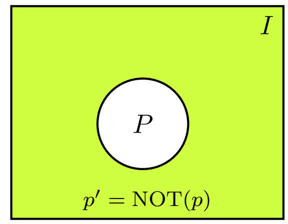
1. $(-)$ La *función proposicional* del argumento x escrita como $p(x)$ se convierte en una proposición $p(a)$ cuando al argumento x se le asigna un valor fijo a, tomado de un conjunto de referencia llamado I. Al conjunto de valores de $a \in I$ para los que la proposición $p(a)$ es verdadera se le llama *conjunto de veracidad* de la función y se lo designa con P, y la proposición que queda así definida se designa por p.

   (a) Escribir y representar las relaciones entre los conjuntos de veracidad correspondientes a la operación unaria negación p' (no p, NOT(p)), y las binarias disyunción $p+q$ (p o q, p OR q), la disyunción excluyente $p \oplus q$ (p o q pero no ambas, $p'q + pq'$, p XOR q), la conjunción pq (p y q, p AND q), el condicional $p \to q$ (p es condición suficiente para q, si p entonces q, q si p, p solo si q, q es condición necesaria de p, $p' + q$, NOT(p) OR q), su recíproca $q \to p$ (q es condición suficiente para p, si q entonces p, p si q, q solo si p, p es condición necesaria de q, $p + q'$, p OR NOT(q)), la equivalencia $p \leftrightarrow q$ (p es una condición necesaria y suficiente para q, p si y solo q, abreviado p sii q, $pq + p'q'$, NOT(p XOR q)).

   (b) Explicar la estructura lógica de un teorema de la forma $h \Rightarrow t$ y su prueba. Dar un ejemplo.

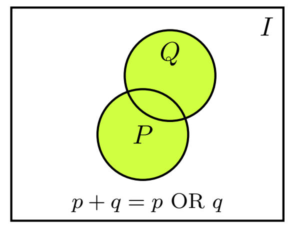
   (c) La *densidad de verdad* (*truth density*) de una proposición $\delta(p)$ es, en términos de tablas de verdad, la relación entre la cantidad de filas donde es verdadera y el total de filas). Dar la densidad δ de cada una de las proposiciones unarias y binarias anteriores.

♣ (Resp. parcial) El conjunto de veracidad de la negación debe ser precisamente el complemento del conjunto de veracidad de la original, de modo que la función proposicional $p'(x)$ debe tener a P' (el complemento de P) como conjunto de veracidad. Esta correspondencia natural se expresa diciendo que a la proposición p' le corresponde el conjunto de veracidad P' debiéndose entender que el conjunto de veracidad se predica de la función proposicional y no de la proposición misma. En la figura, la zona sombreada es el conjunto de veracidad. La densidad es $\delta(p') = 1/2 = 50\%$.



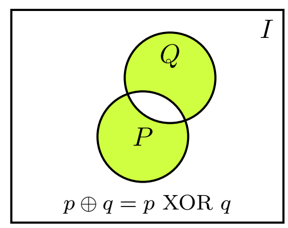
$p' = $ NOT(p)

El conjunto de veracidad de la disyunción debe ser precisamente la unión de los conjuntos de veracidad de la original, de modo que la función proposicional $(p+q)(x)$ debe tener a $P+Q$ como conjunto de veracidad. *Observación*: al simbolizar con $+$ tanto el habitual $\vee$ de la disyunción como el $\cup$ de la unión se enfatiza la unidad de la correspondencia de $p+q$ con $P+Q$; debe recordarse que en castellano la disyunción *o* (como en el latín *vel*, de donde proviene el símbolo $\vee$) es siempre incluyente. La densidad es $\delta(p+q) = 3/4 = 75\%$.



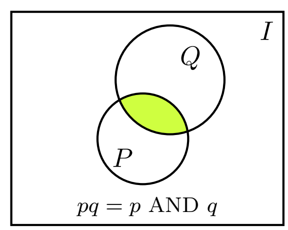
$p + q = p$ OR q

El conjunto de veracidad de la disyunción excluyente debe ser precisamente la unión de los conjuntos de veracidad de la original restada de su intersección, de modo que la función proposicional $(p \oplus q)(x)$ debe tener a $P \oplus Q$ como conjunto de veracidad. *Observación*: al simbolizar con $\oplus$ tanto el habitual $\veebar$ de la disyunción excluyente como el $\oplus$ de la unión excluyente se enfatiza la unidad de la correspondencia de $p \oplus q$ con $P \oplus Q$. La densidad es $\delta(p \oplus q) = 2/4 = 50\%$.



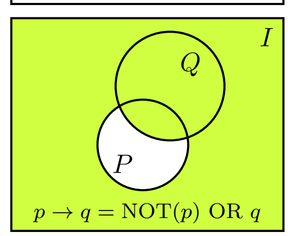
$p \oplus q = p$ XOR q

El conjunto de veracidad de la conjunción debe ser precisamente la intersección de los conjuntos de veracidad de la original, de modo que la función proposicional $(pq)(x)$ debe tener a PQ como conjunto de veracidad. *Observación*: al simbolizar con $\cdot$ (¡y omitirlo!) tanto el habitual $\wedge$ de la conjunción como el $\cap$ de la intersección se enfatiza la unidad de la correspondencia de pq con PQ. La densidad es $\delta(pq) = 1/4 = 25\%$



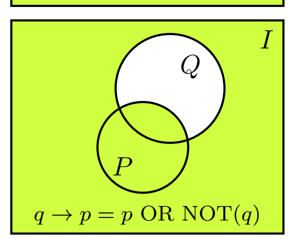
$pq = p$ AND q

Dado que el condicional $(p \to q)$ es, por definición $p' + q$, su conjunto de veracidad debe ser precisamente $P' + Q$. La densidad es $\delta(p \to q) = 3/4 = 75\%$. *Observación*: El conjunto de falsedad es PQ', que es el de veracidad de la negación $(p \to q)' = pq'$. ¿Cómo se colorearía el gráfico con la *contraria* $p' \to q'$, también llamada *opuesta*? ¿El conjunto de veracidad de la contraria es el complemento del conjunto de veracidad de la original?



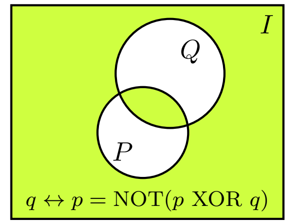
$p \to q = $ NOT(p) OR q

Dado que el condicional $(q \to p)$ es, por definición $p + q'$, su conjunto de veracidad debe ser precisamente $P + Q'$. *Observación*: el conjunto de falsedad es $P'Q$, que es el de veracidad de la negación $(q \to p)' = p'q$. Colorear la *contraria de la recíproca* $q' \to p'$, también llamada *contrarrecíproca* y comprobar que resulta el mismo esquema que la original $p \to q$ o en otras palabras, son *equivalentes*, esto es que $(p \to q) \leftrightarrow (q' \to p')$. La densidad es $\delta(q \to p) = 3/4 = 75\%$.

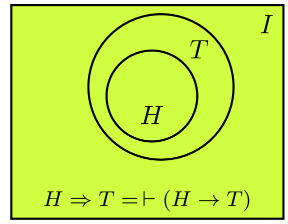


$q \to p = p$ OR NOT(q)

La equivalencia $p \leftrightarrow q$ es verdadera sii las proposiciones tienen el mismo valor de verdad (o bien ambas son verdaderas o bien ambas son falsas), de donde el correspondiente conjunto de veracidad debe ser $PQ + P'Q'$. *Observación*: considerando las representaciones precedentes de la original y la recíproca, los sombreados hacen visualmente evidente que $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q)(q \to p)$. La densidad es $\delta(p \leftrightarrow q) = 1/2 = 50\%$.



Al escribir $h \Rightarrow t$ se *afirma la validez* del condicional $h \to t$, o dicho de otra manera, se asegura que no se da el caso de que $h \to t$ sea falsa; observando el esquema del condicional, esto sucede si es vacía la zona HT' lo que se tiene con $H \subset T$, de donde una prueba de la implicación consiste en mostrar que todo lo que cumple h cumple t. Por ejemplo, el teorema que afirma que la continuidad de una función es condición necesaria de su diferenciabilidad queda probado cuando se asegura que el conjunto de las funciones diferenciables es un subconjunto de las continuas.



Observación. Se reserva la *implicación* $h \Rightarrow t$ para indicar que se afirma que la condicional $h \to t$ es verdadera y entonces decir h *implica* t es una abreviatura de *afirmo que* $h \to t$ *es verdadera*. En símbolos, $h \Rightarrow t$ significa $\vdash (p \to q)$. Estrictamente hablando, *si* p *entonces* q debe distinguirse de p *implica* q (no todos los textos guardan esta conveniente distinción). Para un teorema, la densidad de verdad es, por definición, $\delta(h \Rightarrow t) = 1 = 100\%$.

2. $(-)$ Las siguientes afirmaciones referidas a conjuntos son todas falsas (advierten de la invalidez de la cancelación). Probarlo y graficar una visualización de las pruebas.

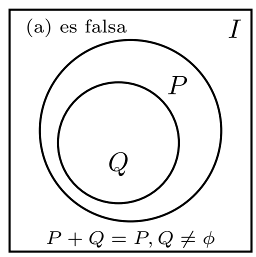
   (a) $P + Q = P \Rightarrow Q = \phi$ (y la correspondiente $p + q = p \Rightarrow q = \mathbf{F}$)

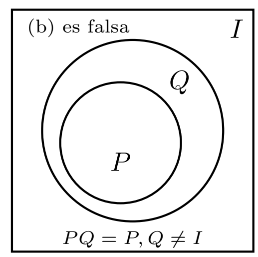
   (b) $PQ = P \Rightarrow Q = I$ (y la correspondiente $pq = p \Rightarrow q = \mathbf{T}$)

   (c) $P + Q = P + R \Rightarrow Q = R$ (y la correspondiente $p + q = p + r \Rightarrow q = r$)

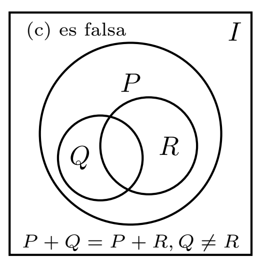
   (d) $PQ = PR \Rightarrow Q = R$ (y la correspondiente $pq = pr \Rightarrow q = r$)

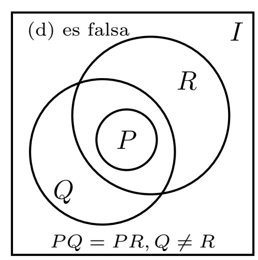
♣ (Resp. parcial) En (a) dados dos cualesquiera $\phi \neq Q \subset P$ y entonces se tiene que $P+Q = P, Q \neq \phi$, lo que prueba que la negación de la afirmación es verdadera (y entonces falsa la afirmación). Observar en detalle: Se afirma que dados dos cualesquiera conjuntos P, Q que cumplen $P + Q = P$, necesariamente debe ser $Q = \phi$, lo que se niega precisamente exhibiendo dos conjuntos, como por ejemplo los subconjuntos de $\mathbb{N}$, $P = \{1, 2\}, Q = \{1\}$ que cumplen que $P + Q = P$ y sin embargo $Q \neq \phi$.





En (c), dados dos cualesquiera conjuntos $Q \neq R$, definiendo P como cualquier conjunto que incluya a $Q+R$ se cumplirá que $P+Q = P = P+R$; por ejemplo los subconjuntos de $\mathbb{N}$, $Q = \{1\}, R = \{2\}$ y $P = \{1, 2\}$ cumplen que $P + Q = P + R$ y sin embargo $Q \neq P$. Luego, (c) es falsa.



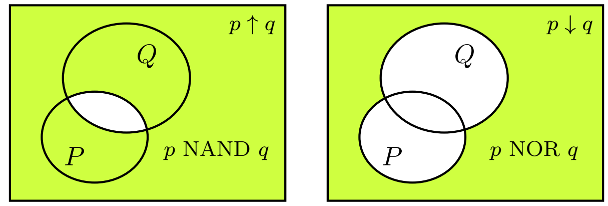


3. $(-)$ La función binaria de *Sheffer*, denominada usualmente *no-y* (NAND) se simboliza por $\uparrow$ y se define por $p \uparrow q \stackrel{\text{def}}{=} (pq)'$. La función de *Peirce*, denominada usualmente *no-o* (NOR) se simboliza por $\downarrow$ y se define por $p \downarrow q \stackrel{\text{def}}{=} (p + q)'$. *Observación*: Cada una de estas dos funciones posee la importante propiedad de la *completitud funcional*, esto es que cualquier otra función lógica puede escribirse exclusivamente con un solo símbolo (el símbolo $\uparrow$ o el símbolo $\downarrow$ según el caso), por lo que sus correspondientes compuertas se llaman universales.

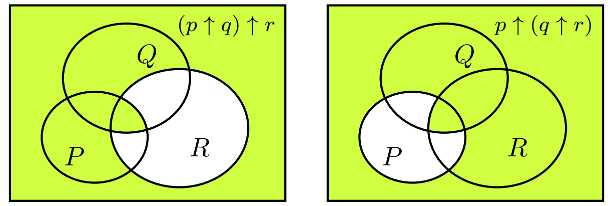
   (a) Representar los correspondientes conjuntos de veracidad de cada una de las dos funciones y su densidad.

   (b) Probar que ninguna de las dos operaciones es asociativa, esto es que *no se cumple* que para toda terna de proposiciones p, q, r sea $(p \uparrow q) \uparrow r = p \uparrow (q \uparrow r)$ ni tampoco $(p \downarrow q) \downarrow r = p \downarrow (q \downarrow r)$, aunque tienen la misma densidad.

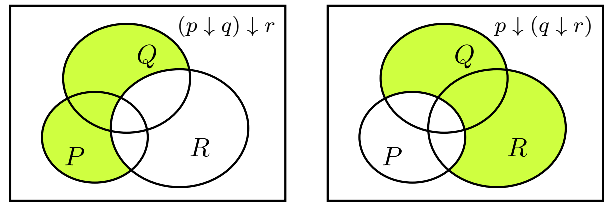
♣ (Resp. parcial) Alcanza con las definiciones de las funciones de Sheffer y Peirce y lo establecido antes respecto a las correspondencias con los conjuntos de veracidad para las representaciones de cada una, como en las figuras de la derecha. Observar que si se hace coincidir p con q se tiene un sombreado correspondiente a la negación. $\delta(p \uparrow q) = 75\%, \delta(p \downarrow q) = 25\%$.



Sean p, q, r con valores de verdad $v(p) = 1, v(q) = v(r) = 0$. Para tales tres proposiciones es (explicar en detalle) $v[(p \uparrow q) \uparrow r] = 1 \neq 0 = v[p \uparrow (q \uparrow r)]$, de modo que no se cumple la asociatividad. Las figuras de la derecha(construirlas en etapas) ilustran lo mismo. Las densidades: $\delta((p \uparrow q) \uparrow r) = 62.5\% = \delta(p \uparrow (q \uparrow r))$.

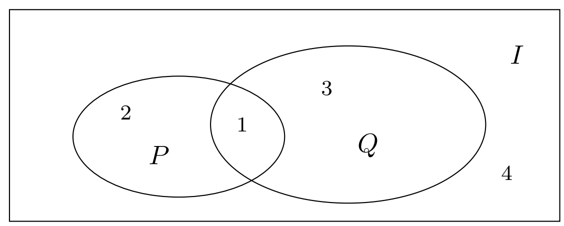


Sean p, q, r con valores de verdad $v(p) = 1, v(q) = v(r) = 0$. Para estras tres proposiciones es (explicar en detalle) $v[(p \downarrow q) \downarrow r] = 1 \neq 0 = v[p \downarrow (q \downarrow r)]$, de modo que no se cumple la asociatividad. Las figuras de la derecha(construirlas en etapas) ilustran lo mismo. $\delta((p \downarrow q) \downarrow r) = 37.5\% = \delta(p \downarrow (q \downarrow r))$.



4. $(-)$ En el esquema de la figura se muestran los conjuntos de veracidad correspondientes a las proposiciones p, q y las cuatro regiones definidas en I. Determinar cada uno de los conjuntos de veracidad correspondientes a las siguientes proposiciones y su densidad δ. ¿Cuántas proposiciones distintas pueden formarse con estas dos proposiciones simples? Escibir las *formas normales completas* de suma de productos y de productos de suma de una proposición h cuyo conjunto de veracidad H se conforme por las regiones 3 y 4.

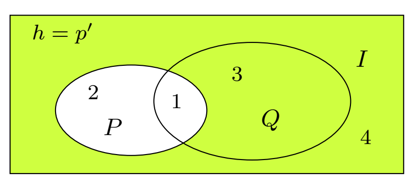
   (a) $p \leftrightarrow q$
   (b) $p'q + p$
   (c) $(q \to p)'$
   (d) $(p \to q)(q \to p)$
   (e) $(pq) \to p'$
   (f) $p \leftrightarrow p'$
   (g) $(p \to q) \to q$



♣ (Resp. parcial) $(a)\, 1, 4, \delta = 50\%; (b)\, 1, 2, 3, \delta = 75\%; (c)\, 3, \delta = 25\%; (d)\, 1, 4, \delta = 50\%$ (observar que es la misma proposición que (a)) $(e)\, 2, 3, 4, \delta = 75\%; (f)\, \phi, \delta = 0\%; (g)\, 1, 2, 3, \delta = 75\%$. En total pueden formarse 16 proposiciones distintas, y una forma de verlo es considerar cada proposición como un vector (único) de cuatro componentes, con 1 si la región correspondiente a la componente es parte del conjunto de veracidad, siendo 0 en caso contrario (por ejemplo la proposición (a) se leería como `1001`) y como se tienen dos posibilidades (esto es 0 o 1) para cada uno de los cuatro casilleros del vector, en total hay $16 = 2^4$ proposiciones. Observación: el vector de (a) se corresponde a la suma de productos $PQ + P'Q'$ y la correspondiente proposición $pq + p'q'$ está escrita en su *forma normal de suma de productos*; en su *forma normal de producto de sumas*: $(p + q')(p' + q)$. Es inmediato que $h = p'$, lo que escrito en las formas normales es $h = p'q + p'q' = (p' + q)(p' + q')$. Observar que los sumandos de la forma disyuntiva se identifican con las regiones del conjunto de veracidad (y que en la tabla de verdad tienen valor 1), mientras que los factores de la forma conjuntiva se identifican con el complemento de las regiones donde la proposición es falsa (y que en la tabla de verdad tienen valor 0).

