemma* para los siguientes grafos y representar sus duales. ¿Cuál es el menor valor de n para el que K_n no es planar? ¿Cuál es el menor valor de n para el que $K_{n,n}$ no es planar?



♣ (Resp. Parcial). Para el primer grafo es $n = 10, m = 12, f = 4$, de modo que $n - m + f = 10 - 12 + 4 = 2$; los grados de sus caras son $d(f_1) = 3, d(f_2) = 4, d(f_3) = 9, d(f_4) = 8$ cuya suma es 24 (el doble de $m = 12$); además cumple $m = 12 \leq 3(n - 2) = 24$. En general para un grafo simple planar ($n \geq 3$) el grado de cada cara es al menos 3 y entonces (*faceshaking lemma*) $2m \geq 3f$ y como (fórmula de Euler) es $f = m - n + 2$ resulta que $3(m - n + 2) \leq 2m$ de donde $m \leq 3(n - 2)$. Si en particular K_5 fuera planar ($n = 5, m = 10$) debería ser $10 \leq 3(5 - 2) = 9$, lo que es imposible, de modo que K_5 no es planar. Otra vez, en general, si el grafo carece de triángulos, el grado de cada cara es al menos 4, y (*faceshaking lemma*) $2m \geq 4f$ y como es $f = m - n + 2$ resulta que $4(m - n + 2) \leq 2m$ de donde $m \leq 2(n - 2)$. Si en particular $K_{3,3}$ (que está libre de triángulos) fuera planar ($n = 6, m = 9$) debería ser $9 \leq 2(6 - 2) = 8$, lo que es imposible, de modo que $K_{3,3}$ no es planar. La segunda y la tercera figura representan *el mismo* grafo (son dos *inmersiones*), y a la izquierda se representa el dual de una de estas inmersiones; mostrar que los duales de dos representaciones del mismo grafo ¡no necesariamente son isomorfos!

Una prueba de la fórmula de Euler supone sabido que cualquier grafo conexo se construye partiendo de un árbol generador T añadiendo una arista por vez. En T se sabe que $f = 1$ (cualquier inmersión del árbol tiene solo una cara), y además el número de aristas es $m = n - 1$, de modo que $n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$. Ahora, en cada estado, la adición de una arista no cambia el valor de n , e incrementa en 1 el número de aristas (m pasa a $m + 1$) y el número de caras se incrementa en 1 (f pasa a $f + 1$) pues la arista añadida o bien conecta dos vértices o bien es un lazo, y en cualquier caso divide una cara existente en dos (la figura muestra el k -ésimo estado G_k en que se añade la arista punteada, que divide en dos la cara no acotada): luego el valor $n - m + f$ no se altera en cada paso, y al finalizar la construcción del grafo G , permanece en el valor del árbol generador T , esto es, 2. Finalmente, las figuras prueban que K_1, K_2, K_3, K_4 son planares, de modo que el menor valor de n para el que K_n no es planar es 5; del mismo modo (ver figuras), siendo planares $K_{1,1}, K_{2,2}$, el menor valor de n para el que $K_{n,n}$ no es planar es 3.





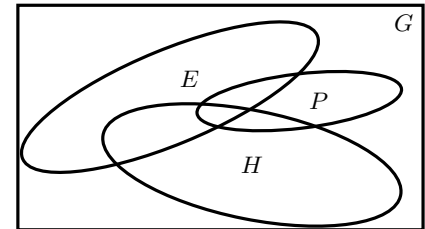
38. (-) *Planaridad*. No existe un grafo simple G planar tal que su complemento G' sea planar y su orden sea mayor que 10. ¿Verdadero o falso?

♣ (Resp. Parcial). La afirmación es verdadera. Sean $G = (V(G), E(G))$ de orden $n = |V(G)| > 10$ y tamaño $m = |E(G)|$ y su complemento $G' = (V(G), E(G'))$, que tiene el mismo orden n y tamaño $m' = |E(G')| = n(n-1)/2 - m$ (¿por qué?). Supóngase que ambos son planares. Debe cumplirse (¿por qué?) que $m \leq 3(n-2)$, $m' \leq 3(n-2)$ y entonces que $n(n-1)/2 - m \leq 3(n-2)$ lo que equivale a $n(n-1)/2 \leq 3(n-2) + m \leq 3(n-2) + 3(n-2) = 6n - 12$, desigualdad equivalente a $n^2 - 13n + 24 \leq 0$ que es imposible para cualquier natural $n > 10$ (¿cómo se prueba esta afirmación?). Luego no pueden ser ambos planares.

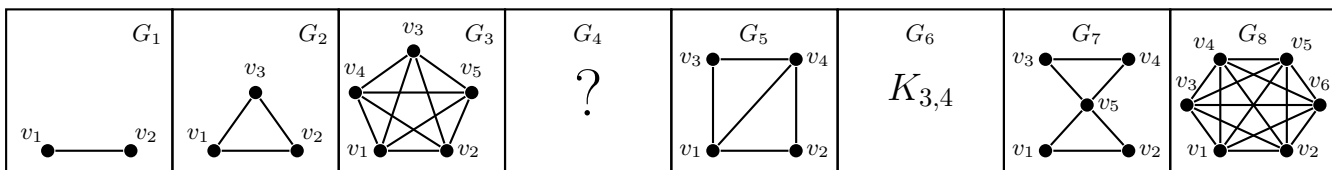
39. (+) *Mix*. Probar que: (a) todo grafo $G = (V(G), E(G))$ planar conexo de orden $n = |V(G)| \geq 3$ tiene al menos un vértice v de grado $d(v) \leq 5$. (b) Todo grafo planar es 5-coloreable.

♣ (Resp. Parcial). (a) Sea $G = (V(G), E(G))$ planar conexo de orden $n = |V(G)| \geq 3$ y tamaño $m = |E(G)|$ y tal que el grado de ninguno de sus vértices es menor o igual que 5. Entonces, cualquiera sea $v_k \in V(G)$ es $d(v_k) \geq 6$, y como $2m$ (*handshaking lemma*) es la suma de los grados de todos los vértices se tiene $2m = \sum_{k=1}^n d(v_k) \geq 6n$, esto es que $m \geq 3n$, y además (G es planar) debe ser $m \leq 3(n-2)$, en otras palabras, $3n \leq m \leq 3n - 6$ de donde $3n \leq 3n - 6$, contradicción que prueba lo pedido (¿por qué?). (b) Si $G = (V(G), E(G))$ con $n = |V(G)|$. El teorema para $n \leq 5$ es obvio (se dispone de 5 colores a ser asignados en a lo sumo 5 vértices), de modo que resta probarlo para $n > 5$. Esta parte se hace por inducción, se sabe que siendo $p(n)$ la afirmación, $p(5)$ es válida, y ahora se quiere ver que $p(n-1) \Rightarrow p(n)$. La idea básica es que (por lo probado en (a) el grafo G de orden $n > 5$ tiene al menos un vértice u de grado a lo sumo 5, de modo que el grafo $G - u$ es de orden $n - 1$ y por lo tanto 5-coloreable, de modo que para completar una coloración de G debe asignarse un color al vértice u . Si su grado es a lo sumo 4, se asigna un color no utilizado en sus vértices adyacentes; si es 5, y sus cinco vértices adyacentes no utilizan en la coloración de $G - u$ los cinco colores, se asigna uno no utilizado. Finalmente, queda considerar el caso en que u tiene 5 vértices adyacentes ya coloreados (en la coloración de $G - u$) con los cinco colores disponibles: ¿cómo resolverlo? Hacer un diagrama con la estrella $K_{1,5}$ con u en el centro y razonar sobre dos colores de sus satélites...

40. (+) *Mix*. Sea E el conjunto de los grafos eulerianos, H el conjunto de los grafos hamiltonianos, P el conjunto de los grafos planares y G el conjunto de los grafos en general, los que se esquematizan en la figura. Analizar si alguna de las ocho regiones de la figura es vacía. Para cada región que se afirme no vacía, dar un grafo mostrando su pertenencia a la región, como por ejemplo $K_2 \in PE'H'$, ya que es planar y no es euleriano ni hamiltoniano; si en cambio, se afirmara que alguna región es vacía, probar la imposibilidad de un tal grafo.



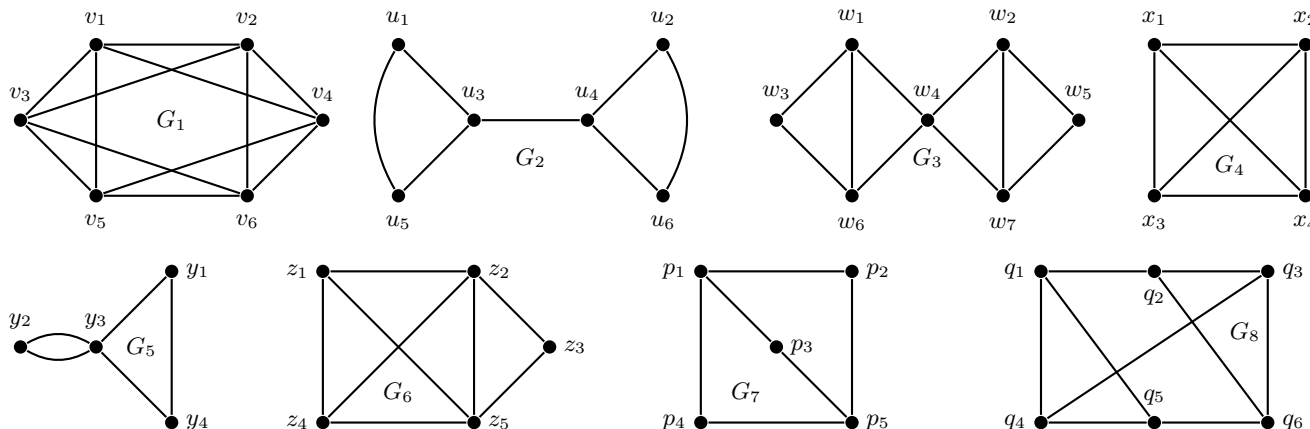
♣ (Resp. Parcial). Se tienen en total 8 regiones y la figura siguiente presenta grafos que se encuentran exclusivamente en alguna de ellas; por ejemplo, $G_1 \in PE'H'$, ya que es planar (como lo prueba su misma representación) y no es euleriano ni hamiltoniano (¿por qué?), $G_2 \in PEH$, $G_3 \in P'EH$, $G_5 \in PE'H$, $G_6 \in P'E'H'$, $G_7 \in PEH'$, $G_8 \in P'E'H$. Ubicar cada uno de ellos, y justificar el motivo de la ubicación asignada. Falta un grafo correspondiente a una región (¿cuál? ¿es posible un tal grafo? ¿o la región está vacía?).



41. (+) *Line graph*. Dado el grafo sin lazos $G = (V(G), E(G))$ de orden $n(G) = |V(G)|$ y tamaño $m(G) = |E(G)|$ se define el *grafo-arista* (*edge graph or line graph*) $L(G)$ como el grafo obtenido tomando las aristas de G como vértices de $L(G)$ y uniendo dos de estos vértices siempre que sus correspondientes aristas en G tengan un vértice común. Obtener el *line graph* de cada uno de los grafos representados y resolver las siguientes cuestiones.