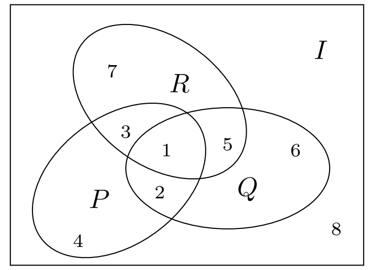
$$h = \underbrace{p'q}_{3} + \underbrace{p'q'}_{4} \qquad \text{suma de productos}$$

$$h = \underbrace{(p' + q)}_{2'} \underbrace{(p' + q')}_{1'} \qquad \text{producto de sumas}$$



5. $(-)$ En el esquema de la figura se muestran los conjuntos de veracidad correspondientes a las proposiciones p, q, r y las ocho regiones definidas en I. Determinar cada uno de los conjuntos de veracidad correspondientes a las siguientes proposiciones y su densidad δ, y escribir sus formas normales. ¿Cuántas proposiciones distintas pueden formarse con estas tres proposiciones simples? ¿Cuántas tienen densidad de verdad $\delta = 37.5\%$? Determinar cuántas proposiciones con $v(p) = 1$ tienen densidad $\delta = 75\%$ y dar dos de ellas.

(a) $pq + pqr$ (b) $p'qr$
(c) $p \leftrightarrow q$ (d) $p \to (q + r)$
(e)$(pq) \to r$ (f) $p \to (pq)'$
(g) $(p \to q) + (q \to r)$ (h) $(p + q) \to (q' + r)$
(i) $(p \leftrightarrow q) + (p \leftrightarrow r)$ (j) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

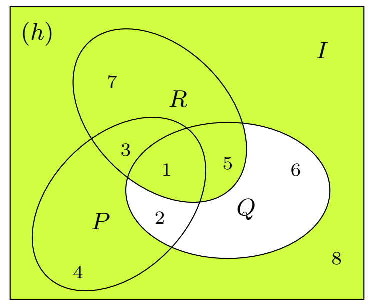


♣ (Resp. parcial) $(a)\, 1, 2, \delta = 25\%; (b)\, 5, \delta = 12.5\%; (c)\, 1, 2, 7, 8, \delta = 50\%; (d)\, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, \delta = 87.5\%; (e)\, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \delta = 87.5\%; (f)\, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \delta = 75\%; (g)\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \delta = 100\%; (h)\, 1, 3, 4, 5, 7, 8, \delta = 75\%; (i)\, 1, 2, 3, 6, 7, 8, \delta = 75\%; (j)\, 1, 4, 6, 7.$ En total pueden formarse 256 proposiciones distintas, y una forma de verlo es considerar cada proposición como un vector (único) de ocho componentes, con 1 si la región correspondiente a la componente es parte del conjunto de veracidad, siendo 0 en caso contrario (por ejemplo la proposición (h) se leería como `10111011`) y como se tienen dos posibilidades (esto es 0 o 1) para cada uno de los ocho casilleros del vector, en total hay $256 = 2^8$ proposiciones; con densidad $\delta = 37.5\%$ hay $56 = \binom{8}{3}$ proposiciones; hay $6 = \binom{4}{2}$ proposiciones con densidad $\delta = 75\%, v(p) = 1$ y dos de ellas son $p + q, p + r$.

Observación: el vector de (h) se corresponde a la suma de productos $PQR + PQ'R + PQ'R' + P'QR + P'Q'R + P'Q'R'$ y la correspondiente proposición $pqr + pq'r + pq'r' + p'qr + p'q'r + p'q'r'$ está escrita en su *forma normal de suma de productos*; en su *forma normal de producto de sumas*: $(p' + q' + r)(p + q' + r)$.

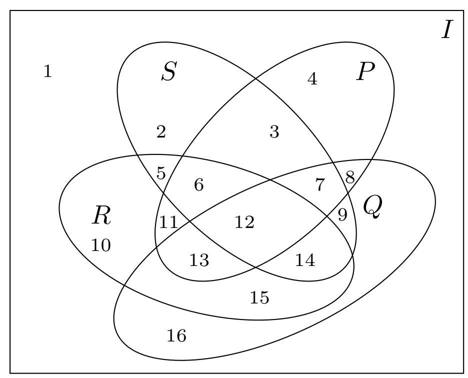
$$h = \underbrace{pqr}_{1} + \underbrace{pq'r}_{3} + \underbrace{pq'r'}_{4} + \underbrace{p'qr}_{5} + \underbrace{p'q'r}_{7} + \underbrace{pq'r'}_{8} \quad \text{suma de productos}$$

$$h = \underbrace{(p' + q' + r)}_{2'}\underbrace{(p + q' + r)}_{6'} \quad \text{producto de sumas}$$



6. $(-)$ En el esquema de la figura se muestran los conjuntos de veracidad correspondientes a las proposiciones p, q, r, s y las 16 regiones definidas en I. Determinar cada uno de los conjuntos de veracidad correspondientes a las siguientes proposiciones y su densidad δ. ¿Cuántas proposiciones distintas pueden formarse con estas cuatro proposiciones simples? ¿Cuántas tienen densidad $\delta = 12.5\%$? ¿Cuántas de densidad $\delta = 25\%$ cumplen $v(p) = 1, v(s) = 0$.

(a) $(p' + s')(p + q + r)$
(b) $(p + q' + r')(p' + q + s')$
(c) $(p + s')(p + r)(q + s)$
(d) $(p' + q + r)(pq + r)(p + q + s)$
(e) $pq + ps + qrs'$
(f) $ps' + p'q + p'r$
(g) $pq + p'q' + qr' + q's'$

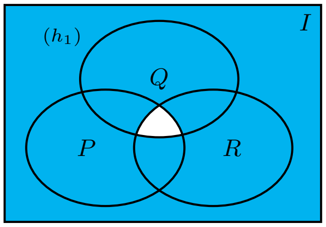


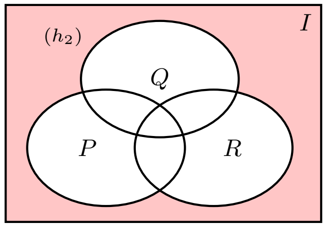
♣ (Resp. parcial) (a) $4, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, \delta = 62.5\%$; (b) $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15$; (c) $3, 6, 7, 8, 12, 13, 15$, con densidad $\delta = 43.75\%$; (d) $4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, \delta = 50\%$; la proposición (e) es igual a (c); la (f) es igual a (a); finalmente, (g) equivale a (b).

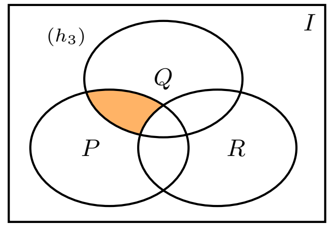
7. Las versiones *n-arias* de las funciones de *Sheffer* y *Peirce* aceptan más de dos proposiciones como argumentos, siendo NAND $(p_1, p_2, \dots, p_n) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1 p_2 \cdots p_n)'$, NOR $(p_1, p_2, \dots, p_n) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1 + p_2 + \cdots p_n)'$, lo que también se escribe para NAND como $p_1 \uparrow p_2 \uparrow \cdots \uparrow p_n$, y para NOR como $p_1 \downarrow p_2 \downarrow \cdots \downarrow p_n$. Graficar los conjuntos de veracidad y dar la densidad de cada una de las siguientes proposiciones.

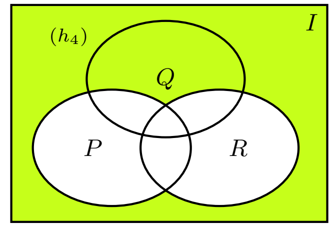
$h_1 = p \uparrow q \uparrow r$ $h_2 = p \downarrow q \downarrow r$ $h_3 = p' \downarrow q' \downarrow r$ $h_4 = (p + r) \downarrow qr \downarrow pq$
$h_5 = (p \uparrow q') \uparrow (q \uparrow s) \uparrow (r \uparrow s)$ $h_6 = (p \downarrow q \downarrow r) \downarrow (p \downarrow s) \downarrow (q' \downarrow s)$

♣ (Resp. parcial) Basta aplicar las definiciones para obtener las densidades $\delta(h_1) = 87.5\%, \delta(h_2) = 12.5\%, \delta(h_3) = 12.5\%, \delta(h_4) = 25\%, \delta(h_5) = 56.25\%$ y sombrear los correspondientes conjuntos de veracidad. La proposición h_5 es la misma que h_6.

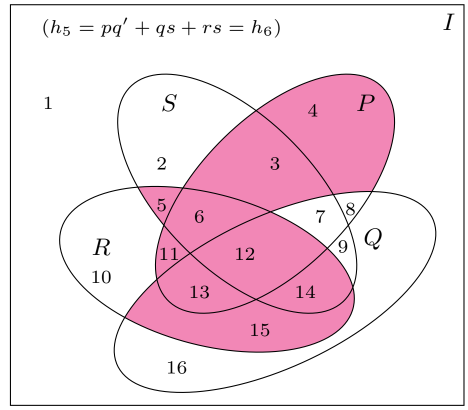




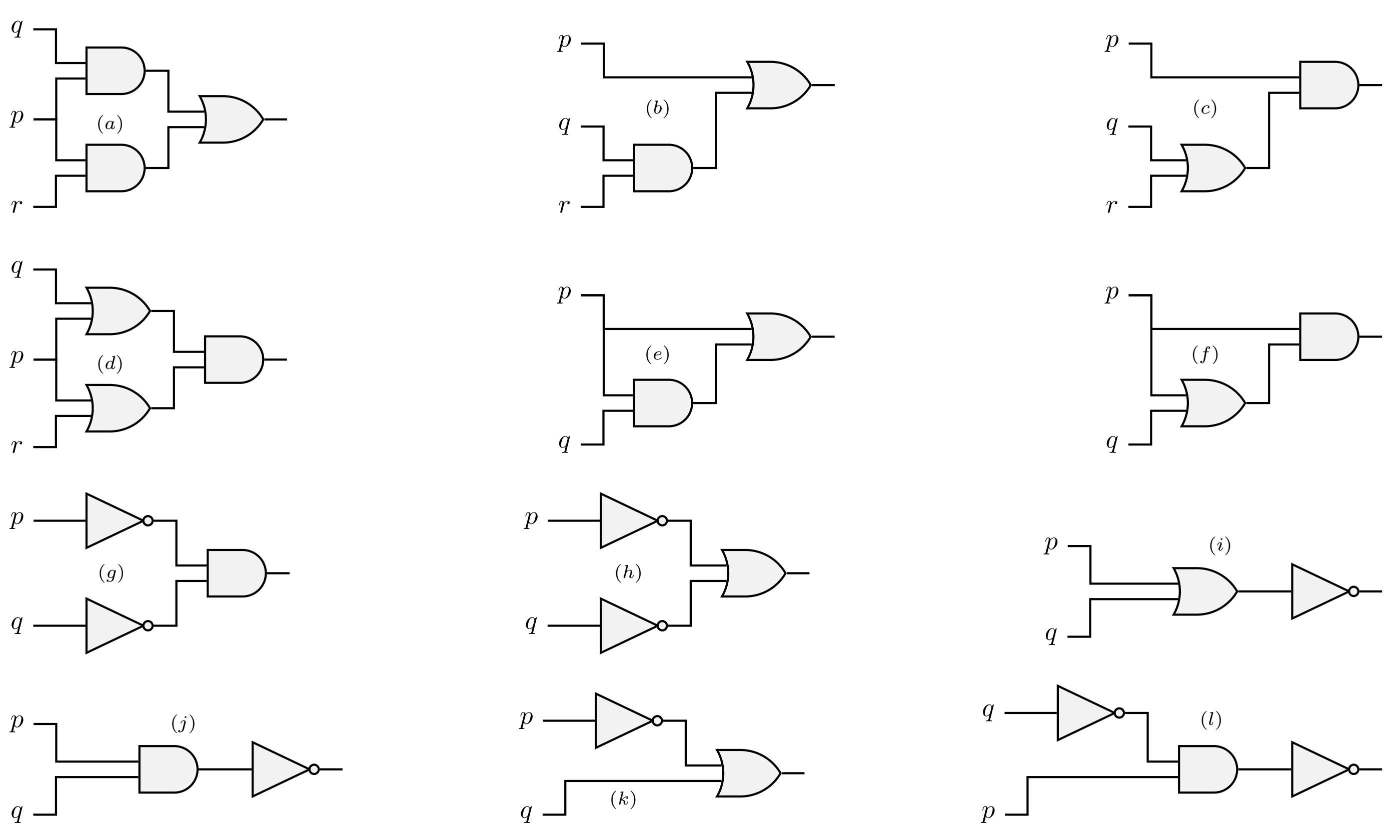




La proposición h_5 es la misma h_6 y se puede escribir como $h_5 = pq' + qs + rs$, pues por definición de $\uparrow$ (binaria y terciaria) es $h_5 = ((pq')'(qs)'(rs)')'$ y entonces por De Morgan es $h_5 = ((pq')')' + ((qs)')' + ((rs)')'$ y por la involución de la negación es $h_5 = pq' + qs + rs$ que es una forma normal disyuntiva. Si se prefiere la forma normal *completa* (observar que tiene nueve sumandos, tantos como regiones sombreadas e identificarlas) se obtiene $h_5 = pqrs + pq'rs + pqr's + pq'rs' + pq'r's + pq'r's' + p'qrs + p'q'rs + p'qr's$. Por otra parte, por definición de $\downarrow$ (binaria y terciaria) es $h_6 = ((p+q+r)' + (p+s)' + (q'+s)')'$ y entonces por De Morgan e involución de la negación es $h_6 = (p+q+r)(p+s)(q'+s)$ que es una forma normal conjuntiva. Si se prefiere la forma normal *completa* (observar que tiene siete factores, tantos como regiones no sombreadas e identificarlas) se obtiene $h_6 = (p+q+r+s)(p+q+r+s')(p+q+r'+s)(p+q'+r+s)(p+q'+r'+s)(p'+q'+r+s)(p'+q'+r'+s)$.



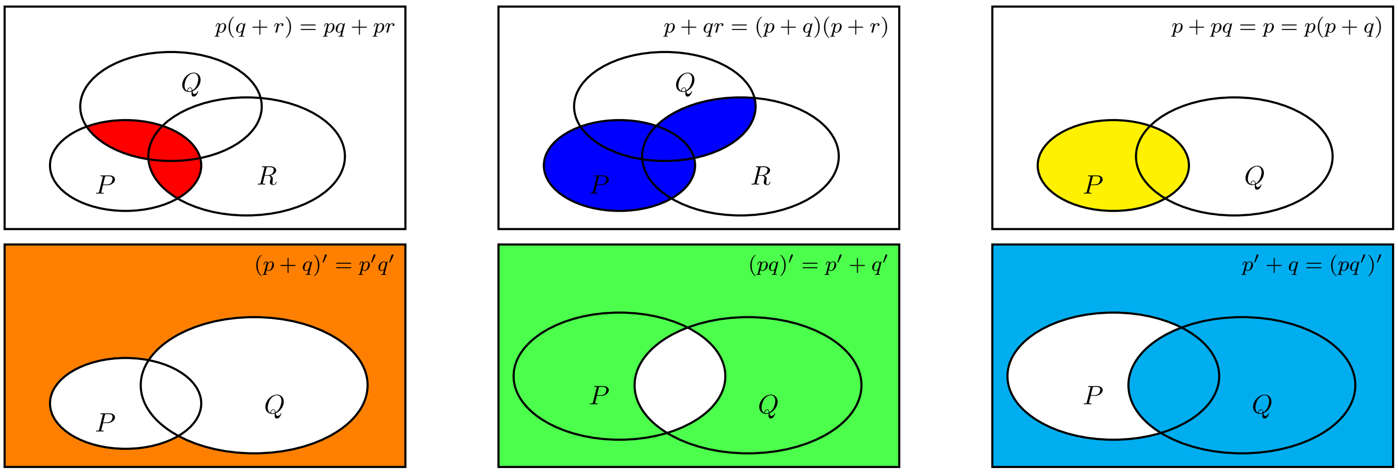
8. Determinar los circuitos lógicos que sean equivalentes (esto es que representen la misma proposición compuesta), probar la equivalencia y expresarlos en el lenguaje de las proposiciones que representan (los significados de las compuertas lógicas siguen la norma ANSI *American National Standards Institute*/IEEE *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, Std 91/91a-1991). Graficar además los conjuntos de veracidad correspondientes a cada clase de equivalencia.



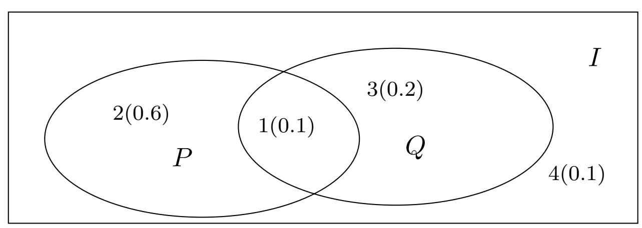
♣ (Resp. parcial) Son equivalentes los siguientes pares de circuitos: $(a, c), (b, d), (e, f), (g, i), (h, j), (k, l)$. La equivalencia entre (a) y (c) escrita como $pq + pr = p(q + r)$, junto con la equivalencia entre (b) y (d) escrita como $p + qr = (p + q)(p + r)$ constituyen la propiedad distributiva (*distributividad del producto respecto de la suma*, y su dual *distributividad de la suma respecto del producto*). La prueba de que $p + qr = (p + q)(p + r)$: el valor $v(p + qr) = 0$ sii $v(p) = 0, v(qr) = 0$, y entonces $v(p + q) = v(q), v(p + r) = v(r)$, así que $v[(p+q)(p+r)] = v(p+q)v(p+r) = v(q)v(r) = v(qr)$, pero como precisamente es $v(qr) = 0$, queda que *si* $v(p+qr) = 0$ entonces $v[(p+q)(p+r)] = 0$. Por otra parte, $v[(p+q)(p+r)] = 0$ sii $v(p+q) = 0$ o $v(p+r) = 0$; si es lo primero, debe ser $v(p) = v(q) = 0$, y entonces $v(p+qr) = 0$, mientras que si es lo segundo debe ser $v(p) = v(r) = 0$, y entonces también $v(p+qr) = 0$. Reuniendo todo, es $v(p+qr) = 0$ sii $v[(p+q)(p+r)] = 0$.

La equivalencia entre (e) y (f) dice que $p + pq = p(p+q) = p$ y juntas constituyen la propiedad de *absorción*. La prueba de que $p+pq = p$: si $v(p) = 1$ es (por definición de $+$) $v(p+pq) = 1$, mientras que si $v(p) = 0$ es (por definición de $+$ y de $\cdot$)) $v(p+pq) = 0$; por otra parte, si $v(p+pq) = 0$ debe ser (por definición de $+$), $v(p) = 0$, mientras que si $v(p+pq) = 1$ entonces $v(p) = 1$ (pues de no serlo, por definición de $+$, sería $v(p+pq) = 1$).

Las equivalencias entre (g) e (i) y entre (h) y (k), que se escriben, respectivamente, $(p+q)' = p'q', (pq)' = p' + q'$ constituyen las llamadas leyes de *De Morgan*. La prueba de que $(p+q)' = p'q'$: $v(p+q)' = 1$ sii (definición de $'$) $v(p+q) = 0$ sii (definición de $+$) $v(p) = v(q) = 0$ sii (definición de $'$) $v(p') = v(q') = 1$ sii (definición de $\cdot$) $v(p'q') = 1$. Los conjuntos de veracidad se sombrean en las figuras siguientes, para cada uno de los seis pares de circuitos equivalentes.



9. ($\rightsquigarrow$) (*Probability Logic*). Una distribución de probabilidad asigna números no negativos (que suman 1) a cada región de veracidad de las proposiciones p, q, tal como los indicados en la figura entre paréntesis. Determinar la probabilidad que esta distribución asigna a cada una de las siguientes proposiciones.



(a) $p \leftrightarrow q$
(b) $(q \rightarrow p)'$
(c) $(pq) \rightarrow p'$
(d) $p \leftrightarrow p'$
(e) $(p \rightarrow q) \rightarrow q$

♣ (Resp. parcial) $(a)\,0.2$; $(b)\,0.2$; $(c)\,0.9$; $(d)\,0$; $(e)\,0.9$.

10. (+) Probar las siguientes identidades del álgebra de proposiciones usando las definiciones de la disyunción (+), la conjunción ($\cdot$ omitido), la negación ($'$). Interpretar las identidades en el álgebra de conjuntos, considerando ahora las correspondientes funciones proposicionales a $p, q, r, \mathbf{T}, \mathbf{F}$ con sus respectivos conjuntos de veracidad $P, Q, R, I, \emptyset$, utilizando para la unión (+), para la intersección ($\cdot$), para el complemento ($'$).

(a) Conmutativa $p+q = q+p,\ pq = qp$
(b) Distributiva $p(q+r) = pq+pr, \quad p+qr = (p+q)(p+r)$
(c) Neutros $p + \mathbf{F} = p,\ p\mathbf{T} = p$
(d) Complemento $p+p' = \mathbf{T},\ pp' = \mathbf{F},\ \mathbf{F}' = \mathbf{T},\ \mathbf{T}' = \mathbf{F}$
(e) Acotación $p + \mathbf{T} = \mathbf{T},\ p\mathbf{F} = \mathbf{F}$
(f) Asociativa $(p+q)+r = p+(q+r),\ (pq)r = p(qr)$
(g) Involución $(p')' = p$
(h) De Morgan $(p+q)' = p'q',\ (pq)' = p'+q'$
(i) Idempotencia $p+p = p,\ pp = p$
(j) Absorción $p+pq = p,\ p(p+q) = p$

♣ (Resp. parcial) Absorción: el valor de $p+pq$ es 0 (por definición de +) sii es 0 el valor de p y de pq. Pero si el valor de p es 0, entonces pq *ya* vale 0 (por definición de $\cdot$) de modo que $p+pq$ vale 0 sii p vale 0, esto es que $p+pq$ es p. La ley de complemento para conjuntos queda escrita como $P+P' = I, PP' = \emptyset, \emptyset' = I, I' = \emptyset$. [Lo mismo, en otra notación: $P \cup P' = I, P \cap P' = \emptyset$].

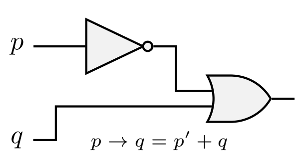
11. Probar que el cardinal de B^A (esto es el conjunto de funciones $f : A \to B$) es $|B|^{|A|}$, y entonces que si $B = \{0, 1\}$, hay 2^{2^n} funciones $f : B^n \to B$ de n variables lógicas. La siguiente tabla muestra las $16 = 2^4$ funciones booleanas de $n = 2$ variables usando disyunciones amplias $(+)$ o excluyentes $(\oplus)$, conjunciones $(\cdot)$, condicionales $(\to)$, bicondicionales $(\leftrightarrow)$ o negaciones $(\,')$. Escribirlas utilizando solo el juego completo $(+, \cdot\,, \,')$.

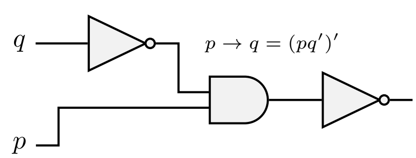
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
p	q	**F**	p	q	pq	$p+q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$q \to p$	**T**	p'	q'	$(pq)'$	$(p+q)'$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q)'$	$(q \to p)'$
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

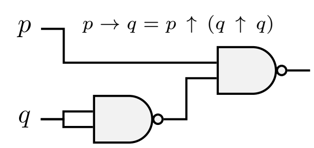
♣ (Resp. parcial) A cada uno de los $|A|$ elementos de A puede serle asignado cualquiera de los $|B|$ elementos de B, y entonces las asignaciones posibles son $|B|\,|B| \cdots |B|$ (esto es el producto de $|A|$ veces el número $|B|$, que es $|B|^{|A|}$); para el caso particular en que el cardinal de B es 2 y A el producto cartesiano B^n de cardinal 2^n queda que $|B^{B^n}| = 2^{2^n}$ La función f_1 puede escribirse como $f_1(p, q) = pp'$ y su negación $f_9(p, q) = p + p'$; la función $f_6(p, q) = pq' + p'q$ y su negación $f_{14}(p, q) = pq + p'q'$; la función $f_7(p, q) = p' + q$ y su negación $f_{15}(p, q) = pq'$; la función $f_8(p, q) = p + q'$ y su negación $f_{16}(p, q) = p'q$ (probar el detalle de estas respuestas); la tabla completa está presentada de manera que la negación de f_k es f_{k+8} para $k = 1, 2, \ldots, 8$.

12. (+) El teorema de representación asegura que el juego $(+, \cdot\,, \,')$ es completo. Probar que también lo son cada uno de los tres juegos de dos símbolos $(+, \,')$, $(\,\cdot\,, \,')$, $(\to, \,')$, y cada uno de los dos juegos de solo un símbolo $(\uparrow)$, $(\downarrow)$, siendo $p \uparrow q \overset{\text{def}}{=} (pq)'$, $p \downarrow q \overset{\text{def}}{=} (p+q)'$ (equivalentes, respectivamente, a las compuertas lógicas NAND y NOR). Ejemplificar la completitud escribiendo la función $f_7(p, q) = p \to q$ con cada uno de los juegos y representarla con el circuito lógico correspondiente.

♣ (Resp. parcial) Con $(+, \,')$ se puede "fabricar" el producto con $pq = (p' + q')'$; con $(\cdot, \,')$ se puede "fabricar" la suma con $p + q = (p'q')'$; con $(\to, \,')$ se produce la suma con $p + q = p' \to q$ y el producto con $pq = (p \to q')'$; con $(\uparrow)$ se produce la negación con $p' = p \uparrow p$, la suma con $p + q = (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$, el producto con $pq = (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$; con $(\downarrow)$ se produce la negación con $p' = p \downarrow p$, el producto con $pq = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$, la suma con $p + q = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$. Es $f_7(p, q) = p' + q = (pq')' = p \to q = p \uparrow (q \uparrow q) = [(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$. Los tres circuitos representados corresponden al condicional utilizando el primero el juego $(+, \,')$=(OR, NOT), el segundo el juego $(\cdot, \,')$= (AND, NOT), el tercero el juego $(\uparrow)$= (NAND).

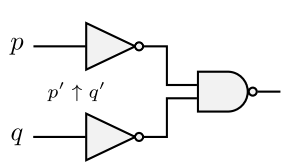


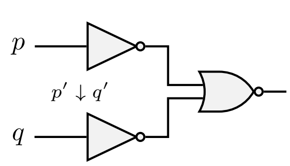


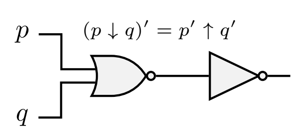


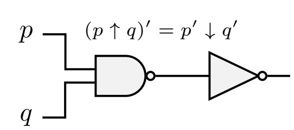
13. (−) Probar que las leyes de De Morgan se aplican a las operaciones $(\uparrow)$ y $(\downarrow)$, esto es para cualquier par de proposiciones p, q se verifica $(p \uparrow q)' = p' \downarrow q'$, $(p \downarrow q)' = p' \uparrow q'$ y representar los circuitos lógicos que dan cuenta de tales equivalencias.

♣ (Resp. parcial) Se tiene que $(p \uparrow q)' = ((pq)')' = pq = (p' + q')' = p' \downarrow q'$ (la primera igualdad por definición de $\uparrow$, la segunda por involución de $(\,')$, la tercera por De Morgan aplicada a la negación de la disyunción e involución de $(\,')$, la cuarta por definición de $\downarrow$). Por otra parte, $(p \downarrow q)' = ((p+q)')' = p + q = (p'q')' = p' \uparrow q'$ (la primera igualdad por definición de $\downarrow$, la segunda por involución de $(\,')$, la tercera por De Morgan aplicada a la negación de la conjunción e involución de $(\,')$, la cuarta por definición de $\uparrow$).



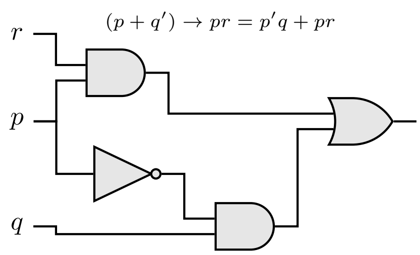




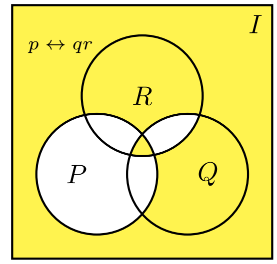


14. (−) Escribir cada una de las siguientes proposiciones en su forma normal disyuntiva completa; considerando ahora correspondientes funciones proposicionales a p, q, r con sus respectivos conjuntos de veracidad P, Q, R representar en diagramas de Venn el conjunto de veracidad correspondientes a cada proposición compuesta y esquematizarla mediante circuitos lógicos con compuertas AND, OR, NOT. ¿Hay algún par de proposiciones inconsistentes?

$(a)\, p \leftrightarrow qr$ $\quad (b)\, (p + q') \to pr$ $\quad (c)\, (p+q)'(p+q') \to (p+q)(p+r)$ $\quad (d)\, ((pq + pqr) \to rq)'$ $\quad (e)\, pq'r'$



♣ (Resp. parcial) El diagrama de Venn representa (sombreada) la región de veracidad correspondiente a la proposición (a) como resulta de su forma normal disyuntiva $pqr+p'qr'+p'q'r+p'q'r'$. El circuito representa a (b). Un par inconsistente es (a), (d) puesto que no pueden ser ambas verdaderas: si vale (a), esto es que $p \Leftrightarrow qr$, la proposición (d) $((pq+pqr) \to rq)'$ es $((pq+p) \to p)'$, o lo que es lo mismo (absorción) $(p \to p)'$, que es $\mathbf{T}' = \mathbf{F}$; otro par inconsistente: (a), (e).



15. Escribir las formas normales completas (disyuntiva y conjuntiva) de cada uno de los siguientes conjuntos y representarlos en diagramas de Venn (recordar que $A - B \stackrel{\text{def}}{=} AB', A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} AB' + A'B$).

$(a)\, E_a = (X+Y+Z) - Z(X+Y)$ $\quad (b)\, E_b = (X \oplus Y)(Y \oplus Z)$ $\quad (c)\, E_c = X - YZ'$ $\quad (d)\, E_d = (X-Y)(X \oplus Z)$

$(e)\, E_e = X + (YZ - X)$ $\quad (f)\, E_f = (X+Y)(X-Y)$ $\quad (g)\, E_g = XZ + XY'Z$ $\quad (h)\, E_h = (X-Z) + XYZ'$

♣ (Resp. parcial) Las figuras representan lo pedido. Para construirlas posiblemente lo más sencillo es remitirse a la definición de las operaciones entre conjuntos; ya una vez con ellas, las formas canónicas son inmediatas, bastará sumar regiones sombreadas para tener la suma de productos, y multiplicar los complementos de las regiones sin sombrear considerando para tener el producto de sumas.

$(a) E_a = XY'Z' + XYZ' + X'YZ' + X'Y'Z = (X'+Y'+Z')(X'+Y+Z')(X+Y'+Z')(X+Y+Z)$

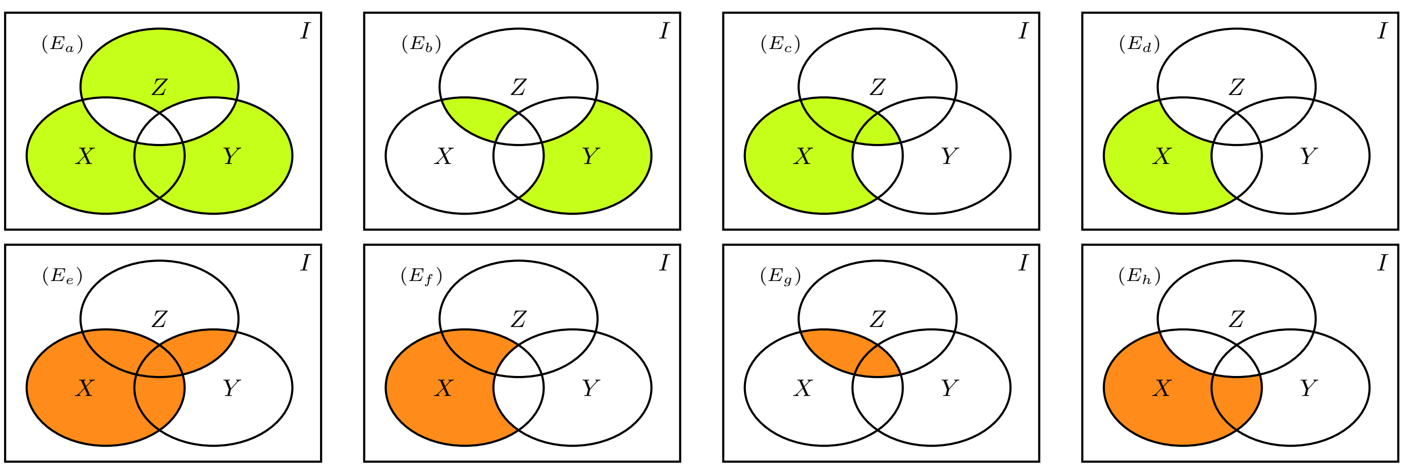
$(b) E_b = XY'Z + X'YZ' = (X'+Y'+Z')(X+Y+Z')(X+Y'+Z')(X'+Y+Z)(X'+Y'+Z)(X+Y+Z)$

$(c) E_c = XYZ + XY'Z + XY'Z' = (X+Y+Z)(X+Y+Z')(X+Y'+Z)(X'+Y'+Z)(X+Y'+Z')$

$(d) E_d = XY'Z' = (X'+Y'+Z')(X+Y+Z')(X'+Y+Z')(X'+Y'+Z)(X+Y'+Z)(X+Y'+Z')(X+Y+Z)$

$(e) E_e = XY'Z' + XYZ' + XY'Z + XYZ + X'YZ = (X+Y+Z')(X+Y'+Z)(X+Y+Z)$

$(f) E_f = XY'Z' + XY'Z = (X'+Y'+Z)(X'+Y'+Z')(X+Y'+Z')(X+Y'+Z)(X+Y+Z')(X+Y+Z)$



16. $(-)$ Probar las siguientes implicaciones, válidas para cualesquiera subconjuntos P y Q del conjunto I, y sus correspondientes proposiciones asociadas.