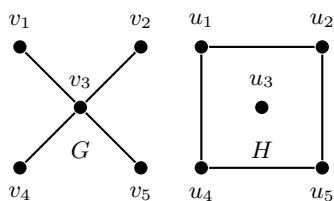
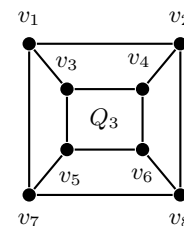
(a) Si $u \in V(L(G))$ corresponde a la arista $xy \in E(G)$ ¿cuál es el grado de u en función de los grados de x e y ? Determinar el orden y el tamaño de $L(K_n)$.

- (b) Determinar el *line graph* de un camino simple (*path*) P_n y de un ciclo (*cycle*) C_n , siendo $n > 2$.
- (c) Probar que G es isomorfo a $L(G)$ sii es 2-regular y que la ecuación en la incógnita G dada por $L(G) = K_n, n > 3$ tiene como única solución $G = K_{1,n}$.
- (d) Sean G y H dos grafos simples tales que $L(G) = L(H)$. ¿Deben entonces ser G y H isomorfos?
- (e) Existe un único (salvo isomorfismo) grafo simple G cuya sucesión de grados es $d = (1, 2, 3, 3, 3)$; ¿cuántas aristas tiene $L(G)$? Graficarlo.
- (f) Determinar el orden y tamaño de $L(G)$, siendo $G = (V(G), E(G))$ de orden $n = |V(G)|$ y tamaño $m = |E(G)|$ y sucesión de grados $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$.
- (g) Probar que es suficiente que G sea euleriano para que $L(G)$ sea euleriano y hamiltoniano, pero que la recíproca es falsa.
- (h) Probar que para que G sea hamiltoniano es necesario que $L(G)$ sea hamiltoniano, pero que la recíproca es falsa.



♣ (Resp. Parcial). Identificando las correspondencias es $L(G_4) = G_1, L(G_2) = G_3, L(G_5) = G_6, L(G_7) = G_8$ (por ejemplo en G_8 el vértice q_1 se corresponde a la arista p_1p_2, q_2 con p_2p_5, q_3 con p_4p_5 ...). (a) $d(u) = d(x) + d(y) - 2$; además $L(K_n)$ tiene orden $n(n-1)/2$ y como cualquier arista en K_n es adyacente a otras $2(n-2)$, resulta que $L(K_n)$ es $2(n-2)$ -regular y la suma de los grados de los vértices de $L(K_n)$ es $n(n-1)(n-2)$ de donde el tamaño de $L(K_n)$ es $n(n-1)(n-2)/2$. (b) P_{n-1}, C_n . (c) El si: si G es 2-regular (i. e. *handshaking lemma* $n = m$) cada arista es adyacente a exactamente otras dos, de modo que $L(G)$ es 2-regular, y además $L(G)$ tiene m vértices, y entonces por ser 2-regular también tiene $n = m$ aristas, entonces G es isomorfo a $L(G)$; para la segunda parte es claro (probarlo) que $L(K_{1,n}) = K_n$, de modo que $K_{1,n}$ es una solución que además es única pues si $L(G) = K_n$ de G tener n aristas y todas tienen exactamente un vértice común, ya que el grado de cada vértice de K_n es $n-1$: luego, $G = K_{1,n}$. (d) No, $L(K_3) = K_3 = L(K_{1,3})$ y K_3 no es isomorfo a $K_{1,3}$. (e) 10. (f) El orden de $L(G)$ es, por definición, m . El tamaño es (¿por qué?) $m(L(G)) = \sum_{k=1}^n \binom{d_k}{2}$ y operando queda $m(L(G)) = (1/2) \sum_{k=1}^n d_k^2 - m$. (g) Una vez probado que $L(G)$ es euleriano es inmediato que es hamiltoniano: el circuito euleriano de aristas en G se convierte en un ciclo hamiltoniano en $L(G)$; que la recíproca es falsa lo prueba que $L(G_4) = G_1$ es euleriano y hamiltoniano, pero G_4 no es euleriano (es 3-regular). (h) Para la falsedad de la recíproca ver que $L(G_7) = G_8$, con G_8 hamiltoniano y G_7 no.

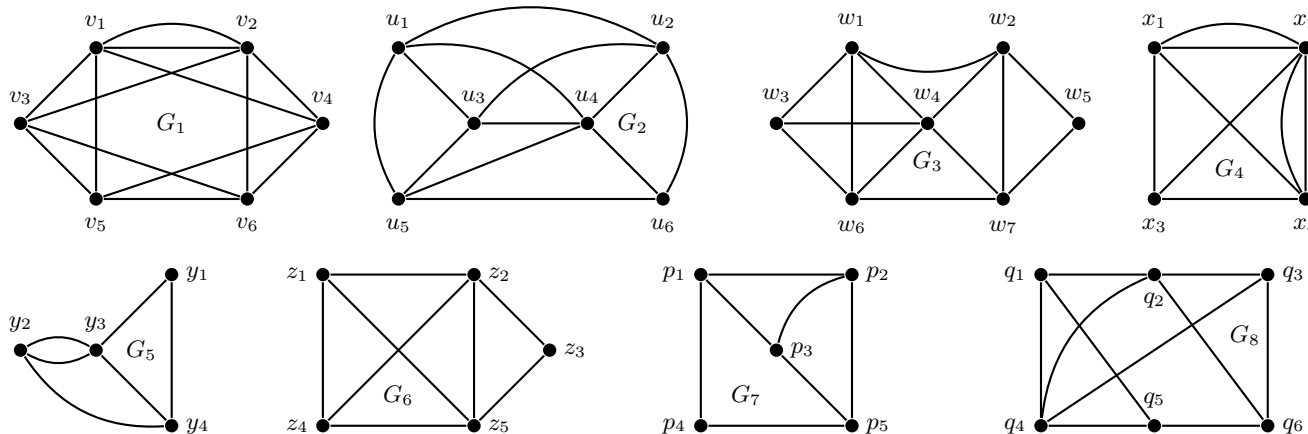
42. (+) *Espectro*. Si A es la matriz de adyacencia del grafo simple $G = (V(G), E(G))$ de orden $n(G) = |V(G)|$ y tamaño $m(G) = |E(G)|$, los *autovalores (eigenvalues)* de G son los autovalores de A siendo su espectro $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Probar que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0, \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 2m$ y que si τ es la cantidad de triángulos en G , es $\sum_{k=1}^n \lambda_k^3 = 6\tau$; comprobar estas igualdades con el espectro de Q_3 . Determinar el espectro de K_n , de $K_{r,s}$, de P_n , de C_n . Probar que dos grafos isomorfos deben tener el mismo espectro, pero que la recíproca es falsa. ¿Dos grafos con el mismo espectro pueden tener distinto diámetro? ¿Un grafo conexo puede tener el mismo espectro que uno no conexo? Probar que k es un autovalor de un grafo k -regular.



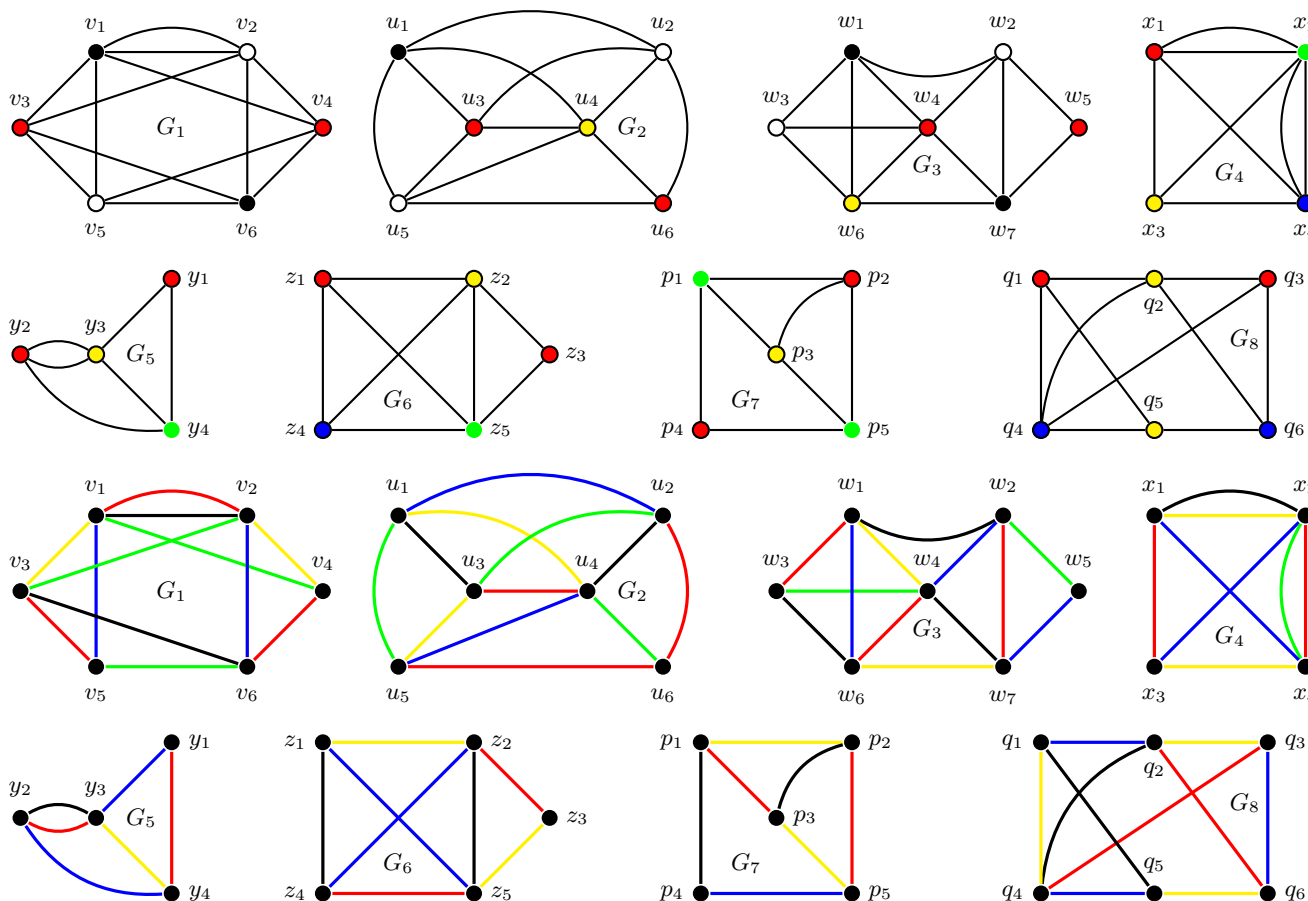
♣ (Resp. Parcial). Siendo A simétrica es semejante a $D = \text{diag}(\sigma(G)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y siendo nula la traza de A , también lo es $\text{tr}(D) = \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$; como $d(v_k) = A_{kk}^2$ (¿por qué?) y A^2 es semejante a D^2 , del *handshaking lemma* resulta que $2m = \text{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$; para la cantidad de triángulos considerar qué representa el k -ésimo elemento de la diagonal de A^3 . Los espectros (entre paréntesis las multiplicidades cuando no son simples): $\sigma(Q_3) = \{-3, 3, 1(3), -1(3)\}, \sigma(K_n) = \{n-1, -1(n-1)\}, \sigma(K_{r,s}) = \{\pm\sqrt{rs}, 0(r+s-2)\}, \sigma(P_n) = \{2 \cos(k\pi/(n+1)), k = 1, 2, \dots, n\}$. Los grafos no isomorfos G (conexo) y H (no conexo) de la figura son tales que $\sigma(G) = \{\pm 2, 0(3)\} = \sigma(H), \phi(G) = 2 \neq \infty = \phi(H)$.