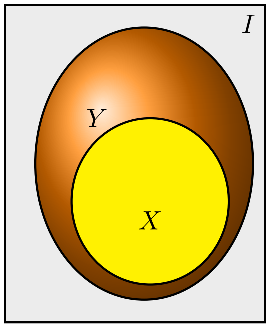
   (a) $P+Q = \emptyset \Rightarrow (P=\emptyset, Q=\emptyset)$, $\qquad PQ = I \Rightarrow (P=I, Q=I)$

   (b) $p+q = \mathbf{F} \Rightarrow (p=\mathbf{F}, q=\mathbf{F})$, $\qquad pq = \mathbf{T} \Rightarrow (p=\mathbf{T}, q=\mathbf{T})$

♣ (Resp. parcial) Para la prueba de $P+Q=\emptyset \Rightarrow (P=\emptyset, Q=\emptyset)$ se prueba primero que P debe ser vacío: $P = P+\emptyset = P+(P+Q) = (P+P)+Q = P+Q = \emptyset$ (la primera igualdad por ser $\emptyset$ neutro para $+$, la segunda igualdad por hipótesis, la tercera igualdad por ser $+$ asociativa, la cuarta por la idempotencia de $+$, la quinta otra vez por hipótesis). La prueba de que Q deber ser vacío es esencialmente la misma (detallar cada igualdad de la siguiente cadena): $Q = Q+\emptyset = Q+(P+Q) = Q+(Q+P) = (Q+Q)+P = Q+P = P+Q = \emptyset$. Dado que la segunda parte de la proposición es dual de la primera, sirve la misma prueba cambiando $\emptyset$ por I, y la suma por el producto.

Observación. Una prueba menos abstracta (y más simple) de que $P+Q=\emptyset \Rightarrow (P=\emptyset, Q=\emptyset)$ consiste en suponer que fuera falsa, de modo que no fueran P y Q ambos vacíos (siéndolo $P+Q$): entonces tendría alguno de ellos al menos un elemento, elemento que también estaría (por definición de suma) en $P+Q$, lo que es imposible pues $P+Q$ es vacío. Esta prueba, sin embargo, no está "despegada" del contexto de los conjuntos, mientras que la dada más arriba es reproducible sin cambios en el contexto más amplio del álgebra de Boole.

17. Sean X e Y dos conjuntos cualesquiera en I. Probar detalladamente la *equivalencia* de las siguientes seis condiciones (y observar que todas "dicen" lo mismo, esto es que los conjuntos X e Y están dispuestos como lo ilustra la figura). Escribir las seis condiciones anteriores correspondientes (y entonces también equivalentes) en el álgebra de proposiciones.
(a) $X \subset Y$ (b) $XY = X$ (c) $X+Y=Y$ (d) $XY' = \emptyset$ (e) $X'+Y = I$ (f) $Y' \subset X'$



♣ (Resp. parcial) Se abrevia siguiendo un esquema de prueba "circular", como podría ser $(b) \Rightarrow (a), (a) \Rightarrow (c), (c) \Rightarrow (d), (d) \Rightarrow (e), (e) \Rightarrow (f), (f) \Rightarrow (b)$. Sin embargo, se recomiendan las pruebas por pares. Por ejemplo, $(c) \Rightarrow (a)$: si es $X+Y=Y$ y se toma $x \in X$ entonces (por definición de suma) $x \in (X+Y) = Y$, esto es que $x \in Y$, de modo que $X \subset Y$; ahora para probar que $(a) \Rightarrow (c)$, se ve que si $u \in (X+Y)$ entonces $u \in X$ o $u \in Y$, pero por hipótesis $X \subset Y$ de modo que $u \in X \Rightarrow u \in Y$, así que $u \in (X+Y) \Rightarrow u \in Y$, de modo que $X+Y \subset Y$; por otra parte $Y \subset X+Y$ trivialmente (pues si $u \in Y \Rightarrow u \in Y \vee u \in X$); reuniendo ambas cosas queda probado que $X \subset Y \Rightarrow X+Y=Y$. Con lo anterior, ya se tiene probada la equivalencia $(a) \Leftrightarrow (c)$.
(a) $p \to q$ (b) $pq = p$ (c) $p+q=q$ (d) $pq' = \mathbf{F}$ (e) $p'+q = \mathbf{T}$ (f) $q' \to p'$

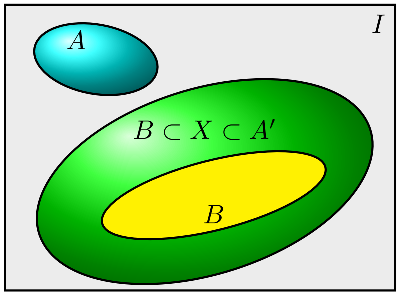
Observación. Dada la equivalencia entre (a) y (d) son equivalentes $XY = \emptyset, X \subset Y', Y \subset X'$, puesto que $XY = \emptyset$ es lo mismo que $X(Y')' = \emptyset$ y que $(X')'Y = \emptyset$.

18. $(-)$ Probar que para dos conjuntos X e Y en I valen las siguientes equivalencias fundamentales para la resolución de ecuaciones con incógnita conjunto, ya que permite reescribir cualquier igualdad entre conjuntos como una igualdad con el $\emptyset$ como uno de sus miembros.

$$X = Y \text{ sii } X' = Y' \text{ sii } X'Y + XY' = \emptyset \text{ sii } (X'+Y)(X+Y') = I$$

♣ (Resp. parcial) Si $X=Y$ entonces $X'Y + XY' = X'X + XX' = \emptyset + \emptyset = \emptyset$ (esto prueba $X = Y \Rightarrow X'Y + XY' = \emptyset$); por otra parte, si $X'Y + XY' = \emptyset$ se tiene (¿por qué?) que debe ser $X'Y = \emptyset$ y también $XY' = \emptyset$, es decir (por la equivalencia ya probada en el ejercicio anterior) que $Y \subset X$ y $X \subset Y$, esto es $X = Y$ (y esto prueba que $X'Y + XY' = \emptyset \Rightarrow X = Y$); reuniendo las dos, queda probado que $X'Y + XY' = \emptyset \Leftrightarrow X = Y$.

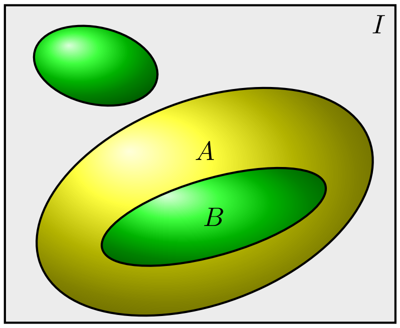
19. Probar que dados A y B en I la ecuación en la incógnita X dada por $AX + BX' = \emptyset$ tiene solución sii $B \subset A'$ (o lo que es equivalente $AB = \emptyset$) y es cualquier conjunto X en I que satisfaga $B \subset X \subset A'$ (a B se le llama solución minimal y a A' solución maximal). Si, cumpliendo $AB = \emptyset$, es $n_a = |A|, n_b = |B|, n_i = |I|$, determinar el cardinal del conjunto $S = \{X \subset I : AX + BX' = \emptyset\}$ ¿Bajo qué condiciones la solución es única? ¿Qué soluciones tiene la ecuación $(A+A')X + X' = \emptyset$?



♣ (Resp. parcial) La ecuación equivale a las *dos* condiciones $AX = \emptyset, BX' = \emptyset$, que equivalen, la primera (ejercicios anteriores, como puede verse si se escribe $AX = X(A')' = \emptyset$) a $X \subset A'$, mientras que la segunda (nuevamente, ejercicios anteriores) es $B \subset X$, de modo que puesto todo junto se necesita (y alcanza) $B \subset A'$, con solución $X \subset I$ tal que $B \subset X \subset A'$, siendo única sii $B = A'$. La figura sirve de ilustración de una solución intermedia (observar que se grafica un caso *con* solución, pues A y B son disjuntos). $|S| = 2^n$, siendo $n = n_i - n_a - n_b$.
La ecuación $(A+A')X + X' = \emptyset$ no tiene solución (lo que por otra parte puede verse directamente, pues dice que existe algún X subconjunto del no vacío I para el que se cumple $(A+A')X + X' = IX + X' = X + X' = I = \emptyset$).

20. $(+)$ Dados dos conjuntos A y B en I, sea el problema de hallar *todos* los conjuntos X en I que satisfacen la ecuación $AX = B$. Determinar condiciones necesarias y suficientes sobre los conjuntos A, B para que la ecuación tenga solución, y hallarla en términos de A, B. En particular, resolver $AX = B$ en $I = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, en tanto sea posible, para los siguientes casos. En general, si A y B son tales que $AX = B$ tiene solución, con cardinales $n_a = |A|, n_b = |B|, n_i = |I|$, determinar el cardinal n_s del conjunto $S = \{X \subset I : AX = B\}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre los conjuntos A, B para que la solución sea única.
(a) $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{a_1, a_2\}$ (b)$A = \{a_1, a_2\}, B = \{a_1, a_2, a_3\}$ (c) $A = B = \{a_1, a_2, a_3\}$

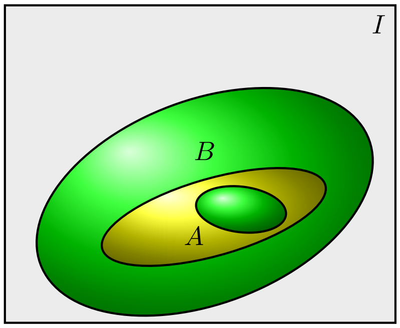
♣ (Resp. parcial) La ecuación $AX = B$ puede escribirse como $AB'X + A'B + BX' = \emptyset$, de donde debe ser (y alcanza) $A'B = \emptyset$ (esto es que $B \subset A$), y en ese caso es (ejercicio anterior) cualquier X tal que $B \subset X \subset B + A'$. La ecuación (a) tiene cuatro soluciones, mientras que (b) no tiene solución y (c) tiene cuatro soluciones. En general, siempre que $B \subset A$, es $n_s = 2^n$, siendo $n = n_i - n_a$. La solución es única sii $B + A' = B$, esto es que $A' \subset B$ y como además $B \subset A$ se tiene $A' \subset B \subset A$, esto es que $A' \subset A$ de donde $A' = \emptyset$, luego la ecuación tiene solución única (y es B) sii $A = I$ con cualquier B. La figura muestra sombreada en verde una solución intermedia entre la minimal B y la maximal $B + A'$.



21. Dados dos conjuntos A y B en I, sea el problema de hallar *todos* los conjuntos X en I que satisfacen la ecuación $A + X = B$. Determinar condiciones necesarias y suficientes sobre los conjuntos A, B para que la ecuación tenga solución, y hallarla en términos de A, B. En particular, resolver $AX = B$ en $I = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, en tanto sea posible, para los siguientes casos. En general, si A y B son tales que $A + X = B$ tiene solución, con cardinales $n_a = |A|, n_b = |B|, n_i = |I|$, determinar el cardinal n_s del conjunto $S = \{X \subset I : A + X = B\}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre los conjuntos A, B para que la solución sea única.

(a) $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{a_1, a_2\}$ (b)$A = \{a_1, a_2\}, B = \{a_1, a_2, a_3\}$ (c) $A = B = \{a_1, a_2, a_3\}$

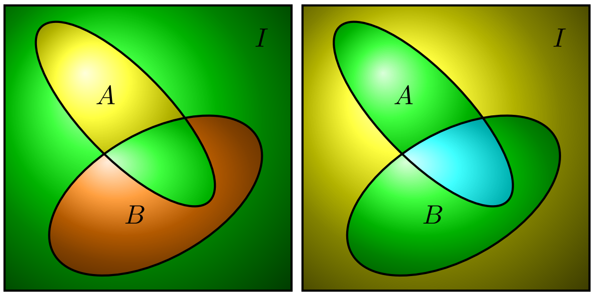
♣ (Resp. parcial) Dado que la ecuación $A + X = B$ equivale a $A'X' = B'$, por el ejercicio anterior, tiene solución sii $AB' = \emptyset$ (esto es que $A \subset B$), y es cualquier conjunto X tal que $A'B \subset X \subset B$. La ecuación (a) no tiene solución, mientras que (b) tiene cuatro soluciones y (c) tiene ocho soluciones. En general, siempre que $B \subset A$, es $n_s = 2^{n_a}$. La solución es única sii $A = \emptyset$ con cualquier B (y esa solución es B). La figura muestra sombreada en verde una solución intermedia entre la minimal $A'B$ y la maximal B.



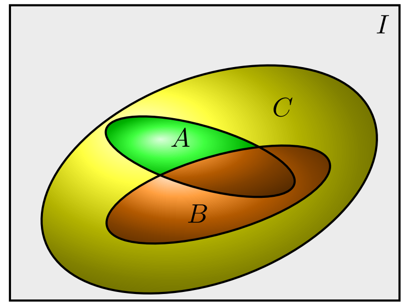
22. Resolver la ecuación en la incógnita X en cada uno de los siguientes casos, dando las condiciones necesarias y suficientes sobre los conjuntos fijos para que el sistema tenga solución. En cada caso, ilustrar con diagramas un caso en el que exista solución, proponiendo conjuntos fijos e indicando *cuántas* soluciones tiene. En general, si $n_a = |A|, n_b = |B|, n_{ab} = |AB|, n_i = |I|$, determinar el cardinal n_1 del conjunto $S_1 = \{X \subset I : AX = BX\}$ y el cardinal n_2 del conjunto $S_2 = \{X \subset I : A + X = B + X\}$. Determinar condiciones necesarias y suficientes sobre A y B para que la solución, en cada caso, sea única, e indicar cuál es tal solución única.

(a) $AX = BX$ (b) $A + X = B + X$

♣ (Resp. parcial) Ambas tienen solución cualesquiera sean los conjuntos A y B; la ecuación (a) tiene por solución cualquier conjunto contenido en $AB + A'B'$, mientras que para (b) es cualquier conjunto que contenga a $A'B + AB'$. En las figuras se sombrea en verde la solución maximal de (a) y la minimal de (b). En general, es $n_1 = n_2 = 2^n$, con $n = n_i + 2n_{ab} - n_a - n_b$. La unicidad, tanto en (a) como en (b) sii $B = A'$ (¡probarlo!), siendo $\emptyset$ la única en el caso (a), que queda $AX = A'X$, mientras que I es la solución única en el caso (b) cuya ecuación es $A + X = A' + X$.

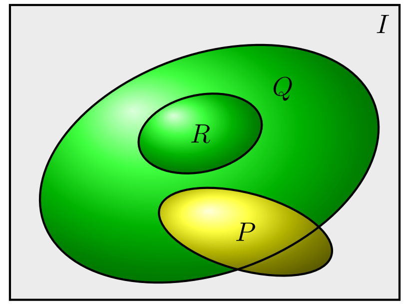


23. Determinar las condiciones necesarias y suficientes sobre los conjuntos fijos A, B, C para que el sistema en la incógnita X dado por $AX' \subset B, B'X' + C = I$, tenga solución. Mostrar en un diagrama de Venn la disposición relativa de los tres conjuntos incluidos en el universal I y dibujar en ese diagrama la solución minimal.



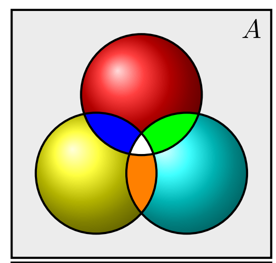
♣ (Resp. parcial) La ecuación $B'X' + C = I$ equivale a $(B + X)C' = \emptyset$ de donde $BC' = \emptyset, XC' = \emptyset$, así que $B \subset C, X \subset C$. Ahora, $AX' \subset B$ equivale a $AB'X' = \emptyset$ que es $AB' \subset X$. Puestos juntos es $AB' \subset X \subset C, B \subset C$, pero siendo $AB' \subset C, B \subset C$ queda que $B + A = B + B'A \subset C$, de modo que $A \subset C$. En síntesis: $A \subset C, B \subset C$, solución minimal AB', solución maximal C. La figura muestra las relaciones de inclusión necesarias y suficientes para A, B, C y, sombreada en verde, la solución minimal.

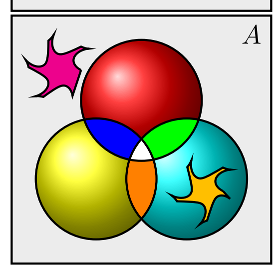
24. (+) Determinar las condiciones necesarias y suficientes sobre los conjuntos fijos P, Q, R para que el sistema de ecuaciones en la incógnita X dado por $PX = Q'X + Q'R, QR' + QX + R'X' = I$, tenga solución. Mostrar en un diagrama de Venn la disposición relativa de los tres conjuntos incluidos en el universal I y dibujar en ese diagrama la solución maximal.



♣ (Resp. parcial) La ecuación $QR' + QX + R'X' = I$ equivale a $(Q' + R)(Q' + X')(R + X) = \emptyset$ o bien $(Q' + Q'X' + Q'R + RX')(R + X) = \emptyset$ que equivale por absorción a $(Q' + RX')(R + X)' = \emptyset$, que es lo mismo que $RQ' + RX' + Q'X = \emptyset$, lo que vale sii $RQ' = \emptyset$, i.e. $R \subset Q, RX' = \emptyset$, i.e. $R \subset X, Q'X = \emptyset$, i.e. $X \subset Q$. La primera ecuación entonces es $PX = \emptyset$, i.e. $X \subset P'$. Puestos juntos es $R \subset X \subset P'Q$, debiendo ser P, R disjuntos (ya que $PR = P(RX) = P(XR) = (PX)R = \emptyset R = \emptyset$) con $R \subset Q$. La figura muestra las relaciones de inclusión necesarias y suficientes para P, R, C y, sombreada en verde, la solución maximal $P'Q$.

25. (+) La primera figura muestra una *partición* del conjunto A (esto es un conjunto de no vacíos subconjuntos de A, llamados *clases*, tal que cada elemento de A pertenece a exactamente una clase) en ocho clases de colores. La cantidad de particiones de un n-conjunto en k clases se designa con $S(n, k)$ (*Stirling number of the second kind*) y la cantidad total de particiones, con $B(n)$ (*Bell number*). Una partición π es un *refinamiento* de una partición P si toda clase de π es un subconjunto de alguna clase de P (la partición en diez clases de la segunda figura es un refinamiento de la primera).