43. *Coloración*. Sea G un grafo sin lazos. Una k -coloración (k -coloring) de vértices (aristas) es una asignación de k colores a los vértices (aristas) de modo que dos vértices (aristas) adyacentes tengan distintos colores asignados; el menor k para el que G tiene

una k -coloración de vértices (aristas) se designa con $\chi(G)$ ($\chi'(G)$) y se llama número cromático (índice cromático). Determinar el número cromático χ de $C_n, W_n, P_n, K_n, K_{1,q}, K_{p,q}, Q_n, F$ (donde F es un bosque), el índice cromático χ' de $C_n, P_n, K_{1,q}, K_{p,q}$ y ambos números para cada uno de los grafos de las figuras, mostrando la correspondiente coloración. Probar además que un grafo G contiene K_n solo si $\chi(G) \geq n$, pero que la recíproca es falsa. Finalmente, probar que $\chi(G) \leq \Delta + 1, \Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$, siendo $\Delta = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$.

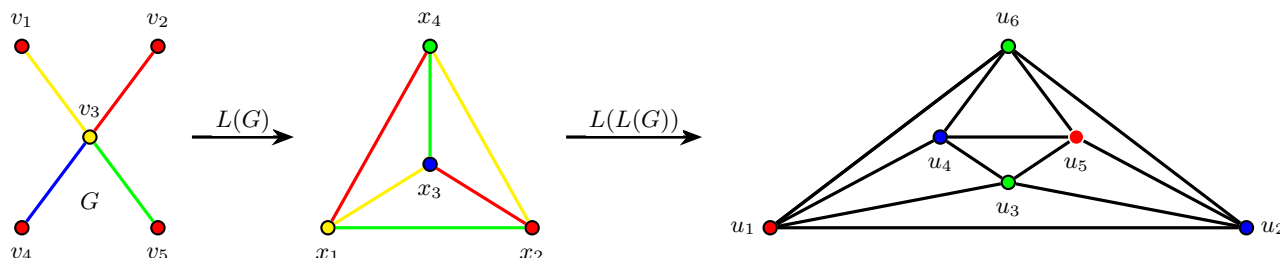


♣ (Resp. Parcial). $\chi(C_n) = 2$ si n es par (3, si $n \geq 3$ es impar), $\chi(P_n) = 2, n \geq 2, \chi(K_n) = n, \chi(K_{1,q}) = 2 = \chi(K_{p,q}), \chi(Q_n) = 2, \chi(F) = 2$. En las siguientes figuras se muestran coloraciones de vértices y aristas para cada uno de los grafos, de donde se obtienen sus números cromáticos. Por ejemplo, el grafo G_2 contiene a K_4 como subgrafo, y entonces $\chi(G_2) \geq 4$, y la figura muestra una 4-coloración de vértices, luego $\chi(G_2) \leq 4$, de donde $\chi(G_2) = 4$. Para el mismo grafo G_2 , su sucesión gráfica es $d = (3, 4, 4, 4, 4, 5)$ y entonces es $\Delta = 5$, de modo que debe tenerse que el índice cromático cumple $\chi'(G_2) \geq \Delta = 5$ y en la figura se muestra una 5-coloración de aristas, luego $\chi'(G_2) \leq 5$, de donde $\chi'(G_2) = 5$. La recíproca es falsa: $\chi(C_7) = 3$ y sin embargo K_3 no es subgrafo de C_7 . La prueba de la directa: si K_n es un subgrafo de G , entonces hay n vértices del grafo tal que uno cualquiera es adyacente a los $n - 1$ restantes, y entonces ya se requieren n colores distintos para cualquier coloración del grafo, de modo que $\chi(G) \geq n$.



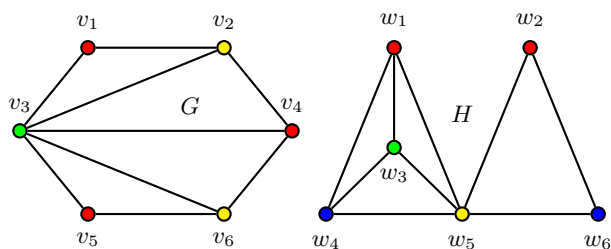
44. (+) *Mix.* Definir, siempre que exista, un grafo conexo planar simple $G = (V(G), E(G))$ de espectro $\sigma(G) = \{-2, 0(\text{triple}), 2\}$ y determinar el número cromático $\chi(L(G))$ e índice cromático $\chi'(L(G))$ de su grafo-arista $L(G)$. ¿Es planar $L(L(G))$? ¿Puede decirse que las sucesivas aplicaciones de L sobre un grafo aumentan los índices o números de coloración?

♣ (Resp. Parcial). (1.a). Un grafo, ¡no el único!, posible es $G = K_{1,4}$ (se sabe que el espectro de un bipartito completo es $\sigma(K_{r,s}) = \{\pm\sqrt{rs}, 0(r+s-2)\}$) y como $L(K_{1,4}) = K_4$ resulta que (justificar) $\chi(L(K_{1,4})) = 4, \chi'(L(K_{1,4})) = 3$. Por otra parte, $L(K_4)$ es el grafo planar 4-regular indicado en la figura. Completar los detalles de las correspondencias, esto es x_1 es el vértice que representa la arista v_1v_3 , como u_1 representa la arista x_1x_2 . Mucho puede aprenderse rehaciendo este ejercicio partiendo de un distinto G que satisfaga lo pedido, como por ejemplo con $G = K_{2,2} + N_1$.



El índice cromático de G es 4 mientras que el de $L(G)$ es 3, de modo que no crece con la aplicación de L . Los respectivos números cromáticos de $G, L(G), L(L(G))$ son 2, 4, 3.

45. (+) *Mix.* Definir, siempre que sea posible, dos grafos planares simples no isomorfos $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$ que tengan la misma sucesión de grados $d(G) = d(H) = (2, 2, 3, 3, 3, 5)$, el mismo radio ($r(G) = r(H)$), el mismo diámetro ($\phi(G) = \phi(H)$) y el mismo índice cromático ($\chi'(G) = \chi'(H)$). Determinar luego el número cromático de cada uno y analizar si son hamiltonianos.



♣ (Resp. Parcial). Los grafos G, H representados en las figuras (definirlos por su conjunto de vértices y aristas) satisfacen lo pedido; tienen la misma sucesión de grados pues $d(v_1) = d(v_5) = d(w_2) = d(w_6) = 2, d(v_2) = d(v_4) = d(v_6) = d(w_1) = d(w_3) = d(w_4) = 3, d(v_3) = d(w_5) = 5$, el radio de ambos es 1 (es la excentricidad de v_3 en G y la excentricidad de w_5 en H), el diámetro de ambos es 2 (todos los vértices restantes están en la periferia con excentricidad 2) y el índice cromático de ambos es 5 (probarlo). Son planares, el número cromático de G es 3 y el de H es 4 y no isomorfos (G es hamiltoniano, H no lo es pues tiene la articulación w_5).

46. (a) (+) *Mix.* Definir, siempre que sea posible, un grafo simple $G = (V(G), E(G))$ de orden $n(G) = |V(G)| = 13$ con número cromático $\chi(G) = 3$ tal que el número cromático $\chi(G')$ de su complemento sea 4.

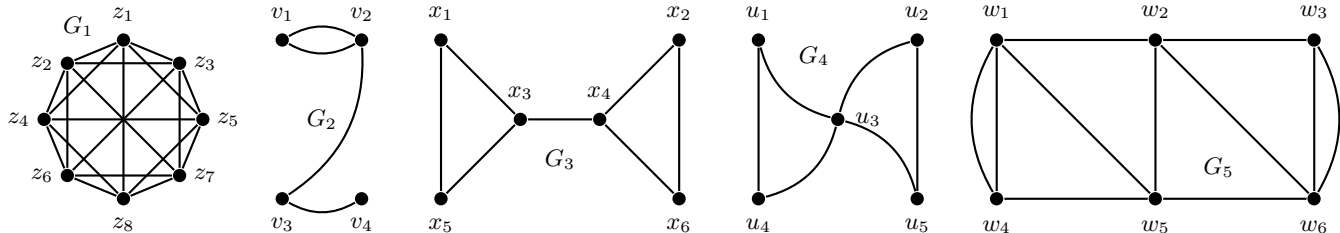
(b) (+) Probar que todo grafo sin lazos $G = (V(G), E(G))$ isomorfo a su grafo-arista $L(G)$, es planar; determinar los posibles valores de su número cromático $\chi(G)$ e índice cromático $\chi'(G)$.

♣ (Resp. Parcial). (a) Imposible. Como el grafo G admite una 3-coloración, hay una partición de $V(G)$ en tres clases, y al menos una de ellas (¿¿por qué?!) debe tener al menos 5 vértices del mismo color (y entonces, por definición de coloración, ninguno de ellos es adyacente a los restantes de esa clase). Pero entonces esos al menos 5 vértices están conectados mutuamente en el complemento G' , de modo que el número cromático $\chi(G')$ de su complemento debe ser al menos 5. † Observación: el ejercicio puede generalizarse, subsumiéndolo en un resultado más general, como propiedad de las coloraciones de G' , esto es que necesariamente $\chi(G)\chi'(G) \geq n = |V(G)|$; es recomendable hacerlo, generalizando el mismo argumento utilizado para el caso particular del ejercicio, con el solo cuidado de indicar que para una $\chi(G)$ -coloración de G se puede asegurar que alguna de las clases que particiona $V(G)$ tiene al menos $\lceil n/\chi(G) \rceil$ vértices de un mismo color.

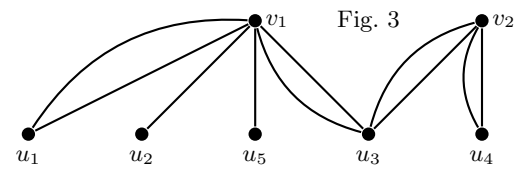
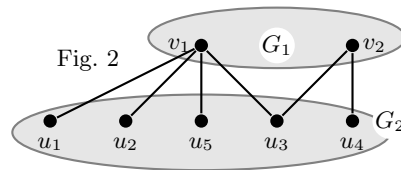
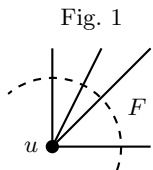
(b) Si $G = (V(G), E(G))$ de orden $n = |V(G)|$ y tamaño $m = |E(G)|$ es isomorfo a $L(G) = (V(L(G)), E(L(G)))$ de orden $n_L = |V(L(G))|$ y tamaño $m_L = |E(L(G))|$, debe ser $n = n_L, m = m_L$, pero como (por definición de $L(G)$) es $n_L = m$, resulta que $n = n_L = m$ y entonces los cuatro números son iguales $n = n_L = m = m_L$, esto es que en particular tanto G como $L(G)$ tienen, cada uno, tantas aristas como vértices, y como el grado de cada vértice de G debe ser igual al correspondiente vértice de $L(G)$ (ya que son isomorfos), entonces todos los vértices de G tienen grado 2, esto es que G es 2-regular; si G es conexo, es un ciclo C_n (que es planar), mientras que si no es conexo es la unión disjunta de ciclos C_k cuyos órdenes suman n (unión disjunta que también es planar). En cuanto al número cromático, si G es conexo o bien es $\kappa(G) = 2$ (si n es par) o bien es $\chi(G) = 3$ (si n es impar). ¿Y si G no es conexo? Observar que debe ser (¿¿por qué?) $n \geq 3$; ¿qué hay de $\chi'(G)$?