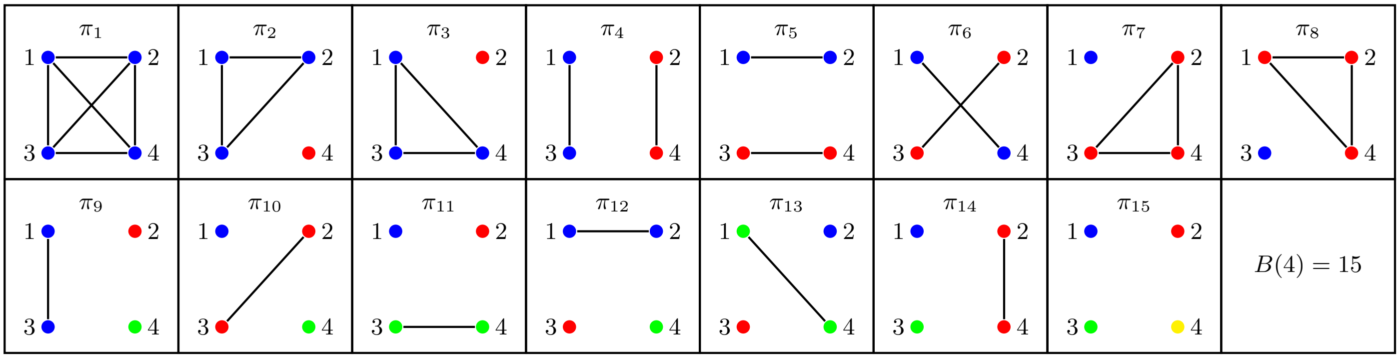
   (a) Determinar de modo explícito las $B(4)$ particiones de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y los correspondientes números de Stirling; escribir además una cadena de cuatro particiones tal que cada una sea un refinamiento de la anterior.

   (b) Probar que, cualquiera sea n, es $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ y que con $1 < k < n$ es $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$ y utilizar la expresión recursivamente para verificar los resultados del ítem anterior. Obtener una expresión explícita para $S(n, 2)$.

   (c) Dados el n-conjunto A y el q-conjunto B, determinar el cardinal de $\Phi_i(n, q) = \{f \in B^A : f \text{ es inyectiva}\}, \Phi_s(n, q) = \{f \in B^A : f \text{ es sobreyectiva}\}, \Phi_b(n, q) = \{f \in B^A : f \text{ es biyectiva}\}$.

   (d) Determinar una expresión explícita para los cardinales de $\Phi_s(n, 2), \Phi_s(n, 3)$ y (más difícil) $\Phi_s(n, n - 1)$.

♣ (Resp. parcial) (a) De tamaño 1, solo una partición: $\pi_1 = \{1, 2, 3, 4\}$; de tamaño 2, siete particiones: $\pi_2 = \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}, \pi_3 = \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \pi_4 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \pi_5 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \pi_6 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}, \pi_7 = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \pi_8 = \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}$; de tamaño 3, seis particiones: $\pi_9 = \{\{2\}, \{4\}, \{1, 3\}\}, \pi_{10} = \{, \{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\}, \pi_{11} = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}, \pi_{12} = \{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \pi_{13} = \{\{2\}, \{3\}, \{1, 4\}\}, \pi_{14} = \{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}$; de tamaño 4, solo una partición: $\pi_{15} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Luego es $S(4, 1) = 1, S(4, 2) = 7, S(4, 3) = 6, S(4, 4) = 1$ y entonces $B(4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$. Una cadena de refinamientos es $\pi_1\pi_2\pi_9\pi_{15}$. En la figura, para cada partición, se observa un *grafo* con los puntos que pertenecen a una misma clase, pintados de un mismo color y conectados con una arista (así, cada clase constituye una *componente conexa* del grafo). Se ha omitido indicar un *loop* en cada punto (que es necesario, puesto que cada punto pertenece a su propia clase). *Observación.* Los primeros números de Bell son $B(0) = B(1) = 1, B(2) = 2, B(3) = 5, B(4) = 15, B(5) = 52, B(6) = 203$.

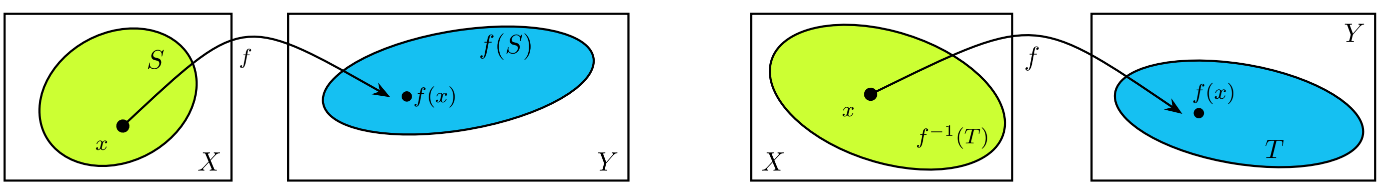


(b) en cualquier partición de $A = \{1, 2, \dots, n\}$, el elemento n o bien está solo en su clase o bien pertenece a una clase con más de un elemento. En el primer caso, los restantes elementos se parten de $S(n-1, k-1)$ formas (que acompañados de $\{n\}$ constituyen una k-partición); en el segundo caso, a las $S(n-1, k)$ particiones de $\{1, 2, \dots, n-1\}$ se puede añadirle n (lo que puede hacerse de k formas) y entonces $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$. Utilizando esta expresión (y que trivialmente $S(n, 1) = S(n, n) = 1$) es $S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = 1 + 2(S(2, 1) + 2S(2, 2)) = 1 + 2(1 + 2) = 7$. Una expresión explícita para $k = 2$ es $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$, lo que se ve de inmediato si se considera que cada partición está compuesta por un conjunto y su complemento, y como hay 2^n subconjuntos de A, hay $2^n/2 = 2^{n-1}$ pares; sin embargo, el par dado por el $\emptyset$ y su complemento A debe quitarse, por definición de partición.

(c) Si $n > q, |\Phi_i(n, q)| = 0$, si $n \leq q, |\Phi_i(n, q)| = q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1) = q!/(q-n)!$. Si $n < q, |\Phi_s(n, q)| = 0$, si $n \geq q$, se puede responder algo todavía más general: ¿Cuántas funciones tienen por imagen un k-subconjunto de B? cuya respuesta es sencilla: hay $S(n, k)$ particiones de A en conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_k$, y hay $\binom{q}{k}$ subconjuntos de B de cardinal k, de modo que hay $k!$ formas de aparear los A_i con cada elemento de la imagen, y entonces hay $k!\binom{q}{k}S(n, k)$ funciones con imagen de cardinal k; en particular, para las sobreyectivas es $k = q$, de modo que $|\Phi_s(n, q)| = q!S(n, q)$. Por último, si $n \neq q$ es $|\Phi_b| = 0$, mientras que para $n = q$ es $|\Phi_b| = n!$. *Observación 1.* Dado que el total de funciones es q^n, debe cumplirse que $q^n = \sum_{k=1}^{q} k!\binom{q}{k}S(n, k)$. *Observación 2.* Con lo hallado para los números de Stirling, puede deducirse que para $2 \leq q \leq n$ vale $\Phi_s(n, q) = q(\Phi_s(n-1, q) + \Phi_s(n-1, q-1))$.

(d) $|\Phi_s(n, 2)| = 2^n - 2, |\Phi_s(n, 3)| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3, |\Phi_s(n, n-1)| = \frac{1}{2}n(n-1)(n-1)!$.

26. (+) Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones para $f : X \to Y$ (Recodar, como muestran las figuras, que la la *imagen* por f de $S \subset X$ es $f(S) = \{y \in Y : y = f(x), x \in S\}$, mientras que la *preimagen* por f de $T \subset Y$ es $f^{-1}(T) = \{x \in X : f(x) \in T\}$).



(a) $f(X) = Y$
(b) $f^{-1}(Y) = X$
(c) $\forall B \subset Y : f(f^{-1}(B)) \subset B$
(d) $\forall B \subset Y : f(f^{-1}(B)) = B$
(e) $(\forall B \subset Y : f(f^{-1}(B)) = B)$ sii f es sobreyectiva
(f) $\forall A \subset X : A \subset f^{-1}(f(A))$
(g) $\forall A \subset X : A = f^{-1}(f(A))$
(h) $(\forall A \subset X : A = f^{-1}(f(A))$ sii f es inyectiva
(i) $\forall A, B \subset X : f(A + B) = f(A) + f(B)$
(j) $\forall A, B \subset X : f(AB) \subset f(A)f(B)$
(k) $\forall A, B \subset X : f(AB) = f(A)f(B)$
(l) $\forall A, B \subset X : f(AB) = f(A)f(B)$ sii f es inyectiva
(m) $\forall A, B \subset X : f(A) - f(B) \subset f(A - B)$
(n) $\forall A, B \subset X : f(A) - f(B) = f(A - B)$
(o) $\forall A, B \subset X : f(A) - f(B) = f(A - B)$ sii f es inyectiva

(p) $\forall C, D \subset Y : f^{-1}(C + D) = f^{-1}(C) + f^{-1}(D)$

(q) $\forall C, D \subset Y : f^{-1}(CB) = f^{-1}(C)f^{-1}(D)$

(r) $\forall C, D \subset Y : f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$

(s) $\forall B \subset Y : f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'$

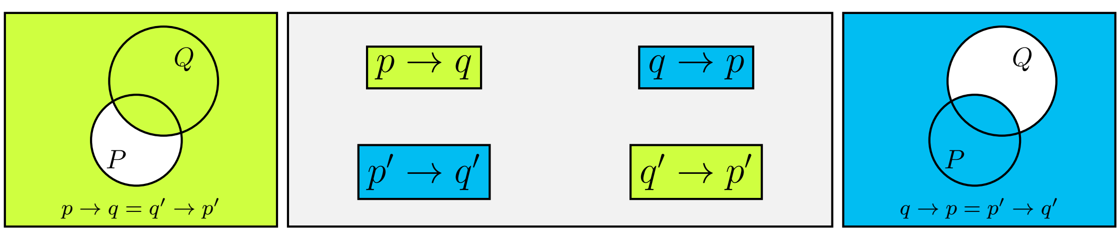
(t) $\forall A \subset X : f(A') = (f(A))'$

(u) $\forall A \subset X : f(A') = (f(A))'$ sii f es biyectiva.

♣ (Resp. parcial) (a) **F**. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, f(\mathbb{R} = \mathbb{R}_0^+ \neq \mathbb{R}$; (b) **V** Por definición de función, $x \in X$ sii $f(x) \in Y$; (c) **V**. $\forall y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y = f(x)$ con $x \in f^{-1}(B)$, esto es $y = f(x) \in B$; (d) **F**. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, B = \{-4, 4\} \subset \mathbb{R} \neq f(f^{-1}(A)) = f(\{2\}) = \{4\}$; (e) **V**. Si da la igualdad, poniendo $B = Y$ y dado que $f^{-1}(Y) = X$, queda $f(X) = Y$, de modo que f es sobreyectiva (falta la vuelta); (f) **V**. $\forall x \in A : f(x) \in f(A)$ esto es que $x \in f^{-1}(f(A))$; (g) **F**. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, A = \{2\} \subset \mathbb{R}$ que no es igual a $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$; (h)**V**. Por (f) ya se sabe que $A \subset f^{-1}(f(A))$, ahora $\forall x \in f^{-1}(f(A)) : f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$ (pues en caso contrario, $f(x) = f(u)$, con $u \in A, u \neq x$, contradiciendo la inyectividad), esto prueba que f inyectiva $\Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$, resta probar la recíproca; (i) **V**; (j) **V**. $\forall y \in f(AB), \exists x \in AB$ tal que $y = f(x)$, de modo que $y \in f(A)$ (ya que $x \in A$) y también $y \in f(B)$ (ya que $x \in B$), luego $y \in f(A)f(B)$; (k) **F**. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, A = \{-1, 0\}, B = \{1, 0\}, f(AB) = \{0\} \neq \{1, 0\} = f(A)f(B)$; (l) **V**. Por (j) se sabe que $f(AB) \subset f(A)f(B)$; si f es inyectiva también vale la otra inclusión, pues $\forall y \in f(A)f(B) : y = f(x)$ con $x \in A, y = f(u)$ con $u \in B$, de donde $f(x) = f(u)$ y de la inyectividad $x = u$, de modo que $y = f(x), x \in AB$, que prueba que $y \in f(AB)$ (resta probar que la inyectividad es necesaria); (m) **V**. $\forall y \in f(A) - f(B), y = f(x)$ con $x \in AB' \Rightarrow y \in f(AB')$; (n) **F**. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, A = \mathbb{R}^+, B = \mathbb{R}^-, f(A) = f(B) = \mathbb{R}^+, f(A) - f(B) = \emptyset \neq \mathbb{R}^+ = f(A - B) = f(A)$; (o) **V**. La inyectividad es necesaria, pues si f no es inyectiva existen $u, v \in A, u \neq v : f(u) = f(v)$ y entonces con $A = \{u\}, B = \{v\}. f(A) - f(B) = \emptyset \neq f(A - B) = f(A)$ (resta probar que la inyectividad es suficiente); (p) **V**; (q) **V**; (r) **V**; (s)**V**; (t) **F**. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, A = \mathbb{R}^+, A' = \mathbb{R}_0^-, f(A') = f(\mathbb{R}_0^-) = \mathbb{R}_0^+ \neq \mathbb{R}_0^- = (f(\mathbb{R}^+))' = (f(A))'$. (u) **V**. La biyectividad es suficiente para la igualdad, pues $\forall A \subset X : f(A) + f(A') = f(A + A') = f(X) = Y$ (la primera igualdad por (i), la segunda por definición de complemento en X, la tercera por ser f sobreyectiva) y por otra parte $\forall A \subset X : f(A)f(A') = f(AA') = f(\emptyset) = \emptyset$ (la primera igualdad por (l), la segunda por definición de complemento, la tercera por definición de imagen), de modo que f biyectiva $\Rightarrow \forall A \subset X : f(A') = (f(A))'$.

Observación. La preimagen tiene, respecto de las operaciones suma, producto y complemento mejor comportamiento que la imagen, como puede verse de la validez de (q), (r), (s) y la falsedad de (k), (n), (t).

27. (−) Dada la proposición condicional $p \to q$ se llama contraria (también se le llama inversa u opuesta) a $p' \to q'$, recíproca a $q \to p$, contrarrecíproca (por ser contraria de la recíproca) a $q' \to p'$, su negación es $(p \to q)' = pq'$. Para cada una de las siguientes proposiciones, escribir su contraria, recíproca, contrarrecíproca y negación, determinando su valor de verdad. ¿Una proposición y su contraria pueden ser ambas verdaderas? ¿Pueden ser ambas falsas?



(a) Para todos los números reales x e y, si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$.

(b) Para todos los números naturales x e y, si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$.

(c) Si el cuadrado de un número natural n cualquiera es par, el número n es par.

(d) Una condición suficiente para que $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$ es que la función escalar f sea nula.

(e) Siendo p, q dos proposiciones, una condición necesaria para que $p \downarrow q$ sea falsa es que $p' \uparrow q'$ sea verdadera.

(f) Una condición necesaria para la convergencia de la serie numérica $\sum_1^\infty a_n$ es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(g) Una condición suficiente para que una matriz cuadrada A sea regular es que 0 no pertenezca a su espectro.

(h) Si una función escalar es derivable en un punto entonces es continua en ese punto.

(i) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es nulo, entonces al menos una de las matrices es nula.

(j) Si el cuadrado de una matriz cuadrada es la matriz nula, entonces la matriz misma es nula.

(k) Una condición necesaria para la nulidad del determinante del producto de dos matrices es la nulidad del determinante de alguna de ellas.

(l) Una condición necesaria para la inyectividad de un campo escalar f es que el cardinal de cualquiera de sus conjuntos de nivel sea a lo sumo uno.

(m) Una condición necesaria para que una transformación lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ sea inyectiva es que su núcleo sea el subespacio nulo.

(n) Una condición necesaria para que la suma de dos números naturales sea mayor que ocho es que al menos uno de ellos sea mayor que cuatro.

(o) Si una función diferenciable $f : A \to R$ tiene derivada nula es su dominio abierto A, entonces es constante.

(p) $\forall m, n \in \mathbb{N} : a|b \Rightarrow \operatorname{mcd}(a,b) = a$.

♣ (Resp. parcial) La proposición (a) es falsa, pues es verdadera su negación, existen los reales $x = 1, y = -1$ cuyos cuadrados son iguales y sin embargo $x = 1 \neq -1 = y$. La recíproca es verdadera, pues si $x = y$ entonces $x^2 = xx = yy = y^2$. La contraria (si dos reales son tales que sus cuadrados son distintos, esos reales deben ser distintos) es verdadera, puesto que tiene el mismo valor que la recíproca. La contrarrecíproca (si dos reales son distintos entonces sus cuadrados son distintos) es falsa, pues tiene el mismo valor que la original, y por supuesto sirve el mismo contraejemplo como prueba de esa falsedad.

(b) es verdadera junto con la recíproca, la contraria y la contrarrecíproca. La contraria dice que si dos números naturales tienen distintos cuadrados, entonces los números mismos deben ser distintos.

(c) es verdadera junto con la recíproca, la contraria y la contrarrecíproca. La contrarrecíproca afirma que el cuadrado de cualquier impar es impar, cuya prueba es sencilla, pues si n es impar (esto es $n = 2k - 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$) entonces es $n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k-2) + 1$ que es impar.

(d) es verdadera junto a su contrarrecíproca, con recíproca y contraria falsa (como lo prueba $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = 2t - 1$).

(e) vale que $(p \downarrow q)' \Leftrightarrow p' \uparrow q'$, de modo que la condición es ciertamente suficiente (y también es necesaria), de modo que la proposición es verdadera junto a su contraria, recíproca y contrarrecíproca.

(f) es verdadera (si la serie converge a S es $a_n = \sum_1^n a_k - \sum_1^{n-1} a_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} = S - S = 0$), con recíproca y contraria falsas; la falsedad de la recíproca (y entonces de la contraria) la prueba la sucesión armónica $\sum_1^\infty (1/n)$, que es divergente y sin embargo $(1/n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} = 0$.

(g) es verdadera junto con su recíproca, contraria y contrarrecíproca (y entonces se dice que la condición de que A sea regular es necesaria y suficiente para que el número cero no sea uno de sus autovalores).

(h) es verdadera con recíproca falsa, como lo prueba $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = |t|$, continua y no derivable en $t_0 = 0$.

(i) es falsa (ver $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ cuyo producto AB es la matriz nula), con recíproca verdadera.

(j) es falsa (ver que A^2 es la matriz nula con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$), con recíproca verdadera.

(k) es falsa $A = (12), B = (2\ {-1})^T$.

(l) es verdadera, cualquiera sea k en el codominio, su preimagen es vacía si $k \notin \operatorname{Im}(f)$, o bien es un *singleton* si $k \in \operatorname{Im}(f)$, puesto que de ser de cardinal al menos dos, existirían en el dominio $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = k$, en contra de la inyectividad.

(m) es verdadera, pues de no serlo, existirían los vectores $u \neq v$ tales que $T(u) = T(v) = 0_{\mathbb{W}}$, contradiciendo la inyectividad.La recíproca es verdadera: si $u, v \in \mathbb{V}$ son tales que $T(u) = T(v)$ entonces $T(u) - T(v) = 0_{\mathbb{W}}$ y por la linealidad $T(u - v)0_{\mathbb{W}}$, de modo que $u - v$ está en el núcleo de T, que es el subespacio nulo, de modo que $u - v = 0_{\mathbb{V}}$, lo que produce $u = v$.

(n) es verdadera, con recíproca falsa.

(o) es falsa, con recíproca verdadera.

(p) es verdadera, con contraria verdadera.

Una proposición $p \to q$ puede resultar verdadera junto a su contraria $p' \to q'$ (ver zonas de veracidad) y en tal caso, debe serlo junto con la recíproca, y entonces con su contrarrecíproca (las cuatro dicen lo mismo, que p equivale a q); en cambio, no pueden ser ambas falsas.

28. (+) Un álgebra de Boole se estructura como la séxtupla $(B, +, \cdot, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ siendo la suma y producto $(+, \cdot)$ leyes de composición interna en B, el complemento $(\,'\,)$ operación unaria en B, los neutros $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \subset B$ tales que para todo x, y, z en B se verifican los *axiomas* (a) (b) (c) (d) es un álgebra de Boole. Probar las *propiedades* (e) (f) (g) (h) (i) (j). ¿Puede haber más de un $\mathbf{0}$ o más de un $\mathbf{1}$? ¿Para un dado x puede haber más de un x'? ¿Puede un elemento ser su propio complemento?

(a) Conmutativa	$x + y = y + x,\ xy = yx$	(b) Distributiva	$x(y+z) = xy + xz, \quad x + yz = (x+y)(x+z)$
(c) Neutros	$x + \mathbf{0} = x,\ \mathbf{1}\,x = x$	(d) Complemento	$x + x' = \mathbf{1},\ xx' = \mathbf{0}$
(e) Acotación	$\mathbf{1} + x = \mathbf{1},\ \mathbf{0}\,x = \mathbf{0}$	(f) Asociativa	$(x+y)+z = x+(y+z),\ (xy)z = x(yz)$
(g) Involución	$(x')' = x$	(h) De Morgan	$(x+y)' = x'y',\ (xy)' = x' + y'$
(i) Idempotencia	$x + x = x,\ xx = x$	(j) Absorción	$x + xy = x,\ x(x+y) = x$

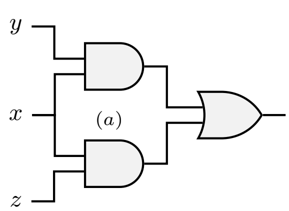
♣ (Resp. Parcial) Para (i), sea un x cualquiera en B: $x = x + \mathbf{0} = x + xx' = (x+x)(x+x') = (x+x)\mathbf{1} = \mathbf{1}(x+x) = x+x$ (la primera y sexta igualdad por (c), la segunda por (d), la tercera por (b), la cuarta por (d), la quinta por (a)). El $\mathbf{0}$ es único, pues si $\mathbf{0_1}, \mathbf{0_2}$ son ceros, debe ser $\mathbf{0_1} = \mathbf{0_1} + \mathbf{0_2} = \mathbf{0_2}$ (la primera igualdad por ser $\mathbf{0_2}$ un cero, la segunda por ser $\mathbf{0_1}$ un cero).

Observación 1: si en un dado ejercicio se exigiera la prueba de una propiedad utilizando exclusivamente los axiomas, es conveniente segmentar la prueba para demarcar claramente qué axiomas van interviniendo. Por ejemplo, si se pidiera probar la propiedad de absorción (j) con solo los axiomas podría verse así: probando previamente la idempotencia (sea un x cualquiera en B: $x = x + \mathbf{0} = x + xx' = (x+x)(x+x') = (x+x)\,\mathbf{1} = \mathbf{1}\,(x+x) = x+x$ (la primera y sexta igualdad por (c), la segunda por (d), la tercera por (b), la cuarta por (d), la quinta por (a))), la unicidad del $\mathbf{1}$ (si $\mathbf{1_1}, \mathbf{1_2}$ son unidades, debe ser $\mathbf{1_1} = \mathbf{1_1}\,\mathbf{1_2} = \mathbf{1_2}$ (la primera igualdad por ser $\mathbf{1_2}$ una unidad, la segunda por ser $\mathbf{1_1}$ una unidad)) y la acotación (para cualquier $x \in B : \mathbf{1} + x = \mathbf{1}$, porque $(\mathbf{1}+x)x = \mathbf{1}\,x + xx = x + xx = x + x = x$, la primera igualdad por el axioma (b), la segunda por el axioma (c), la tercera y cuarta por idempotencia; de allí, por unicidad del $\mathbf{1}$, es $\mathbf{1} + x = \mathbf{1}$). Con estas ya probadas, para todo x, y en B es $x + xy = \mathbf{1}\,x + xy = x\,\mathbf{1} + xy = x\,(\mathbf{1} + y) = x\,\mathbf{1} = \mathbf{1}\,x = x$ (detallar el motivo de cada igualdad de la cadena anterior).

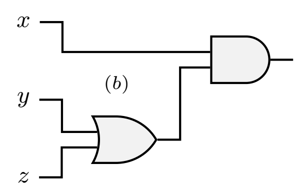
Observación 2: Las pruebas no son, por supuesto, únicas; por ejemplo, una prueba directa, que no requiere la utilización de propiedades sino que se asienta exclusivamente en los axiomas de la propiedad de acotación (e), esto es de que para cualquier $x \in B : \mathbf{1} + x = \mathbf{1}$ es la siguiente: $\mathbf{1} = x + x' = x + (\mathbf{1}\,x') = x + (x'\,\mathbf{1}) = (x+x')(x+\mathbf{1}) = \mathbf{1}\,(x+\mathbf{1}) = x + \mathbf{1} = \mathbf{1} + x$, con la primera igualdad por (d), la segunda por (c), la tercera por (a), la cuarta por (b), la quinta por (d), la sexta por (c), y la séptima por (a). La misma prueba (cambiando $\mathbf{1}$ por $\mathbf{0}$ y $+$ por $\cdot$) debe servir para probar su dual $\mathbf{0}\,x = \mathbf{0}$, esto es que $\mathbf{0} = xx' = x(\mathbf{0}\,x') = x(x'\,\mathbf{0}) = (xx') + (x\,\mathbf{0}) = \mathbf{0} + (x\,\mathbf{0}) = x\,\mathbf{0} = \mathbf{0}\,x$.

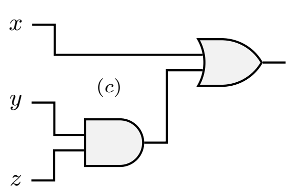
29. $(-)$ Diseñar los circuitos de compuertas que se corresponden con el axioma de distributividad del producto respecto de la suma y de la suma respecto del producto en un álgebra de Boole $(B, +, \cdot\,, {}', \mathbf{0}, \mathbf{1})$, esto es que para todo x, y, z en B se verifica $x(y+z) = xy + xz, \quad x + yz = (x+y)(x+z)$.

♣ (Resp. Parcial) Basta escribir los circuitos equivalentes a cada secuencia operacional, resultando los siguientes esquemas:

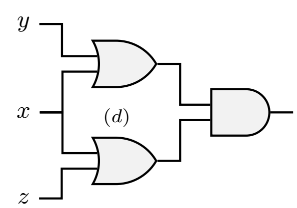


$$xy + xz = x(y+z)$$





$$x + yz = (x+y)(x+z)$$



30. $(-)$ Sean a_1, a_2, a_3 tres elementos cualesquiera de un álgebra de Boole $(B, +, \cdot\,, {}', \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Probar que $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$. ¿Y con cuatro elementos?

♣ (Resp. Parcial) Se tiene (¡dar detalles!) $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1) = [(a_1+a_2)(a_2+a_3)](a_3+a_1) = (a_1a_2+a_2a_2+a_2a_3+a_1a_3)(a_3+a_1) = (a_2 + a_2a_3 + a_1a_3)(a_3+a_1) = (a_2 + a_1a_3)(a_3+a_1) = a_2a_3 + a_2a_1 + a_1a_3a_3 + a_1a_3a_1 = a_2a_3 + a_2a_1 + a_1a_3a_3 + a_1a_1a_3 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$. Con cuatro elementos queda $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_1) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1$.

31. $(-)$ En el conjunto $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ de los divisores positivos de 30 se definen $x + y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{mcm}(x,y), xy \overset{\text{def}}{=} \operatorname{mcd}(x,y)$. Definir $(\,{}'\,), \mathbf{0}, \mathbf{1}$ de modo que $(D_{30}, +, \cdot\,, {}', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ sea un álgebra de Boole, determinar sus átomos (un elemento $a \neq \mathbf{0}$ es un átomo si de $xa = x$ se deduce que $x = a \vee x = \mathbf{0}$) y resolver la ecuación $x + yz + y' + ux = \mathbf{0}$. Determinar todas sus subálgebras. En general, cambiando 30 por un número natural n, no resultará D_n un álgebra de Boole: ¿qué condición sobre n es necesaria y suficiente para que D_n sea un álgebra de Boole con esta suma y producto? Determinar, cumplida esa condición, los átomos de D_n.

♣ (Resp. Parcial) En $D_{30}, x' \overset{\text{def}}{=} 30/x$, quedando $\mathbf{0} = 1, \mathbf{1} = 30$, con átomos $2, 3, 5$; la solución es el conjunto de los $(x,y,z,u) \in D_{30}^4$ tales que $x = z = 1, y = 30$. Las subálgebras de D_{30} son $H_1 = \{1, 5, 6, 30\}, H_2 = \{1, 2, 15, 30\}, H_3 = \{1, 3, 10, 30\}$ y las dos triviales $H_4 = \{1, 30\}, H_5 = D_{30}$. En efecto, es imposible con D_8, ya que, por ejemplo, para 2 no existiría un complemento. La condición es que n esté libre de cuadrados (esto es que n sea el producto de primos *distintos*), pues en ese caso los divisores primos de x serán distintos de los de x' (con $x' = n/x$) y entonces, por definición $x + x' = n, xx' = 1$, de modo que x' es un complemento de x; los átomos de D_n resultan entonces ser los divisores primos de n (¡probarlo!).

32. (−) El conjunto $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ se estructura en un álgebra de Boole con las leyes $+$ y $\cdot$ definidas en la siguiente tabla.

$+$	α	β	γ	δ	$\cdot$	α	β	γ	δ
α					α				
β			δ		β				
γ					γ		α		
δ					δ				

Completar la tabla y hallar *todos* los $(x, y, z, w) \in \mathcal{B}^4$ que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + w(x+y+z) &= \delta \\ \delta xy + xz + \alpha &= yw \\ \beta\gamma z + xyw + \alpha\delta &= \alpha\gamma \end{cases}$$

Reescribir (y resolver) el mismo sistema de ecuaciones en el álgebra de Boole $(D_{10}, \text{mcm}, \text{mcd}, {}', 1, 10)$ (siendo $x' = 10/x$).

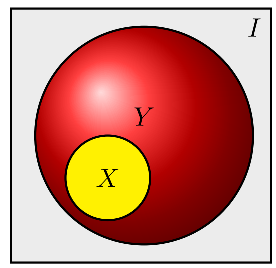
$+$	α	β	γ	δ	$\cdot$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ	α	α	α	α	α
β	β	β	δ	δ	β	α	β	α	β
γ	γ	δ	γ	δ	γ	α	α	γ	γ
δ	δ	δ	δ	δ	δ	α	β	γ	δ

♣ (Resp. Parcial) Resulta α neutro para $+$ y δ neutro de $\cdot$, lo que unido a la conmutatividad e idempotencia de ambas (la diagonal principal es $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) permite completar (¿de modo único?) la tabla. La solución se integra de los cuatro elementos de B^4 del tipo (x, α, x', δ), con $x \in B$. Con $B = D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$, la tercera ecuación es $(2 \cdot 5)z + xyw + 1 \cdot 10 = 1 \cdot 5$, y cualquiera sea $x \in D_{10}$ se tiene que $(x, 1, x', 10)$ es una solución.

33. (+) Sean x e y dos elementos cualesquiera en un álgebra de Boole $(B, +, \cdot, {}', \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Probar que (a), (b), (c), (d) son *equivalentes* y que también lo son (e), (f), (g), (h); ilustrar el significado de (a) o cualquiera de sus equivalentes en un álgebra de Boole de conjuntos con la unión e intersección.

(a) $xy = x$ (b) $x + y = y$ (c) $xy' = \mathbf{0}$ (d) $x' + y = \mathbf{1}$
(e) $x = y$ (f) $x' = y'$ (g) $x'y + xy' = \mathbf{0}$ (h) $(x' + y)(x + y') = \mathbf{1}$

♣ (Resp. parcial) Que $(a) \Rightarrow (b)$ resulta de $x + y = xy + y = xy + \mathbf{1}\,y = (x + \mathbf{1})y = \mathbf{1} \cdot y = y$; también $(b) \Rightarrow (a)$, pues $xy = x(x + y) = xx + xy = x + xy = x\,\mathbf{1} + xy = x(\mathbf{1} + y) = x \cdot \mathbf{1} = x$. Por otra parte, $(a) \Rightarrow (c)$ pues $xy' = (xy)y' = x(yy') = x\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$ y también $(c) \Rightarrow (a)$ pues $xy = xy + \mathbf{0} = xy + xy' = x(y + y') = x \cdot \mathbf{1} = x$; finalmente, (d) es la dual de (c). Ahora, $(f) \Rightarrow (e)$ pues $x = (x')' = (y')' = y$, y también $(e) \Rightarrow (f)$ trivialmente; por otra parte $(e) \Rightarrow (g)$ pues si $x = y$ es $x'y + xy' = x'x + xx' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, mientras que $(g) \Rightarrow (e)$ pues si $x'y + xy' = \mathbf{0}$ deben ser $xy' = \mathbf{0}, x'y = \mathbf{0}$ y entonces (ver $(c) \Rightarrow (a)$) es $x = xy = y$. Ahora, (h) es dual de (g). La condición (a) en el álgebra de conjuntos es $XY = X$, o bien $X \subset Y$ (¡'ver' en la figura (a), (b), (c), (d)!).



34. (+) Si en $(B, +, \cdot, {}', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ se *define* la relación $(\leq)$ como $x \leq y$ sii $xy = x$ (o cualquiera de sus equivalentes $xy' = \mathbf{0}, x + y = y, x' + y = \mathbf{1}$), probar que para tres cualesquiera x, y, z en B, la relación $(\leq)$ cumple los siguientes tres axiomas que inducen un *orden parcial* en B (se le llama *orden natural*), y entonces el conjunto con el orden se designa como *poset* (contracción de *partial ordered set*).

$x \leq x$ (reflexiva) $(x \leq y, y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ (antisimétrica) $(x \leq y, y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (transitiva)

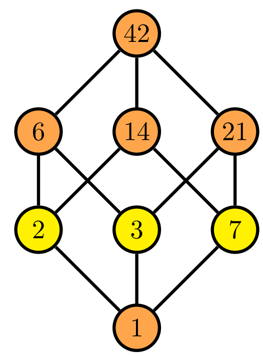
La relación de orden estricto $(<)$ se define a partir de la relación de orden parcial $(\leq)$ como $x < y$ sii $x \leq y, x \neq y$. Probar que es irreflexiva (para ningún $x \in B : x < x$), asimétrica (no existen $x, y \in B$ tales que $x < y, y < x$) y transitiva$(\forall x, y, z \in B : (x < y, y < z) \Rightarrow x < z)$. Recíprocamente, dada una relación irreflexiva, asimétrica y transitiva $(<)$ puede definirse la relación de orden $(\leq)$ mediante $x \leq y$ sii $x < y \vee x = y$.

♣ (Resp. parcial) Para cualquier x en B es (idempotencia) $xx = x$, de modo que (por definición) $x \leq x$; por otra parte, si $x \leq y, y \leq x$, es que $xy = x, yx = y$, de donde (conmutatividad) queda $x = y$; finalmente, si $x \leq y, y \leq z$, es que $xy = x, yz = y$, entonces $xz = (xy)z = x(yz) = xy = x$, y de allí es $x \leq z$. La relación $(<)$ es irreflexiva $(\forall x \in B : x \not< x$, pues $x = x)$, es asimétrica (si $x < y, y < x$ entonces $x \neq y, x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y \neq y$), y es transitiva ($x < y, y < z \Rightarrow y \leq z$, y además $x \neq z$, pues en caso contrario se tendría $z < y < z$ lo que es imposible por la irreflexividad).