47. *Conectividad.* Sea $G = (V(G), E(G))$ conexo. Un conjunto de vértices $S \subset V(G)$ es un *corte de vértices* (*vertex cut*) sii $G - S$ tiene más de una componente, y la remoción de solo algunos vértices de S no desconecta G . Del mismo modo se define que un conjunto de aristas $F \subset E(G)$ es un *corte de aristas* (*edges cut*) sii $G - F$ tiene más de una componente, y la remoción de solo algunas aristas de F no desconecta G . La *vértice-conectividad* $\kappa(G)$ es el mínimo cardinal de S tal que $G - S$ es no conexo o tiene un solo vértice, y si $k \leq \kappa(G)$ el grafo es k -vértice-conexo. La *arista-conectividad* $\lambda(G)$ es el mínimo cardinal de F tal que $G - F$ es no conexo, y si $k \leq \lambda(G)$ el grafo es k -arista-conexo.

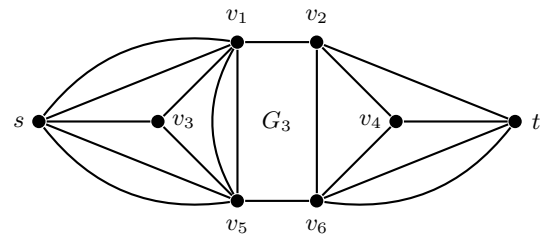
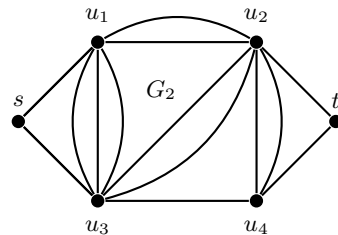
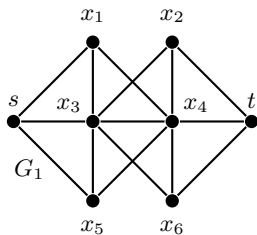
Probar que si $\delta(G)$ es el mínimo grado de G se verifica que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. Dar conjuntos de cortes y determinar la conectividad (de vértices y aristas) de los grafos de la figura y de: (a) K_n ; (b) $K_{1,q}$; (c) $K_{p,q}$; (d) $C_n, n \geq 2$; (e) $P_n, n \geq 2$; (f) T , donde T es un árbol con $|V(T)| \geq 2$.



♣ (Resp. Parcial). Si el grafo G es K_n , se tiene, según las definiciones anteriores, que $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = n - 1$, de modo que para K_n se cumple que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$; sea ahora G simple distinto de K_n . Por definición de $\delta(G)$, si $u \in V(G)$ es tal que $d(u) = \delta(G)$ el conjunto F de las $\delta(G)$ aristas que inciden en u es un corte (pues desconecta el vértice u de los restantes, ver Fig. 1), y siendo $\lambda(G)$ el cardinal de un corte de aristas minimal, resulta que $\lambda(G) \leq \delta(G)$. Como G no es K_n , se sabe que $\lambda(G) \leq \delta(G) \leq n - 2$, por lo que hay al menos un corte F de cardinal $\lambda(G)$ que separa el grafo G en dos componentes conexas G_1 y G_2 (ver Fig. 2), pero la remoción de estas $\lambda(G)$ aristas de F también se logra eliminando un conjunto de vértices adecuadamente escogidos de ambas componentes, de modo de no dejar vacía ninguna de ellas incidentes sobre esas aristas, y entonces se tiene un corte de vértices S (por ejemplo, $S = \{v_1, u_3, u_4\}$ en la Fig. 2): en efecto, ya que a lo sumo deben eliminarse $n - 2$ aristas, y en cada paso se elimina *al menos* una de estas $n - 2$, puede completarse la eliminación sin vaciar G_1 ni G_2 (¿por qué?). Así, el cardinal de $|S|$ es a lo sumo $\lambda(G)$; luego como por definición de $\kappa(G)$ debe ser $\kappa(G) \leq |S|$, y se tiene que $|S| \leq \lambda(G)$, resulta que $\kappa(G) \leq \lambda(G)$; esto completa la prueba de que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ para los grafos *simples*. Sea ahora G un grafo cualquiera, posiblemente con lazos y aristas múltiples (por ejemplo, como en Fig. 3), y sea G_s obtenido el grafo simple obtenido colapsando sus aristas múltiples en una simple y suprimiendo sus lazos. En tal transformación, $\kappa(G) = \kappa(G_s)$ y $\lambda(G_s) \leq \lambda(G)$ (¿por qué?), y como *ya* se probó que para G_s es $\kappa(G_s) \leq \lambda(G_s)$ resulta que $\kappa(G) = \kappa(G_s) \leq \lambda(G_s) \leq \lambda(G)$, de modo que *también* para un grafo no simple es $\kappa(G) \leq \lambda(G)$, lo que concluye la prueba de que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. Para el resto, es $\kappa(G_1) = \lambda(G_1) = 5$; $\kappa(G_2) = \lambda(G_2) = 1$; $\kappa(G_3) = \lambda(G_3) = 1$; $\kappa(G_4) = 1, \lambda(G_4) = 2$; $\kappa(G_5) = 2, \lambda(G_5) = 3$; $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n - 1$; $\kappa(K_{1,q}) = \lambda(K_{1,q}) = 1$; $\kappa(K_{p,q}) = \lambda(K_{p,q}) = \min\{p, q\}$; $\kappa(C_n) = 2, \lambda(C_n) = 2$; $\kappa(P_n) = \lambda(P_n) = 1$; $\kappa(T) = \lambda(T) = 1$.



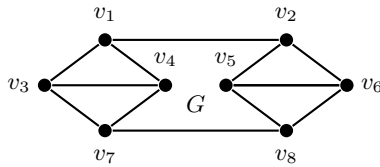
48. *Separaciones.* Sea $G = (V(G), E(G))$ conexo y s y t dos vértices en $V(G)$. Dos o más s - t paths son de *arista-disjuntos* (de *vértice-disjuntos*) si no comparten aristas (vértices, excepto los extremos). Un subconjunto de $E(G)$ (de $V(G)$) *separa* s de t si su remoción destruye todo path entre s y t . Probar que la máxima cantidad de paths arista-disjuntos (o vértice-disjuntos) no supera la mínima cantidad de aristas (vértices) que separan s de t (de hecho, son iguales) y determinar la máxima cantidad de s - t paths disjuntos (vértices o aristas) de cada uno de los grafos de la figura y también de $K_{p,q}$. ¿Pueden dos paths ser vértice-disjuntos y no arista-disjuntos, o viceversa?



♣ (Resp. Parcial). Para $K_{p,q}$ la máxima cantidad de paths disjuntos (vértices o aristas) es $\min\{p, q\}$. Si un par de paths vértice-disjuntos no fuese arista-disjuntos compartirían una arista, pero entonces tendrían al menos un vértice (distinto de los extremos del path) común, contradicción que prueba que un par de paths vértice-disjuntos es necesariamente arista-disjuntos; la recíproca es falsa (¡probarlo!). Para G_1 hay un máximo de tres paths arista-disjuntos (por ejemplo, $s x_1 x_4 t$; $s x_3 x_2 t$; $s x_5 x_4 x_6 t$) y dos paths

vértice-disjuntos (por ejemplo, $s x_1 x_4 t; s x_3 x_6 t$). Para G_2 , y también para G_3 un subconjunto de aristas (de vértices) que separa s de t tiene al menos dos elementos; por ejemplo, en G_2 , el conjunto formado por los vértices u_2 y u_3 (de las aristas $u_2 t$ y $u_4 t$) separan s y t .

49. (+) *Mix.* Determinar (y probar) el valor de verdad de la siguiente proposición: si $G = (V(G), E(G))$ es un grafo simple planar de arista-conectividad $\lambda(G) = 2$ y grado mínimo $\delta(G) = 3$, entonces su grafo dual G^* es simple.

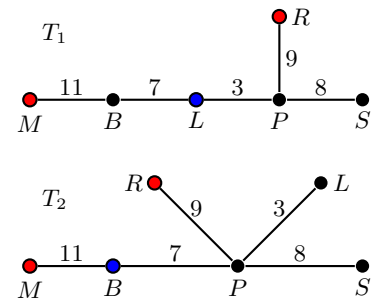


♣ (Resp. Parcial). La proposición es falsa, el grafo conexo G de la figura es planar, simple, de grado mínimo 3, siendo su conectividad de aristas 2, pues el corte de aristas dado por $S = \{v_1 v_2, v_7 v_8\}$ desconecta el grafo (y no habiendo puentes, no hay un corte de aristas que desconecte el grafo y tenga menor cardinal). Pero el dual G^* de G no puede ser simple, lo que se advierte sin necesidad de construirlo, basta observar que tendrá dos vértices de grado 6 (¿correspondientes a qué caras?) unidos por dos aristas paralelas (¿por qué?, ¿a qué corresponden en G ?: identificarlas).

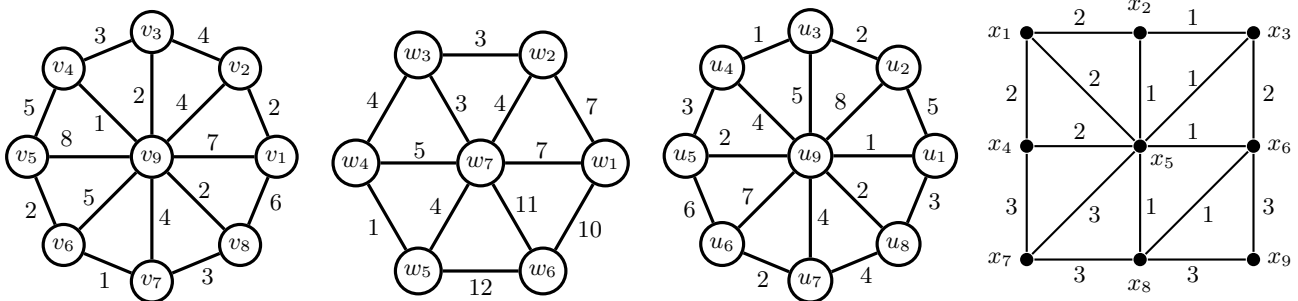
50. (-) *Prim.* La tabla muestra las distancias (km) de las rutas de tierra que conectan seis ciudades (B, L, M, P, R, S). Determinar, mediante el algoritmo de Prim iniciado en R , todas las posibles formas de conectar las ciudades minimizando la cantidad de kilómetros a asfaltar, y para cada una de esas formas obtenidas, determinar las ciudades que quedan en el centro y las que quedan en la periferia del sistema asfaltado, y determinar el diámetro del árbol resultante

	B	L	M	P	R	S
B	-	7	11	7	10	15
L	7	-	18	3	12	11
M	11	18	-	18	20	27
P	7	3	18	-	9	8
R	10	12	20	9	-	13
S	15	11	27	8	13	-

♣ (Resp. Parcial). Son dos los árboles posibles, indicados con T_1 y T_2 en la figura, de peso $11+7+7+9+8 = 38$; iniciando el algoritmo de Prim en R , debe conectarse necesariamente con P (pues la arista RP tiene el peso mínimo entre todas las que inciden en R), ahora debe añadirse necesariamente PL y a continuación puede elegirse añadir la arista LB o la arista PB , ambas de peso 7, el menor peso de entre las aristas todavía disponibles que agrandan el árbol hasta allí presente; si se elige la arista LB el resto de la construcción es única y resulta en T_1 ; en otro caso, eligiendo PB , las restantes elecciones son también únicas y arrojan el árbol T_2 . Para el primer árbol, L es central (con excentricidad 18), M y R periféricos (ambos con excentricidad 30); en cambio, para el segundo árbol, B es central (excentricidad 16), M y R periféricos (excentricidad 27). El diámetro del primer árbol es $\phi(T_1) = 30$, mientras que para el segundo árbol es $\phi(T_2) = 27$.