35. (+) En $(B, +, \cdot, {}', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ con el orden natural, probar que para cualesquiera x, y, en B, con a, b dos átomos distintos, se verifican las siguientes propiedades y mostrar su cumplimiento en particular en $(D_{42}, \text{mcm}, \text{mcd}, {}', 1, 42)$ y en $(\mathcal{P}(A), +, \cdot, {}', \emptyset, A)$, con $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ (previamente, determinar qué significa $(\leq)$ en cada una de estas álgebras). Dibujar los correspondientes diagramas de Hasse. ¿Cuántas subálgebras hay en D_{42}? ¿Cuántas subálgebras de D_{42} están *bien ordenadas*? Definir un isomorfismo entre D_{42} y $\mathcal{P}(A)$.

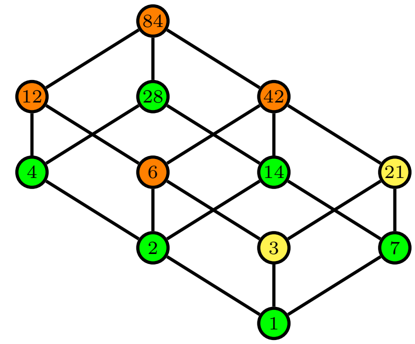
(a) $\mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}$ (b) $xy \leq x \leq x + y$ (c) $\sup(x, y) = x + y, \inf(x, y) = xy$ (d) $(x \leq y) \Leftrightarrow (y' \leq x')$ (e) $a\,b = \mathbf{0}$

♣ (Resp. parcial) (a) de $\mathbf{0}\cdot x=\mathbf{0}, x\cdot\mathbf{1}=x$ queda por definición de $(\leq)$ que $\mathbf{0}\leq x\leq\mathbf{1}$; (b) $xy\leq x$, pues $(xy)x=(yx)x=y(xx)=yx=xy$; también $x\leq x+y$, pues $x(x+y)=xx+xy=x+xy=x\cdot\mathbf{1}+xy=x(\mathbf{1}+y)=x\cdot\mathbf{1}=x$; (c) $\inf(x,y)=xy$ pues xy es una cota inferior de $\{x,y\}$ (por lo anterior, $xy\leq x, xy\leq y$), y si z es otra cota inferior (es decir $zx=zy=z$) se tiene que $z(xy)=(zx)y=zy=z$, de modo que $z\leq xy$; (d) $(x\leq y)\Rightarrow(y'\leq x')$, pues $y'x'=y'(xy)'=y'(x'+y')=y'x'+y'y'=y'x'+y'=y'x'+y'\cdot\mathbf{1}=y'(x'+\mathbf{1})=y'\cdot\mathbf{1}=y'$; (e) como por definición, $a\neq\mathbf{0}$ es un átomo sii $\forall x\in B:(x\leq a)\Rightarrow(x=\mathbf{0}$ o bien $x=a)$, y como además es $ax\leq a$ (por (b)), debe ser $ax=\mathbf{0}$ o bien $ax=a$, y tomando $x=b\neq a$ debe ser $ab=\mathbf{0}$ o bien $ab=a$, pero si $ab=a$ es $b=ba=ab=a$, lo que es imposible, de modo que solo queda $ab=\mathbf{0}$. En D_{42}, $(\leq)$ es $(\,|\,)$, en $\mathcal{P}(A)$ es $(\subset)$. La propiedad (a) en $\mathcal{P}(A)$ afirma que para cualquier $X\in\mathcal{P}(A)$ es $\emptyset\subset X\subset A$; la (d) en D_{42} aplicada a $2,6$ muestra que $2\mid 6$ con $7\mid 21$; la (e) en D_{42} dice que para los átomos (nodos amarillos) es $2\cdot 3=2\cdot 7=3\cdot 7=1$. Hay cinco subálgebras de D_{42}, una es $(S_1,\mathrm{mcm},\mathrm{mcd},\,',1,42)$, con $S_1=\{1,6,7,42\}$; las otras: $S_2=\{1,2,21,42\}, S_3=\{1,3,14,42\}, S_4=\{1,42\}, S_5=D_{42}$, solo S_4 está bien ordenada.



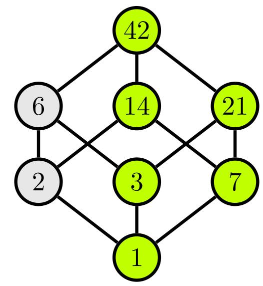
36. $(-)$ En D_{84} se define la suma $x+y=\mathrm{mcm}(x,y)$, el producto $x\cdot y=\mathrm{mcd}(x,y)$, y la relación $x\leq y$ sii $xy=x$. Dibujar el diagrama de Hasse, y hallar todos los $x\in D_{84}$ tal que $1\leq 1+6x\leq 84(2+7)$. ¿Y cuál es la solución de la ecuación $6x=6$?

♣ (Resp. parcial) La figura muestra el diagrama de Hasse. Observando que $1+6x=\mathrm{mcm}(1,6x)=6x$ y que $2+7=\mathrm{mcm}(2,7)=14$ y que $\mathrm{mcd}(14,84)=14$ y teniendo en cuenta que 1 es el mínimo, la primera inecuación puede eliminarse pues se cumple trivialmente. De este modo, lo que debe resolverse es sencillamente $6x\leq 14$, inecuación que es satisfecha por $x_1=1,x_2=2,x_3=4,x_4=7,x_5=14,x_5=28$, nodos distinguidos con color verde en el diagrama. La ecuación $6x=6$ se satisface para x tomando los valores $6,12,42,84$, nodos coloreados de naranja en el diagrama.



37. $(-)$ En el conjunto D_{42} se definen: $x+y=\mathrm{mcm}(x,y), x\cdot y=\mathrm{mcd}(x,y), x\leq y$ sii $x\mid y$. Siendo los conjuntos $A=\{x\in D_{42}:x\leq 3\}, B=\{x\in D_{42}:x+3\leq 6\}$, sea $S=\{X\subset D_{42}:AB+X'=B\}$. Calcular $|S|,\max\{|X|:X\in S\},\min\{|X|:X\in S\}$.

♣ (Resp. parcial) Es $A=\{1,3\}, B=\{1,2,3,6\}$ y entonces $AB=A$; la ecuación $A+X'=B$ tiene solución sii $A\subset B$, y equivale a $A'X=B'$, con solución cualquier $X\in D_{42}$ tal que $B'\subset X\subset B'+A$, solución minimal $X=B'=\{7,14,21,42\}$ de cardinal 4, solución maximal $B'+A=\{1,3,7,14,21,42\}$ de cardinal 6, de modo que S tiene cardinal cuatro y $\max\{|X|:X\in S\}=6,\min\{|X|:X\in S\}=4$. En la figura se muestran la solución maximal en color lima.

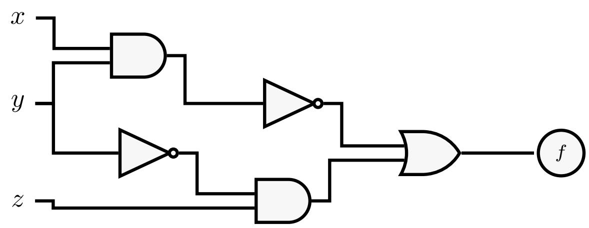


38. $(+)$ Probar que un isomorfismo entre álgebras de Boole preserva los neutros, el orden (inducido), los átomos y las subálgebras. Mostrar estas propiedades definiendo un isomorfismo entre $(D_6,\mathrm{mcm},\mathrm{mcd},\,',1,6)$ y $(D_{15},\mathrm{mcm},\mathrm{mcd},\,',1,15)$ (¿cuántos hay?). En general, ¿cuántos isomorfismos $f:B_1\to B_2$ entre dos álgebras de Boole finitas B_1,B_2 pueden definirse? Probar que alcanza que f sea biyectiva y preserve la suma y la inversión (o el producto y la inversión) para que sea un isomorfismo entre las álgebras B_1 y B_2.

♣ (Resp. parcial) Para la preservación del $\mathbf{0}$: sean $\mathbf{0}_1$ y $\mathbf{0}_2$ el nulo de B_1 y B_2 respectivamente, se sabe que para cualquier elemento x_2 de B_2 existe un (único) elemento x_1 en B_1 tal que $f(x_1)=x_2$, y entonces $\forall x_2\in B_2: x_2+_2 f(\mathbf{0}_1)=f(x_1)+_2 f(\mathbf{0}_1)=f(x_1+_1\mathbf{0}_1)=f(x_1)=x_2$, esto es que $\forall x_2\in B_2:x_2+_2 f(\mathbf{0}_1)=x_2$, luego es (por definición de $\mathbf{0}_2$ y su unicidad) $f(\mathbf{0}_1)=\mathbf{0}_2$.

Para la preservación del orden: en B_1 es $x\leq_1 y_1$ sii $x_1\cdot_1 y_1=x_1$ sii $f(x_1)\cdot_2 f(y_1)=f(x_1)$ sii $f(x_1)\leq_2 f(y_1)$. Para la preservación de átomos: si $a\neq\mathbf{0}_1$ es un átomo de B_1, debe ser $f(a)\neq\mathbf{0}_2=f(\mathbf{0}_1)$ (pues en caso contrario f no resultaría inyectiva); dado $\mathbf{0}_2\neq x_2\leq_2 f(a)$, existe un (único y no nulo) x_1 en B_1 tal que $f(x_1)=x_2$, de modo que $f(x_1)\leq_2 f(a)$ y entonces (aquí se supone *ya* probado que preserva el orden) $x_1\leq_1 a$ pero de allí resulta que $x_1=a$, de modo que $x_2=f(x_1)=f(a)$, así que $f(a)$ es un átomo en B_2. Uno de los 2 isomorfismos: $f(1)=1,f(2)=3,f(3)=5,f(6)=15$. Hay en general $(\log_2\mid B_1\mid)!$ isomorfismos, pues basta (¿por qué?) con definir las imágenes de los $\log_2\mid B_1\mid$ átomos. Si f preserva la suma e inversión también preserva el producto: $f(x \cdot_1 y) = f((x' +_1 y')') = (f(x' +_1 y'))' = (f(x') +_2 f(y'))' = (f(x'))' \cdot_2 (f(y'))' = f((x')') \cdot_2 f((y')') = f(x) \cdot_2 f(y)$ (justificar cada igualdad).

39. $(-)$ Sea $f : B^3 \to B$ la función booleana de tres variables x, y, z en un álgebra de Boole $(B, +, \cdot, {}', \mathbf{0}, \mathbf{1})$, representada por el circuito de la figura, que emplea el juego completo de compuertas (AND, OR, NOT).



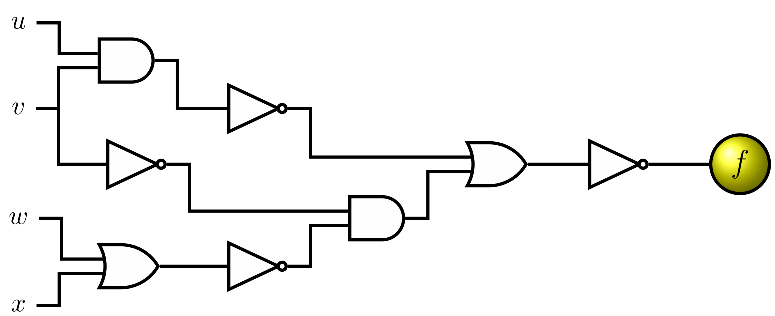
(a) Escribir f en la forma normal disyuntiva y en la forma normal conjuntiva.

(b) Siendo $(\uparrow)$ y $(\downarrow)$ juegos completos de solo una ley, diseñar el más simple circuito para f que solo contenga compuertas (NAND) o compuertas (NOR).

(c) Hallar *todos* los $(x, y, z) \in B^3$ que verifican *las dos* condiciones siguientes: $f(x, y, z) \leq z', z'f(x, y, z) + z(f(x, y, z))' = \mathbf{0}$.

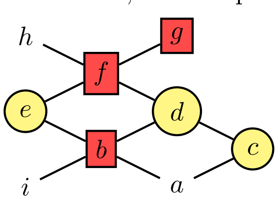
♣ (Resp. parcial) (b) $f(x, y, z) = (xy)' + y'z = (x' + y') + y'z = x' + (y' + y'z) = x' + y' = (xy)' = x \uparrow y$, de modo que basta una compuerta NAND conectando x con y; observar que, sin embargo, se necesitan 7 compuertas NOR, pues $f(x, y, z) = ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))$. (c) la primera ecuación es $(xy)' \leq z'$, que equivale a $z \leq xy$, lo que por definición es que $zxy = z$; la segunda ecuación es $z'(xy)' + zxy = \mathbf{0}$, lo que exige que $z = zxy = \mathbf{0}$ y que $(xy)' = \mathbf{0}$, de modo que $x = y = \mathbf{1}$ y entonces queda la terna $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ como única solución.

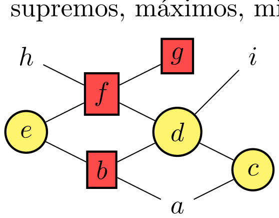
40. $(-)$ En el álgebra de Boole $(B, +, \cdot, {}', \mathbf{0_B}, \mathbf{1_B})$, sea $f(u, v, w, x)$ la función booleana $f : B^4 \to B$ representada por el circuito de la figura, con compuertas (AND, OR, NOT). Representar f, siempre que sea posible, con un circuito con solo compuertas AND y determinar *todos* los $(u, v, w, x) \in B^4$ que verifican *las dos* condiciones siguientes: $f(u, v, w, x) + uvw'x = w$, $u'f(u, v, w, x) + w + v = x$. Si el cardinal de B es 4, ¿cuántas soluciones hay?



♣ (Resp. Parcial). $f(u, v, w, x) = [(uv)' + v'(w + x)']' = (uv)(v + w + x) = uvv + uv(w + x) = uv + uv(w + x) = uv$, (justificar cada igualdad en un axioma o una propiedad) de modo que basta una compuerta AND conectando u con v; reemplazando en el sistema de ecuaciones queda que $uv + uvw'x = uv = w$ y que $u'uv + w + v = x$, de la primera se sabe que $w = uv$ que reemplazado en la segunda queda $x = uv + v = v$, de modo que las soluciones son todos los elementos de B^4 tales que $w = uv, x = v$ (esto es elementos del tipo (u, v, uv, v)), de modo que si el cardinal de B es 4 el sistema tiene un total de $4^2 = 16$ soluciones,dado que u y v pueden tomar libremente, cada una, cuatro valores.

41. $(-)$ Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ con dos órdenes según cada diagrama de Hasse, y sean $A_1 = \{b, f, g\}, A_2 = \{c, d, e\}, A_3 = \{a, i, h\}$. Para cada uno de estos tres conjuntos (y para cada orden), determinar si son acotados, sus maximales, cotas superiores, supremos, máximos, minimales, cotas inferiores, ínfimos, mínimos.

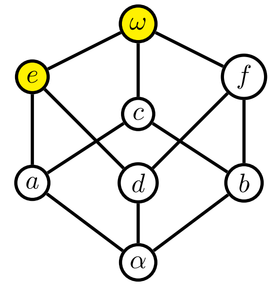




♣ (Resp. parcial) A, A_3 no son acotados, sí lo son A_1 y A_2. Para A_1 con el segundo orden, g es cota superior, supremo, maximal y máximo, a, b son cotas inferiores, b es ínfimo y mínimo. Para A_1 con el primer orden, son cotas inferiores a, b, i, siendo b minimal, ínfimo y mínimo. A_3 con el primer orden no tiene cotas inferiores, h es cota superior, maximal, supremo y máximo.

42. En el conjunto $B = \{\alpha, a, b, c, d, e, f, \omega\}$ donde se ha introducido un orden parcial $(\leq)$ que produce el diagrama de Hasse de la figura, se *definen* las operaciones suma $x + y \stackrel{\text{def}}{=} \sup(x, y)$ y producto $xy \stackrel{\text{def}}{=} \inf(x, y)$.

Definir una operación unaria $' : B \to B$ y los elementos $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ en B de modo que la séxtupla $(B, +, \cdot, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ resulte un álgebra de Boole y determinar *todas* sus subálgebras de Boole. Hallar además *todos* los x pertenecientes a B que satisfacen las tres siguientes condiciones:



$$\begin{cases} ax' \leq b + af + eb \\ b'x + c = \omega + c \\ fx + e'x' + dx \geq \alpha \end{cases}$$

♣ Las propiedades del $\mathbf{0}$ y del $\mathbf{1}$ exigen que $\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha, \mathbf{1} \stackrel{\text{def}}{=} \omega$ y entonces $\alpha' \stackrel{\text{def}}{=} \omega, \omega' \stackrel{\text{def}}{=} \alpha, a' \stackrel{\text{def}}{=} f, f' \stackrel{\text{def}}{=} a, b' \stackrel{\text{def}}{=} e, e' \stackrel{\text{def}}{=} b, c' \stackrel{\text{def}}{=} d, d' \stackrel{\text{def}}{=} c$, y así $(B, +, \cdot, ', \alpha, \omega)$ es un álgebra de Boole (¿por qué?) con cinco subálgebras: las dos triviales y las tres estructuradas con $B_1 = \{\alpha, a, f, \omega\}, B_2 = \{\alpha, b, f, e, \omega\}, B_3 = \{\alpha, c, d, \omega\}$ (¿por qué lo son y por qué no hay otras?).