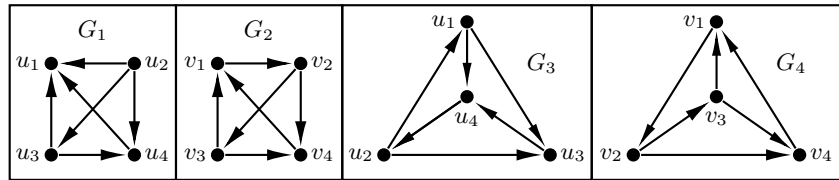
51. (-) *Prim, Kruskal.* La figura presenta grafos ponderados $G = (V(G), E(G))$, con el número junto a cada arista de E indicando su correspondiente peso. Aplicar a cada grafo el algoritmo de *Prim* para obtener un árbol generador mínimo T , detallando cada paso de la secuencia que permite construirlo. Rehacer, ahora con el algoritmo de *Kruskal*.



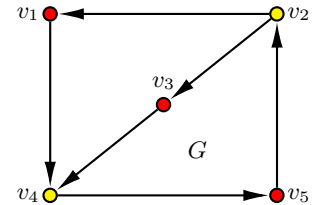
♣ (Resp. Parcial). Basta aplicar el algoritmo correspondiente. Para el último grafo, cualquier árbol generador minimal tiene peso 14.

52. (-) *Digraph.* Para cada grafo orientado (*digraphs*) dar su matriz de adyacencia A e incidencia M , determinar la sucesión gráfica entrante d^+ y saliente d^- , verificando que la suma de los grados entrantes es igual a la suma de los salientes e igual a la cantidad de aristas (*handshaking di-lemma*) y determinar cuáles son iguales, cuáles son isomorfos (definiendo el isomorfismo) y cuáles no. ¿Alguno es fuertemente conexo? ¿euleriano? ¿hamiltoniano?

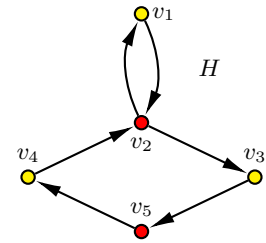
♣ (Resp. Parcial). $G_2 = G_4$, $G_3 \cong G_4$, G_1 no es isomorfo a ningún otro; $d^+(G_2) = (1, 1, 2, 2)$, $d^+(G_1) = (0, 1, 2, 3)$, solo G_1 no es fuertemente conexo, ninguno euleriano, G_2 (i. e. G_3 y G_4) es hamiltoniano, como lo prueba el ciclo $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$.



53. (-) *Digraph, mix.* Sea el grafo orientado fuertemente conexo $G = (V(G), E(G))$ de orden $n(G) = |V(G)|$ y tamaño $m(G) = |E(G)|$ de número cromático $\chi(G) = 2$ representado en la figura. Proponer, siempre que exista, un grafo orientado H euleriano y fuertemente conexo que, no siendo isomorfo a G , tenga el mismo orden, tamaño, radio, diámetro, número cromático, centro y periferia que el grafo G . Verificar que el grafo orientado propuesto cumple todas estas características o probar que no existe ninguno que lo haga.

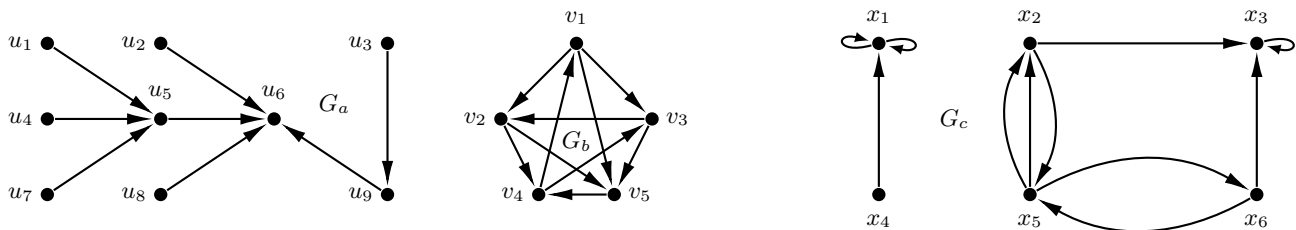


♣ (Resp. Parcial). El *digraph* H representado en la figura es del mismo orden ($n(H) = 5$) que el dado y no es isomorfo a G , pues el grafo subyacente G_s no es simple (tiene una arista doble conectando v_1 con v_2), como sí lo es el de G . Los vértices centrales del grafo propuesto son v_2, v_4, v_5 (¿cuál es su excentricidad?) y los periféricos v_1, v_3 (¿excentricidad?), que coinciden con los de G (probarlo), ambos de tamaño $m(H) = m(G) = 6$, radio $r(G) = r(H) = 3$ y diámetro $\phi(G) = \phi(H) = 4$. Por otra parte, es euleriano, como lo prueba el *circuito* (camino cerrado sin aristas repetidas) $v_1 v_2 v_3 v_5 v_4 v_2 v_1$ que incluye todas sus aristas; es fuertemente conexo, pues el circuito anterior (¡que no es un *ciclo*!) incluye todos sus vértices, de modo que siempre existe un camino (orientado, desde luego) entre v_i y v_j , cualesquiera sean i, j entre 1 y 5. Finalmente, H no es hamiltoniano ya que v_2 es una *articulación*.



54. (+) *Digraph.* Siempre que existan, graficar y dar la matriz de adyacencia (e incidencia) de grafos orientados cuyas sucesiones de grados sean: (a) $d^+(G_a) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 4)$, $d^-(G_a) = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$; (b) $d^+(G_b) = (1, 2, 2, 2, 3) = d^-(G_b)$; (c) $d^+(G_c) = (0, 1, 2, 2, 3, 3)$, $d^-(G_c) = (1, 1, 2, 2, 2, 3)$; (d) $d^+(G_d) = (0, 0, 1, 1, 2, 6)$, $d^-(G_d) = (0, 1, 2, 2, 2, 3)$. Determinar si son fuertemente conexos. ¿Qué relación hay entre la matriz de adyacencia de un grafo orientado y sus sucesiones gráficas?

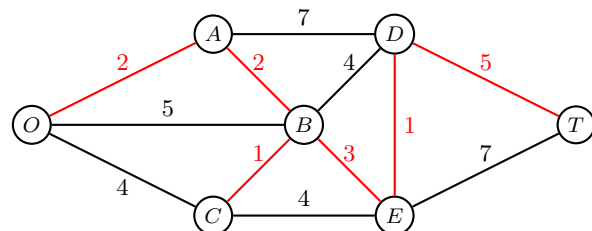
♣ (Resp. Parcial). El elemento k -ésimo de $d^+(G)$ es la suma de los elementos de la k -ésima columna de la matriz de adyacencia de G (la misma correspondencia entre $d^-(G)$ y filas). En la figura se muestran los grafos G_a, G_b, G_c que satisfacen las sucesiones dadas.



55. (-) *Optimización.* La tabla muestra las longitudes (km) de los senderos entre diversas estaciones de un parque preservado; el nodo O constituye el acceso al parque. Representar el grafo ponderado correspondiente e indicar cómo minimizar las perturbaciones para conectar las siete estaciones con un cableado de longitud mínima. Determinar además una ruta más corta entre la entrada O y el puesto T detallando el algoritmo utilizado. ¿Es única?

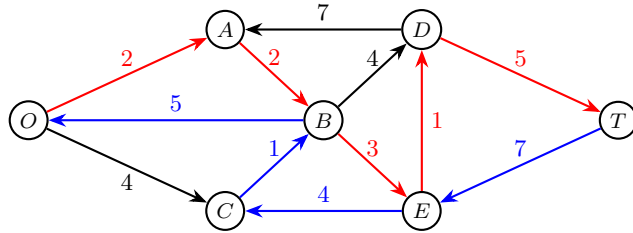
	O	A	B	C	D	E	T
O	×	2	5	4	×	×	×
A	2	×	2	×	7	×	×
B	5	2	×	1	4	3	×
C	4	×	1	×	×	4	×
D	×	7	4	×	×	1	5
E	×	×	3	4	1	×	7
T	×	×	×	×	5	7	×

♣ (Resp. Parcial). El grafo ponderado con las distancias se muestra en la figura; las aristas rojas construyen un árbol que minimiza la longitud a cablear (14 km); una ruta de longitud mínima (13 km) es $OABEDT$ y otra es $OABDT$.



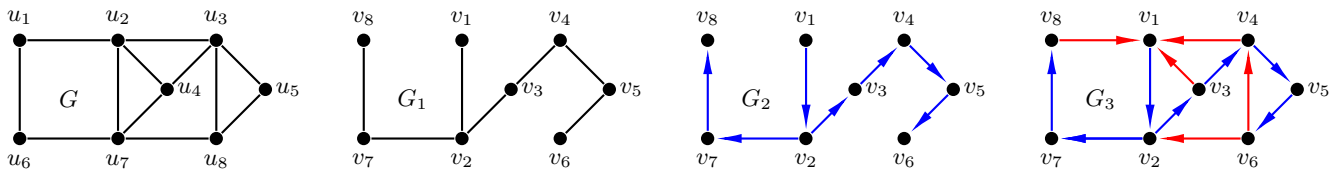
56. (–) *Optimización*. Introducir, siempre que sea posible, en el parque del ejercicio anterior una orientación a cada uno de los caminos con la condición de que el grafo orientado resultante sea fuertemente conexo (esto es que desde cualquier punto se pueda ir a cualquier otro punto), escribir la tabla de adyacencias, representar gráficamente la red y determinar una ruta de longitud mínima entre O y T y una de longitud mínima entre T y O .

♣ (Resp. Parcial). Una orientación (no única) posible es la representada en la figura, con la ruta roja de longitud mínima (13 km) entre O y T , la ruta azul de longitud mínima (17 km) entre T y O (observar que la introducción de una orientación en general rompe la simetría del ir y volver). Observar de paso que si existe un camino cerrado que pase por todos los nodos (como lo es la yuxtaposición del rojo con el azul, que no es un circuito ni un ciclo), entonces necesariamente puede irse de cualquier nodo a cualquier otro, dando la conexidad fuerte, tal como lo exige el enunciado.



	O	A	B	C	D	E	T
O	×	2	×	4	×	×	×
A	×	×	2	×	×	×	×
B	5	×	×	×	4	3	×
C	×	×	1	×	×	×	×
D	×	7	×	×	×	×	5
E	×	×	×	4	1	×	×
T	×	×	×	×	×	7	×

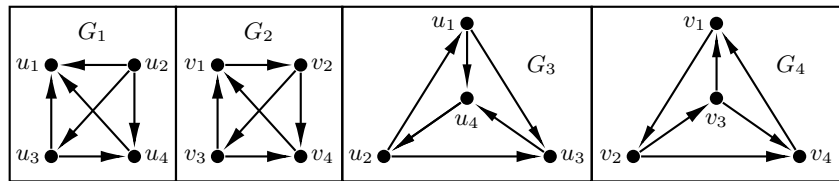
57. *Digraph*. En todo grafo conexo sin puentes puede introducirse una orientación tal que resulte fuertemente conexo: basta numerar sus vértices con subíndices crecientes en el proceso de construcción de búsqueda en profundidad (DFS: *depth first search*) de un árbol generador, orientando las aristas del árbol como $(v_i, v_j), i < j$, mientras que las restantes como $(v_j, v_i), i < j$. Introducir una orientación fuerte en el siguiente grafo y calcular radio, diámetro, centro y periferia del grafo original y del grafo orientado (*digraph*) resultante. ¿Es hamiltoniano? ¿transitivo?



♣ (Resp. Parcial). G es conexo sin puentes; G_1 es un DFS árbol generador (DFS *spanning tree*) de G iniciado en el vértice u_2 (y entonces etiquetado v_1) siguiendo en profundidad por $u_7 u_4 u_3 u_5 u_8$ (etiquetados $v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$), regresando a u_7 (único vértice previo donde el aumento de profundidad no genera ciclos) y desde allí $u_6 u_1$. G_2 orienta el árbol G_1 con vértices de índices crecientes (aristas utilizadas, azules) y G_3 completa la orientación con índices decrecientes (aristas no utilizadas, rojas); el diámetro de G_3 es 7, el vértice v_7 está en su periferia, el radio es 4 y v_5 pertenece a su centro. G_3 no es hamiltoniano ni transitivo (¡probarlo!).

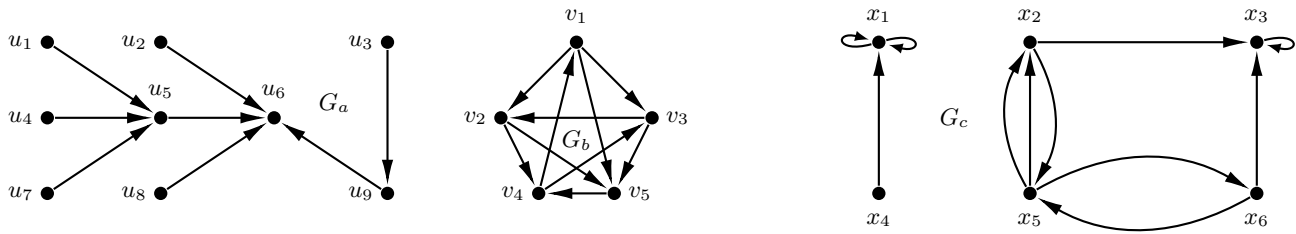
58. (–) *Digraph*. Para cada grafo orientado (*digraphs*) dar su matriz de adyacencia A e incidencia M , determinar la sucesión gráfica entrante d^+ y saliente d^- , verificando que la suma de los grados entrantes es igual a la suma de los salientes e igual a la cantidad de aristas (*handshaking di-lemma*) y determinar cuáles son iguales, cuáles son isomorfos (definiendo el isomorfismo) y cuáles no. ¿Alguno es fuertemente conexo? ¿euleriano? ¿hamiltoniano?

♣ (Resp. Parcial). $G_2 = G_4$, $G_3 \cong G_4$, G_1 no es isomorfo a ningún otro; $d^+(G_2) = (1, 1, 2, 2)$, $d^+(G_1) = (0, 1, 2, 3)$, solo G_1 no es fuertemente conexo, ninguno euleriano, G_2 (i. e. G_3 y G_4) es hamiltoniano, como lo prueba el ciclo $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$.



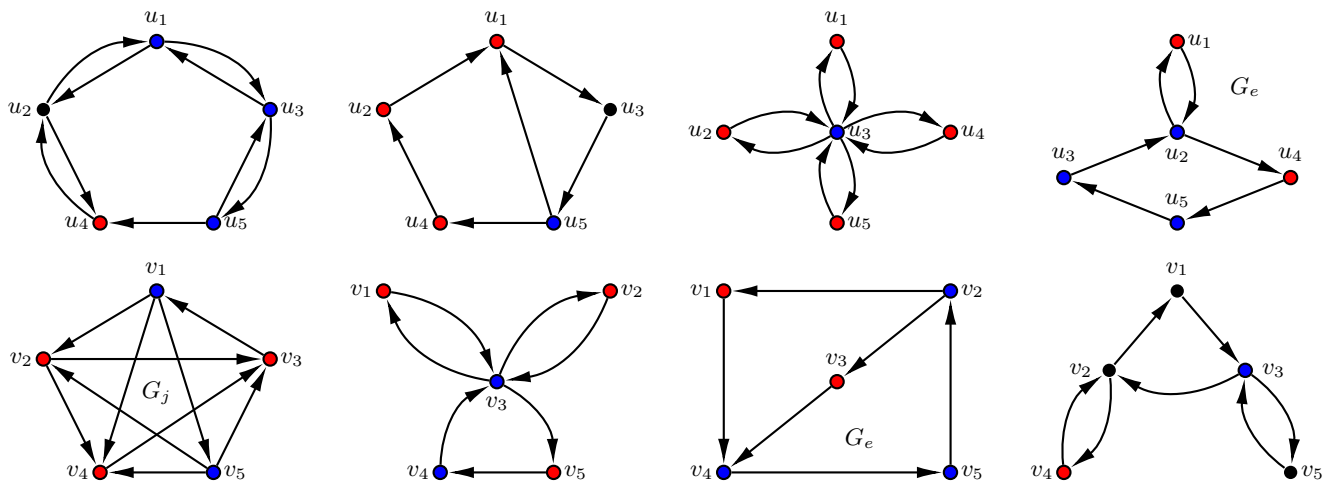
59. (+) *Digraph*. Siempre que existan, graficar y dar la matriz de adyacencia (e incidencia) de grafos orientados cuyas sucesiones de grados sean: (a) $d^+(G_a) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 4)$, $d^-(G_a) = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$; (b) $d^+(G_b) = (1, 2, 2, 2, 3) = d^-(G_b)$; (c) $d^+(G_c) = (0, 1, 2, 2, 3, 3)$, $d^-(G_c) = (1, 1, 2, 2, 2, 3)$; (d) $d^+(G_d) = (0, 0, 1, 1, 2, 6)$, $d^-(G_d) = (0, 1, 2, 2, 2, 3)$. Determinar si son fuertemente conexos. ¿Qué relación hay entre la matriz de adyacencia de un grafo orientado y sus sucesiones gráficas?

♣ (Resp. Parcial). El elemento k -ésimo de $d^+(G)$ es la suma de los elementos de la k -ésima columna de la matriz de adyacencia de G (la misma correspondencia entre $d^-(G)$ y filas). En la figura se muestran los grafos G_a, G_b, G_c que satisfacen las sucesiones dadas.

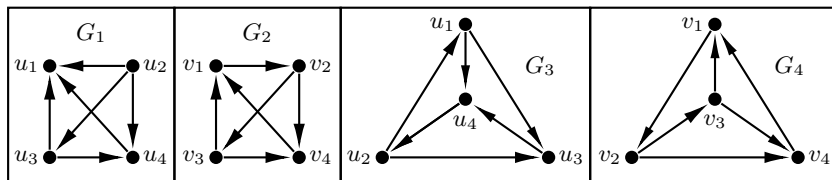


60. (+) *Mix.* Proponer en cada caso, siempre que exista, un grafo orientado (*digraph*) $G = (V(G), E(G))$ de orden $5 = |V(G)|$ que sea *fuertemente conexo* (hay un *path* orientado desde cualquier vértice a cualquier otro) cuyo tamaño $m = |E(G)|$, radio $r(G)$ y diámetro $\phi(G)$ sean los indicados, determinando para cada uno de ellos el centro $C(G)$ y la periferia $P(G)$, y si son eulerianos o hamiltonianos. ¿Las condiciones exigidas los caracterizan, en cada caso, por completo? Dar sus sucesiones de grados entrantes (d^+) y salientes (d^-). (a) $m = 5, r(G) = 4, \phi(G) = 4, |C(G)| = 5, |P(G)| = 5$; (b) $m = 9, r(G) = 2, \phi(G) = 4, |C(G)| = 3, |P(G)| = 1$; (c) $m = 6, r(G) = 2, \phi(G) = 4, |C(G)| = 1, |P(G)| = 3$ (d) $m = 8, r(G) = 1, \phi(G) = 2, |C(G)| = 1, |P(G)| = 4$; (e) $m = 6, r(G) = 3, \phi(G) = 4, |C(G)| = 3, |P(G)| = 2$; (f) $m = 7, r(G) = 2, \phi(G) = 3, |C(G)| = 2, |P(G)| = 3$; (g) $m = 7, r(G) = 2, \phi(G) = 4, |C(G)| = 1, |P(G)| = 1$; (h) $m = 20, r(G) = 1, \phi(G) = 1, |C(G)| = 5, |P(G)| = 5$. (i) $m = 14, r(G) = 1, \phi(G) = 3, |C(G)| = 2, |P(G)| = 2$; (j) $m = 10, r(G) = 2, \phi(G) = 3, |C(G)| = 2, |P(G)| = 3$.

♣ (Resp. Parcial). Existe un grafo para cada uno de los casos, algunos de los cuales se indican en las figuras siguientes (identificarlos). Los vértices azules son centrales; los rojos, periféricos. La caracterización no es completa: por ejemplo, se representan dos grafos no isomorfos (¿cuáles?) del caso (e). El grafo G_j es hamiltoniano ($v_2 v_4 v_3 v_1 v_5 v_2$), no es euleriano ni semieuleriano y $d^+(G_j) = (1, 1, 2, 3, 3), d^-(G_j) = (1, 1, 2, 3, 3)$.

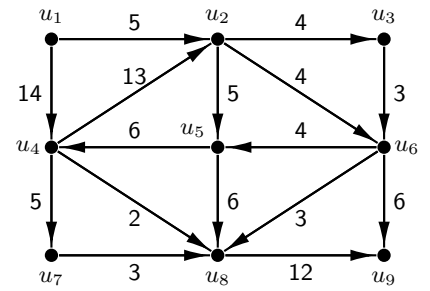


61. (-) *Torneos.* Para cada uno de los cuatro *torneos* $G = (V(G), E(G))$ (*tournaments*: grafo orientado con grafo subyacente completo) determinar su radio y diámetro, centro y periferia, las sucesiones gráficas entrantes d^+ y salientes d^- verificando que la suma de los grados entrantes es igual a la suma de los salientes e igual a la cantidad de aristas (*handshaking di-lemma*) y determinar cuáles son iguales, cuáles son isomorfos y cuáles no. ¿Alguno es fuertemente conexo? ¿euleriano? ¿hamiltoniano? ¿transitivo?



♣ (Resp. Parcial). $G_2 = G_4, G_3 \cong G_4, G_1$ no es isomorfo a ningún otro; $d^+(G_2) = (1, 1, 2, 2), d^+(G_1) = (0, 1, 2, 3)$, solo G_1 no es fuertemente conexo, ninguno es euleriano, G_2 es hamiltoniano ($v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$).

62. (–) *Ford-Fulkerson* Sea $G = (V(G), E(G))$ la red de la figura con las capacidades indicadas por los números junto a cada arista.



- (a) Aplicar, detallando todos los pasos, el algoritmo de Ford-Fulkerson que permite obtener un flujo máximo de G . ¿En cuánto podría reducirse la capacidad de la arista $u_5 u_4$ sin alterar el flujo máximo?
- (b) En G el *alcance* $a(u_i)$ de un vértice u_i es el conjunto de vértices u_j tales que hay un camino (orientado) desde u_i a u_j . En V se define $u_i \mathcal{R} u_j$ sii $a(u_i) \subseteq a(u_j)$. Determinar si \mathcal{R} es una relación de orden en $V(G)$.
- (c) En $V(G)$ se define la relación $u_i \mathcal{R} u_j$ sii $i = j$ o $(i \neq j)$ si existe un camino orientado de u_i a u_j . Determinar si \mathcal{R} es una relación de orden en $V(G)$.

♣ (Resp. Parcial). Basta aplicar el algoritmo; la arista puede reducir su capacidad a 0. La relación definida en (b) no es de orden: puesto que el alcance de u_2 es (verificarlo) el conjunto $V(G) - u_1$, y el alcance de u_4 es también ese conjunto (basta ver que desde u_4 se accede a u_2 , de modo que $u_2 \mathcal{R} u_4$ a la vez que $u_4 \mathcal{R} u_2$ y como $u_2 \neq u_4$, resulta que \mathcal{R} no es antisimétrica.

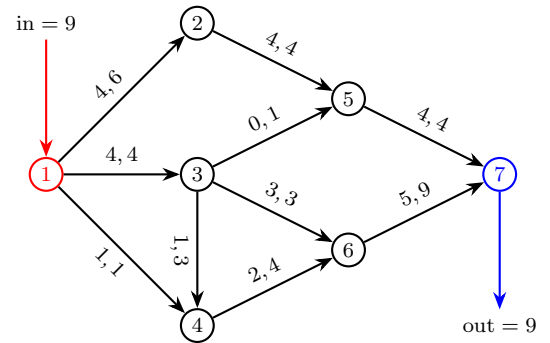
63. (a) (–) *Flujo en red*. La tabla muestra las capacidades de una red de transporte que tiene al nodo 1 como fuente y al nodo 7 como destino. Asignar un flujo a cada una de las rutas de manera que la cantidad transportada sea máxima.
- (b) (↔) Por cuestiones técnicas la ruta entre los nodos 3 y 6 podría eventualmente quedar fuera de servicio por un período equivalente al de la unidad de tiempo de los flujos. En ese caso ¿disminuiría el flujo máximo? Si la respuesta es afirmativa, determinar la nueva distribución máxima.

Capacidades de la red (unidades)

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	6	4	1	×	×	×
2	×	×	×	×	4	×	×
3	×	×	×	3	1	3	×
4	×	×	×	×	×	4	×
5	×	×	×	×	×	×	4
6	×	×	×	×	×	×	9
7	×	×	×	×	×	×	×

♣ (Resp. Parcial). (a) El grafo orientado de la figura muestra un flujo máximo a través de la red definida por la matriz de capacidades (el primer número sobre cada arista indica el flujo asignado, el segundo la capacidad). (b) Si se interrumpe la ruta 3 – 6, el máximo flujo se reduce en una unidad y se logra asignando los flujos según la siguiente tabla.

arco	12	13	14	25	34	35	36	46	57	67
flujo	4	3	1	4	3	0	0	4	4	4



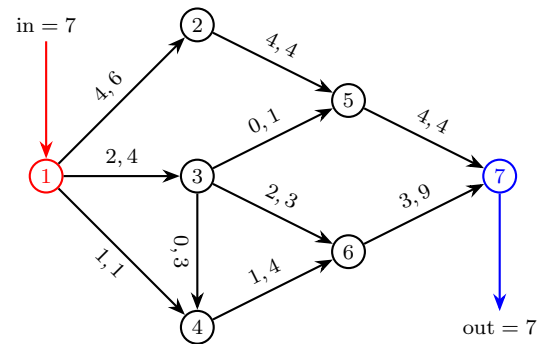
64. (a) (–) *Flujo en red*. La tabla muestra los costos unitarios (en miles de pesos) de la red de transporte cuyas capacidades son las establecidas en el ejercicio 25. Se quiere asignar la distribución de un flujo de valor 7 entre el nodo 1 y el nodo 7 de manera que el costo resulte mínimo.
- (b) (↔) Se presume que dificultades técnicas próximamente llevarán a que el costo unitario del transporte del tramo 3 – 6 se duplique, permaneciendo fijos los restantes. ¿Será necesario en tal caso reprogramar los volúmenes de transporte si se quiere obtener todavía el mínimo costo posible? ¿Qué porcentaje de incremento tendrá el total?

Costos unitarios de la red en miles \$/u

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	10	20	15	×	×	×
2	×	×	×	×	25	×	×
3	×	×	×	30	35	40	×
4	×	×	×	×	×	45	×
5	×	×	×	×	×	×	50
6	×	×	×	×	×	×	55
7	×	×	×	×	×	×	×

♣ (Resp. Parcial). (a) El grafo orientado de la figura muestra un flujo de valor 7 a través de la red (el primer número sobre cada arista indica el flujo asignado, el segundo la capacidad), que minimiza el costo en un valor de \$685000. (b) El costo se incrementa en un poco más del 11% (pasa a \$755000) y se logra asignando los flujos según la siguiente tabla.

arco	12	13	14	25	34	35	36	46	57	67
flujo	4	2	1	4	2	0	0	3	4	3



65. (+) (Mix) Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones, detallando la prueba en caso de ser verdadera o un contraejemplo en caso de ser falsa (casi todas estas cuestiones han sido ya respondidas en esta guía).
- (-) Todo grafo simple G de orden $n = |V(G)| \geq 2$ tiene al menos dos vértices de igual grado; existen grafos con lazos o aristas múltiples sin vértices del mismo grado.
 - (+) Sean n (con $n > 1$) números naturales d_1, d_2, \dots, d_n tales que $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Para que estos números sean los grados de los vértices de algún grafo sin lazos G de orden n es necesario y suficiente que se cumplan las dos condiciones siguientes:
 - $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ es par, (ii) $d_n \leq d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}$.
 - (-) Si A es la matriz de adyacencia de un grafo conexo G de orden $n(G) = |V(G)| \geq 2$, entonces todos los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz $B = \sum_{k=1}^{n-1} A^k$ son nulos. ¿La recíproca? ¿Vale lo mismo si el grafo es orientado fuertemente conexo?
 - En un grafo G cualquier camino (*walk*) entre v_0 y v_n contiene un camino simple (*path*) entre esos vértices; además si $\delta(G) \geq k$, entonces G tiene un camino simple (*path*) de longitud k .
 - Todo grafo simple G de orden $n = |V(G)|$ cuyo grado mínimo cumple $\delta(G) \geq (n-1)/2$ es conexo.
 - Si G es un grafo de orden $6 = |V(G)|$, entonces o bien G o bien su complemento G' contienen un triángulo.
 - (-) Si el diámetro del grafo simple G es $\phi(G) \geq 3$, entonces el diámetro de su complemento es $\phi(G') \leq 3$; si en cambio es $\phi(G) \geq 4$, se tiene que $\phi(G') \leq 2$.
 - (-) Existe $n > 2$ tal que el grafo G de orden $n = |V(G)|$ y tamaño $m = |E(G)|$ con $m = n - 2$ es conexo.
 - (-) Todo camino simple (*path*) es bipartito y un ciclo (*cycle*) es bipartito sii su longitud es par.
 - En un grafo simple $G = (V(G), E(G))$ de orden $n = |V(G)|$ y tamaño $m = |E(G)|$, debe ser $m \leq \binom{n}{2}$, con la igualdad sii el grafo es K_n ; si G es un bipartito $G(X, Y)$, debe ser $m \leq |X||Y| \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.
 - Los grafos simples G, H con matrices de adyacencia A_G, A_H son isomorfos sii existe una matriz de permutación P tal que $A_H = PA_G P^T$.
 - Un grafo G y su complemento G' no pueden ser ambos eulerianos (ni ambos hamiltonianos).
 - Si el grado mínimo δ de un grafo de orden n no satisface la condición $\delta \geq n/2$, entonces no es hamiltoniano.
 - Todo grafo simple G de orden $n = |V(G)|$ cuyo grado mínimo δ satisface $\delta \geq (n-1)/2$ es hamiltoniano.
 - (+) Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es bipartito sii carece de ciclos de longitud impar.
 - Un grafo $F = (V(F), E(F))$ es un bosque (*forest*: grafo que carece de ciclos) sii para todo par x, y de vértices distintos de $V(F)$ hay a lo sumo un *path* entre x e y .
 - El algoritmo de Kruskal (o el de Prim) aplicado a un grafo en el que ninguna de sus ramas tienen el mismo peso, produce un árbol generador mínimo *único*.
 - (+) Todo árbol $T = (V(T), E(T))$ de orden $n = |V(T)| \geq 2$ tiene al menos dos hojas (*leaves* vértices de grado 1); además, borrar una hoja de T produce un árbol de orden $n - 1$. Además, el cardinal de su centro $C(T)$ es 1 o es 2
 - Un grafo es un árbol sii carece de lazos y tiene un único árbol generador.
 - (-) Si x e y son dos vértices adyacentes del grafo conexo $G = (V(G), E(G))$, entonces cualquiera sea $z \in V(G)$ se tiene $|d(z, x) - d(z, y)| \leq 1$.
 - (-) Todo árbol $T = (V(T), E(T))$ de orden $n = |V(T)| \geq 2$ es bipartito, y la parte de mayor tamaño tiene una hoja (ambas partes, si son de igual tamaño).
 - Un grafo de orden $n \geq 2$ es bipartito sii todos sus ciclos son de longitud par; además la suma de sus grados no excede de n^2 .
 - (-) Si un grafo tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces hay un camino entre esos dos vértices.
 - Un grafo simple con $n = |V(G)|$ vértices y k componentes tiene un tamaño $m = |E(G)|$ que cumple $m \leq (n-k)(n-k+1)/2$.
 - En un grafo orientado $G = (V(G), E(G))$ con $n = |V(G)|$ se verifica que $\sum_{k=1}^n d_k^+ = \sum_{k=1}^n d_k^-$; si además el grafo subyacente es K_n , se cumple $\sum_{k=1}^n (d_k^+)^2 = \sum_{k=1}^n (d_k^-)^2$.
 - Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es bipartito sii sus componentes conexas son bipartitas.

♣ (Resp. Parcial).

(a) La proposición es verdadera (el grado de un vértice pertenece al conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ y si fueran todos distintos habría una de grado $n-1$ que conecta con todos y uno aislado de grado 0, lo que es imposible. El grafo con un lazo de $d = (1, 3)$ y el grafo con una arista múltiple de $d = (1, 2, 3)$ prueban la segunda parte de la afirmación).

(b) Es verdadera. La necesidad es inmediata, si $G = (V(G), E(G))$ es de orden $n = |V(G)|$ y tamaño $m = |E(G)|$ con sucesión de grados $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, la suma de sus grados es (*handshaking lemma*) $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2m$ que es par; por otra parte, toda arista que incide en el vértice $v_n \in V(G)$ (y hay $d_n = d(v_n)$ de ellas) también incide sobre alguno de los restantes (¡los lazos están prohibidos!), de modo que debe ser $d_n \leq d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}$. La suficiencia (inducción sobre $d_1 + d_2 + \dots + d_n$) es mucho más elaborada y técnica. Si $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2$ debe ser $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-2} = 0$ y $d_{n-1} = d_n = 1$, lo que es

satisfecho por el grafo de una arista y $n - 2$ vértices aislados. Ahora, supuesta verdadera para toda sucesión que satisface (i), (ii) y $d_1 + d_2 + \dots + d_n \leq 2d$ ($d \geq 2$), sea $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2(d + 1) = 2d + 2$, lo que exige considerar dos casos. El primero es que $d_{n-2} < d_n$, en cuyo caso $d_n - 1$ es el máximo de la sucesión $d_1, d_2, \dots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ y (de (i) y (ii)) resulta que se cumplen (dar detalles) $(\alpha) : d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} + (d_{n-1} - 1) + (d_n - 1) \equiv 0 \pmod{2}$, $(\beta) : d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} + (d_{n-1} - 1) \geq d_n - 1$; el segundo caso, si $d_{n-2} = d_n$, debe ser también $d_{n-1} = d_n$, cumpliéndose también (α) , mientras que (ii) (teniendo en cuenta que $d_{n-2} = \max(d_1, \dots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1)$) equivale a $d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} + (d_{n-1} - 1) + (d_n - 1) \geq d_{n-2}$, lo que también se cumple (¡completar detalles de esto que se afirma!). De ambos casos resulta que los números $d_1, \dots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ (¡que suman $2d$!) satisfacen (i) y (ii), de modo que, por hipótesis inductiva, existe un grafo con n vértices cuyos grados son esos números, y ahora basta con unir los vértices de grado $d_{n-1} - 1$ con los de grado $d_n - 1$ con una arista para obtener el grafo G de orden n cuyos grados son $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$. El principio de inducción completa hace el resto del trabajo.

(c) Es verdadera. Si el grafo es orientado y fuertemente conexo, para cualquier par de vértices u_i, u_j hay un $u_i - u_j$ path y un $u_j - u_i$ path, cuya longitud es lo sumo $n - 1$ (¿por qué?), y como el coeficiente $B(i, j)$ de la matriz B devuelve la cantidad de paths orientados entre el vértice u_i y el vértice u_j , debe ser necesariamente positivo. Recíprocamente, si $B(i, j) > 0$ para todo $i \neq j$, para cualquier par de vértices u_i, u_j hay un $u_i - u_j$ path y un $u_j - u_i$ path, pero esto significa que G es fuertemente conexo (se presume conocido el hecho de que $A^q(i, j)$ devuelve el número de $u_i - u_j$ paths de longitud exactamente q , para cada $q = 1, 2, \dots, n - 1$, pero es un buen ejercicio incluir aquí mismo esa prueba). Por supuesto, si el grafo no es orientado, los razonamientos son los mismos. La recíproca es también verdadera tanto para el grafo sin orientar como para el orientado fuertemente conexo.

(d) La proposición es verdadera (la segunda parte: cualquier vértice v_1 tiene $k - 1$ adyacentes, sea v_2 uno de ellos... por inducción también se prueba la primera parte).

(e) La proposición es verdadera (si G no es conexo, tiene al menos dos componentes conexas, si v es un vértice de una de ellas debe estar conectado con al menos $\delta(G)$ vértices de esa componente, que entonces debe tener al menos $(n - 1)/2 + 1 = (n + 1)/2$ vértices, de donde el número total de vértices n debe ser $n \geq 2(n + 1)/2 = n + 1$, lo que es una contradicción: luego no es posible que no sea conexo).

(f) La proposición es verdadera (cualquier vértice $u \in V(G)$ tiene o bien en G o bien en G' al menos tres vértices adyacentes ¿por qué? v_1, v_2, v_3 : si un par de ellos son adyacentes en G , forman con u un triángulo; si ningún par es adyacente, forman un triángulo en G').

(g) La proposición es verdadera (partir de que al ser $\phi(G) > 2$ existen dos vértices v_1, v_2 sin un vértice adyacente común a ambos, luego completar razonando sobre G' ; la segunda parte se deduce de la primera).

(h) La proposición es falsa (si G no tiene ciclos es un árbol y entonces debería ser $m = n - 1 = n - 2$, esto es $1 = 2$; si G no es un árbol, tiene un árbol generador T con $m_T < m = n - 2$ aristas, pero tal árbol de orden n debe tener $m_T = n - 1$ aristas, de modo que debería ser $n - 1 < n - 2$, esto es $2 < 1$).

(i) La proposición es verdadera.

(j) La proposición es verdadera (y la igualdad en la segunda afirmación sii el grafo es $K_{n/2, n/2}$).

(k) La proposición es verdadera

(l) La proposición es falsa (considerar C_5).

(m) La proposición es falsa (considerar C_n con $n \geq 5$).

(n) La proposición es falsa (considerar $K_{p,q}$ con $p = (n - 1)/2, q = (n + 1)/2$ donde n es cualquier impar, $n \geq 3$; también, examinar directamente P_3).

(o) La proposición es verdadera (el si: para un cualquier $x \in V$, sea $V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in V : d(x, y) \text{ es impar}\}, V_2 \stackrel{\text{def}}{=} V - V_1$, entonces si alguna arista uniera dos vértices de V_1 habría (¿por qué?) un ciclo impar; argumentar ahora porqué una arista tampoco puede unir dos vértices de V_2 y concluir que G es bipartito). Para la recíproca se necesita mucha más técnica.

(p) La proposición es verdadera (el si: Si $P = v_0 v_1 \dots v_q$ y $P^* = v_0 u_1 u_2 \dots v_q$ son dos paths distintos en F y $k + 1$ el menor índice para el que $v_{k+1} \neq u_{k+1}$ y j el menor índice tal que $j \geq k + 1$ y u_{j+1} es un vértice de P , esto es $u_{j+1} = v_h$, entonces $v_k v_{k+1} \dots v_h u_j u_{j-1} \dots u_{k+1} v_k$ es un ciclo en F ; para el solo si: de la existencia de un ciclo $v_0 v_1 \dots v_q v_0$ en F resulta que $v_0 v_1 \dots v_q$ y $v_0 v_q$ son dos paths en F).

(q) La proposición es verdadera.

(r) La proposición es verdadera. Si $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ es la sucesión de grados del árbol T , al ser conexo, $\delta(T) = d_1 \geq 1$ y como el tamaño es $m = |G| = n - 1$ (¡es buen ejercicio probar esta propiedad de un árbol cualquiera!), si tuviera a lo sumo un vértice de grado 1 se tendría por el *handshaking lemma* que $2m = 2n - 2 = \sum_{k=1}^n d_k \geq 1 + 2(n - 1)$, esto es $2n - 2 \geq 2n - 1$, lo que es imposible; además, si v es una hoja de T y $T_1 = T - v$ y para cualquier par $u, w \in V(T_1)$, todo path entre u y w en T es un path entre u y w en T_1 , pues la hoja v no puede ser parte de ese path (¡hacer un esquema!), de modo que T_1 es conexo, y como la operación de borrar un vértice no genera ciclos, T_1 es un conexo sin ciclos, esto es, un árbol de orden $n - 1$. Para la segunda parte, si T es de orden 1, es $C(T) = V(T)$ (y por lo tanto el cardinal de su centro es 1); si T es un árbol de orden 2, también es $C(T) = V(T)$ (y por lo tanto el cardinal de su centro es 2); si T es de orden 3, como tiene al menos dos hojas, tiene exactamente dos hojas (¿por qué?), de modo que su centro lo constituye el único vértice que no es una hoja (i.e. $|C(T)| = 1$). Si el orden de T es 4 es o bien $K_{1,3}$ cuyo centro tiene cardinal 1 o es P_4 cuyo centro lo constituyen los dos vértices que no son hojas. Ahora en general, si el orden n de T es $n \geq 5$, sea T_h el árbol obtenido de T borrando todas sus hojas: la excentricidad de los vértices

de T_h es la misma que la excentricidad de los mismos vértices en T disminuida en uno (¿por qué?), de modo que esta operación deja inalterado el centro de T . Ejecutando esta operación sucesivamente, se llega a un árbol de a lo sumo 4 vértices, con el mismo centro que el original, y todo árbol de a lo sumo cuatro vértices tiene un centro de cardinal 1 o 2.

(s) La proposición es verdadera (solo si: si G es un árbol, G es un árbol generador de G , y si hubiera otro, tendría una arista que no está en G , lo que es imposible; por otra parte, carece de ciclos y por lo tanto, de lazos).

(t) La proposición es verdadera (Un z, y -path puede ser extendido o recortado para alcanzar x , de modo que $d(z, x) \leq d(z, y) + 1$, y del mismo modo $d(z, y) \leq d(z, x) + 1$, que juntas prueban $|d(z, x) - d(z, y)| \leq 1$).

(u) La proposición es verdadera (Si X e Y son las dos partes de T , con $|X| \geq |Y|$, y X no tuviera hojas, entonces se tendría que $|E(T)| \geq 2|X| = |X| + |X| \geq |X| + |Y| = |V(T)|$, lo que es imposible pues en un árbol es $|E(T)| = |V(T)| - 1$).

(v) La proposición es verdadera (el solo si: con V_1, V_2 las partes de G , un ciclo $v_1 v_2 \cdots v_q v_1$ debe tener los vértices de subíndice impar en una de las partes (p.e. V_1) y los pares en la restante, de modo que q es par).

(w) La proposición es verdadera. Si no hubiera tal camino, estarían en diferentes componentes, y en cada una de ellas serían los únicos vértices de grado impar, lo que es imposible ¿por qué?.

(x) La proposición es verdadera.

(y) La proposición es verdadera (del *handshaking di-lemma* es $m = |E(G)| = \sum_{k=1}^n d_k^+ = \sum_{k=1}^n d_k^-$ (con d_k se indica el grado del vértice $v_k \in V(G)$); por otra parte si K_n es el grafo subyacente, para cada $v_k \in V(G)$ es $d_k^+ + d_k^- = n - 1$ de modo que $0 = (n - 1) \cdot 0 = \sum_{k=1}^n (n - 1)(d_k^+ - d_k^-) = \sum_{k=1}^n (d_k^+ + d_k^-)(d_k^+ - d_k^-) = \sum_{k=1}^n ((d_k^+)^2 - (d_k^-)^2)$ de donde $\sum_{k=1}^n (d_k^+)^2 = \sum_{k=1}^n (d_k^-)^2$).

(z) La proposición es verdadera (si G es bipartito, debe serlo cualquier subgrafo, en particular sus componentes; recíprocamente, si las componentes (bipartitas) de G son $G_k = ((X_k \cup Y_k), E_k)$, definiendo $X \stackrel{\text{def}}{=} \cup_k X_k, Y \stackrel{\text{def}}{=} \cup_k Y_k, E \stackrel{\text{def}}{=} \cup_k E_k$, el grafo G es $G = ((X \cup Y), E)$ es bipartito).