Respecto al sistema, la tercera condición no es restrictiva, ya que en cualquier álgebra de Boole el nulo (aquí α) es siempre mínimo para el orden natural. La primera condición (teniendo en cuenta que $af = eb = \alpha$ de modo que $b + af + eb = \alpha$) es equivalente a (¡probarlo!) $ab'x' = \mathbf{0}$, mientras que la segunda (teniendo en cuenta que $\omega + c = \omega$) equivale a $(b'x + c)' = \mathbf{0}$ y entonces a (De Morgan) $(b + x')c' = \mathbf{0}$ o lo que es lo mismo, $bc' + c'x' = \mathbf{0}$. Pero dado que $bc' = bd = \mathbf{0}$, queda $c'x' = \mathbf{0}$. De modo que todo el sistema se reduce a la ecuación $(ab' + c')x' = \mathbf{0}$, que es equivalente a $ab' + c' \leq x$, que junto con $x \leq \mathbf{1}$ deja como soluciones todos los x en B que satisfacen $ab' + c' \leq x \leq \omega$. Ahora bien $ab' + c' = ae + d = a + d = e$, de donde queda $e \leq x \leq \omega$ y del diagrama de Hasse es inmediato que solo dos elementos satisfacen esta condición: e y ω (nodos amarillos).

43. $(-)$ Los átomos del álgebra de Boole $(B, +, \cdot, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ son a, b y c. Siendo $\leq$ el orden natural en B, determinar el cardinal del conjunto $S = \{(x, y, z, w) \in B^4 : xy' = x'y = \mathbf{0}, x \leq z \leq c + b, w = y' + z\}$.

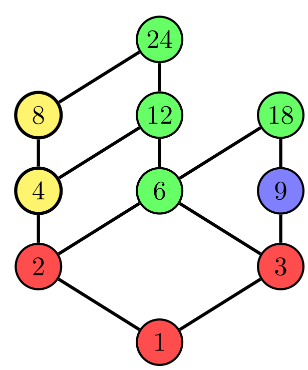
♣ (Resp. parcial) $|S| = 9$. La condición $xy' = x'y = \mathbf{0}$ equivale a $y \leq x \leq y$, de donde $x = y$, y como $x = xz = y$ es $w = y' + z = x' + z = (xz)' + z = x' + z' + z = x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$, de modo que $w = \mathbf{1}$. Luego la solución $(x, x, z, \mathbf{1})$ con $x \leq z \leq b + c$. Son entonces cuatro si $z = b + c$, otras dos si $z = b$, otros dos si $z = c$, y una más si $z = \mathbf{0}$: un total de $4 + 2 + 2 + 1 = 9$.

44. $(-)$ Sea el álgebra de Boole $(B, +, \cdot, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ con cinco átomos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Siendo $\leq$ el orden natural en B, determinar el cardinal de los conjuntos $ST + S'T', S \oplus T, S \oplus T'$, siendo $S = \{x \in B : a_1 \leq x \leq a_1 + a_2 + a_3\}, T = \{x \in B : a_2 \leq x \leq a_1 + a_2 + a_3\}$.

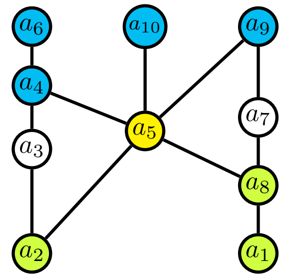
♣ (Resp. parcial) $S = \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_1 + a_2 + a_3\}, T = \{a_2, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3\}$, de modo que $|S| = 4, |T| = 4, |ST| = 2, |S + T| = 6, |S'T'| = 32 - 6 = 26$, así que la suma de los disjuntos $ST, S'T'$ tiene cardinal $|ST + S'T'| = 2 + 26 = 28$, mientras que $|S \oplus T| = 2 + 2 = 4$; el conjunto $S \oplus T'$ no es otro que $ST + S'T'$ (y entonces tiene cardinal 28).

45. $(-)$ En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ ordenado con $x \leq y$ sii $x \mid y$ se definen $A_1 = \{x \in A : x + 1 \leq 12\}, A_2 = \{x \in A : 6 \leq x\}, A_3 = \{x \in A : x \leq x + 3\}, A_4 = \{x \in A : 4 \leq x \leq 8\}$. Graficar el diagrama de Hasse para A y determinar para cada uno de los cinco conjuntos sus elementos particulares. Determinar, además, dos soluciones de la ecuación en la incógnita $X \subset A$ dada por $(A_1 + A_4)X = A_3$. ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación?

♣ (Resp. parcial) $A_1 = \{1, 2, 3\}$ (vértices rojos en la figura), $A_2 = \{6, 12, 18, 24\}$ (vértices verdes), $A_3 = \{1, 3\}, A_4 = \{4, 8\}$ (vértices amarillos). Los conjuntos A, A_2 son no acotados (pero son inferiormente acotados); A_1 es acotado, con maximales $2, 3$, supremo 6, carece de máximo. El conjunto de cotas superiores de A_1 es A_2, el conjunto de cotas superiores de A_3 es $A_2 + \{3, 9\}$, el conjunto de cotas inferiores de A_4 es $\{1, 2, 4\}$ y el de sus cotas superiores $\{8, 24\}$. El elemento 1 es minimal, ínfimo y mínimo de A, de A_1 y de A_3. La ecuación tiene por soluciones cualquier conjunto $X \subset A$ tal que $A_3 \subset X \subset A_3 + (A_1 + A_4)'$, de modo que una solución (la solución minimal) es $X_1 = A_3$; otra es (la solución maximal) $X_2 = A_3 + (A_1 + A_4)' = \{1, 3, 6, 9, 12, 18, 24\}$. En total, 32 soluciones (¡contar cuántos conjuntos resultan al ir agregando elementos a la solución minimal!).

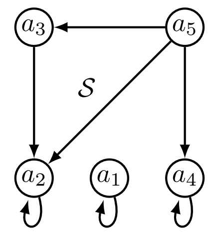


46. Dado $H = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}\}$ ordenado según el diagrama de Hasse de la figura, se definen los conjuntos $A = \{X \subset H : a_5$ es un maximal de $X\}, B = \{X \subset H : a_5$ es un minimal de $X\}$. Calcular $|B - A|, |A - B|, |A + B|, \max\{|X| : X \in B\}$.



♣ (Resp. parcial) $X \in A$ sii contiene a a_5 y a ninguno de sus sucesores (que son a_4, a_6, a_9, a_{10}) de modo que a_5 puede estar acompañando por los cinco restantes, así que $|A| = 2^5 = 32$. En B están los conjuntos que contienen a a_5 pero no a sus predecesores (que son a_1, a_2, a_8), de modo que a_5 puede estar acompañado por los seis restantes, $|B| = 2^6 = 64$. La intersección se reduce a $AB = \{\{a_5\}, \{a_3, a_5\}, \{a_5, a_7\}, \{a_3, a_5, a_7\}\}$ de modo que $|AB| = 4$. Luego $|A + B| = |A| + |B| - |AB| = 32 + 64 - 4 = 32 + 60 = 92, |A - B| = 28, |B - A| = 60, \max\{|X| : X \in B\} = 7$.

47. $(-)$ En el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sea $\mathcal{S}$ la relación determinada por el *digraph* de la figura, y $\mathcal{T}$ la relación definida por la matriz $M_{\mathcal{T}}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación $\mathcal{R} = (\mathcal{S} + \mathcal{T})^{-1}$.

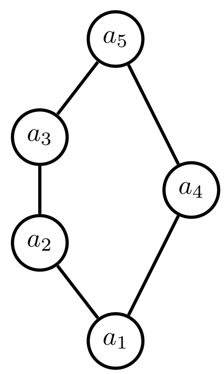


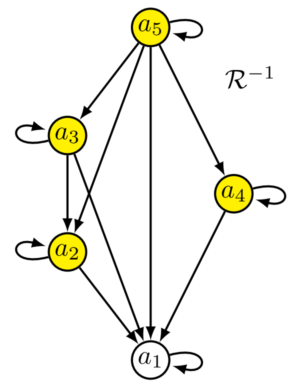
$$M_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A y determinar, con las operaciones $x + y \overset{\text{def}}{=} \sup\{x, y\}, xy \overset{\text{def}}{=} \inf\{x, y\}$, *todos* los pares $(x, y) \in A^2$ tales que $xy + x = a_3, (x + y)\mathcal{R}(a_3 a_5)$.

   (b) Si $G = (V(G), E(G))$ es el *digraph* dado por la relación $\mathcal{R}^{-1}$ (inversa de $\mathcal{R}$), determinar la circunferencia de radio 1 centrada en $a_1 \in V(G) = A$ (esto es todos los $x \in A$ tales que $d(x, a_1) = 1$).

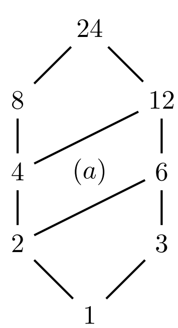
♣ (Resp. Parcial). (a) La relación $\mathcal{R} = \mathcal{S}^{-1} + \mathcal{T}^{-1}$ es reflexiva pues $a_1 \mathcal{S}^{-1} a_1, a_2 \mathcal{S}^{-1} a_2, a_3 \mathcal{T}^{-1} a_3, a_4 \mathcal{S}^{-1} a_4, a_5 \mathcal{T}^{-1} a_5$, luego $a_k \mathcal{R} a_k, k = 1, 2, 3, 4, 5$; del mismo modo se prueba que es antisimétrica y transitiva, y entonces es de orden, por definición de orden, con el diagrama de Hasse que se indica en la figura. Ahora $xy + x = \sup\{xy, x\} = \sup\{\inf\{x, y\}, x\} = x$ (¡detallar los motivos de la última igualdad! y no hablar de 'absorción'), de modo que debe ser $x = a_3$, y como $a_3 a_5 = a_3$ la segunda condición es $a_3 + y = \sup\{a_3, y\} = a_3$, de donde y puede ser a_1, a_2, a_3 (y ningún otro), de modo que los pares pedidos son $(a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3)$. Para (b), obtenida la representación del *digraph* de la figura, la circunferencia pedida es el conjunto $\{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ (nodos amarillos).

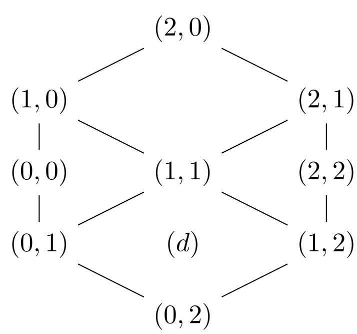




48. Determinar en cada caso si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en el conjunto indicado. En el caso de conjuntos finitos, escribir la matriz de adyacencia $A_{\mathcal{R}}$, graficando el diagrama de Hasse, o el grafo orientado (*digraph*) según sea o no de orden.

   (a) En $D_{24}, x \,\mathcal{R}\, y$ sii $x \mid y$ (b) En $\mathbb{N}, x \,\mathcal{R}\, y$ sii $y = x^r$ para algún $r \in \mathbb{N}$ (c) En $A = \{-2, -1, 1, 2\}, x \,\mathcal{R}\, y$ sii $x \mid y$
   (d) En $A^2, A = \{0, 1, 2\}, (x_1, x_2) \,\mathcal{R}\, (y_1, y_2)$ sii $(x_1 \leq y_1, x_2 \geq y_2)$ (e) En $\mathbb{Z}, x \,\mathcal{R}\, y$ sii $\mid y - x \mid$ es impar
   (f) En $\mathbb{Z}, x \,\mathcal{R}\, y$ sii $x^2 \leq y^2$ (g) En $A^2, A = \{1, 2, 3\}, (x_1, x_2) \,\mathcal{R}\, (y_1, y_2)$ sii $(x_1 \mid y_1, y_2 \mid x_2)$

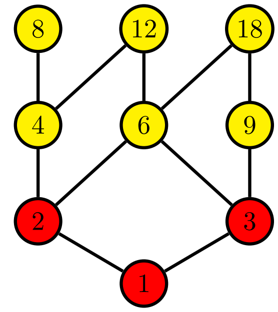




♣ (Resp. parcial) (a) y (d) constituyen un orden parcial; (c) no es antisimétrica, pues $(-1) \mid 1$ y $1 \mid (-1)$ y sin embargo $-1 \neq 1$; (e) no es antisimétrica pues $\mid 2 - 1 \mid$ es impar y también $\mid 1 - 2 \mid$ es impar, y sin embargo $2 \neq 1$ (f) no es antisimétrica, pues $(-1)^2 \leq 1^2$ y $1^2 \leq (-1)^2$ y sin embargo $-1 \neq 1$. Las figuras muestran los diagramas de Hasse para las relaciones de orden (a) y (d). ¿Es (g) una relación de orden?

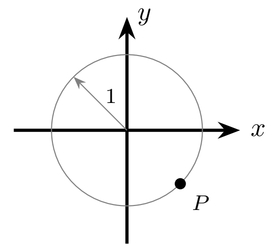
49. Sean A, B, C tres subconjuntos fijos del universal I. Determinar las condiciones necesarias y suficientes sobre A, B, C para que tenga solución el sistema de ecuaciones en la incógnita $X \subset I$ dado por $AX' \subset B, B'X + C = I$ y resolverlo (en función de A, B, C, I). En particular, dar la solución minimal para $I = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18\}$ ordenado con $x \leq y$ sii $x \mid y$, $A = \{x \in I : 6 \leq x\}, B = \{x \in I : x \leq x + 3\}, C = \{x \in I : x + 1 \leq 12\}$ y determinar si es acotada.

♣ Resp. parcial. En la figura de la derecha se muestra el diagrama de Hasse en I, de donde es inmediata la caracterización de los conjuntos $A = \{x \in I : 6 \leq x\} = \{6, 12, 18\}, B = \{x \in I : x \leq x + 3\} = \{1, 3\}, C = \{x \in I : x + 1 \leq 12\} = \{1, 2, 3\}$ (nodos rojos). La primera ecuación del sistema equivale a $AB'X' = \phi$ mientras que la segunda es equivalente a $(B'X + C')' = \phi$ y entonces (De Morgan) $(B + X')C' = \phi$ que es lo mismo que (distributividad de la intersección respecto de la suma) $BC' + C'X' = \phi$, pero como $BC' = \phi$ todo el sistema queda reducido a $(AB' + C')X' = \phi$ que equivale a decir que X cumple $AB' + C' \subset X \subset I$ y entonces la solución minimal (nodos amarillos) es $X = AB' + C = \emptyset + C' = \{4, 6, 8, 9, 12, 18\}$, que no es acotada (ya que no es superiormente acotada, probarlo).

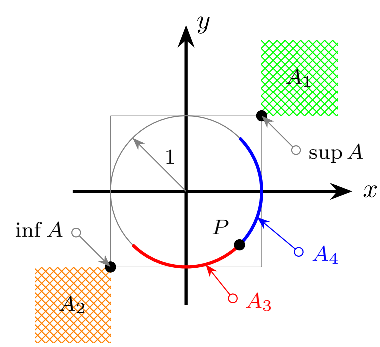


50. (−) Sea el *poset* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ con el orden $(x_1, x_2)\,\mathcal{R}\,(y_1, y_2)$ sii $(x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2)$, y sea $P = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \in A$. Graficar y determinar los siguientes elementos, y luego rehacer, con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (a) $A_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a, b)$ es cota superior de $A\}, \sup A, \max A$
   (b) $A_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a, b)$ es cota inferior de $A\}, \inf A, \min A,$
   (c) $A_3 \subset A : \sup A_3 = P, (\forall B \subset A : \sup B = P) \Rightarrow B \subset A_3.$
   (d) $A_4 \subset A : \inf A_4 = P, (\forall B \subset A : \inf B = P) \Rightarrow B \subset A_4.$
   (e) $\max(\{(x, y) \in A : x \leq 0\}), \min(\{(x, y) \in A : x \leq 0\})$



♣ Resp. parcial. La relación de orden $\mathcal{R}$ es tal que los puntos menores que uno dado se encuentran en el cuadrante sudoeste de ese punto. De esta manera, es $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\}, \sup A = (1, 1), \nexists \max A$. Por las mismas razones, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -1, y \leq -1\}, \inf A = (-1, -1), \nexists \min A$. El conjunto maximal que tiene a P por supremo es $A_3 = \{(x, y) \in A : |x| \leq 1/\sqrt{2}\}$, el conjunto maximal que tiene a P por ínfimo es $A_4 = \{(x, y) \in A : x \geq 1/\sqrt{2}\}$. Finalmente, $\max(\{(x, y) \in A : x \leq 0\}) = (0, 1), \nexists \min(\{(x, y) \in A : x \leq 0\})$.



51. (+) En la siguiente lista, Δ_A es la relación de identidad en A (también se le llama diagonal), esto es $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$, mientras que $\mathcal{R}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, el producto matricial es el común con las operaciones booleanas, y el *producto de Hadamard* $\odot$ definido como $(N \odot M)(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} N(i, j)M(i, j)$, con J se designa la matriz cuyos elementos valen todos 1 (esto es $\forall i, j : J(i, j) = 1$) . Probar que las definiciones en el lenguaje de los elementos de A dadas en la segunda columna se corresponden con las dadas en el lenguaje de conjuntos y matrices en la tercera y cuarta columna respectivamente (se entiende que el lenguaje matricial vale para A finito de cardinal n), y que el ejemplo ajusta la propiedad que ejemplifica. Analizar, para cada ejemplo, la totalidad de sus propiedades.

Relación $\mathcal{R}$ en A	elementos $x, y, z \in A$	conjunto	matricial	un ejemplo
(a) reflexiva	$\forall x \in A : x\mathcal{R}x$	$\Delta_A \subset \mathcal{R}$	$I_d \leq A_\mathcal{R}$	$\forall x, y \in \mathbb{N} : x\mathcal{R}y$ sii $x \mid y$
(b) irreflexiva	$\forall x \in A : x\mathcal{R}'x$	$\Delta_A\mathcal{R} = \emptyset$	$I_d \odot A_\mathcal{R} = 0_{n\times n}$	$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y$ sii $x < y$
(c) simétrica	$\forall x, y \in A : x\mathcal{R}y$ sii $x\mathcal{R}^{-1}y$	$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$	$A_\mathcal{R}^T = A_\mathcal{R}$	$\forall x, y \in \mathbb{N} : x\mathcal{R}y$ sii $x + y$ es impar
(d) antisimétrica	$\forall x, y \in A : (x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$	$\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1} \subset \Delta_A$	$A_\mathcal{R} \odot A_\mathcal{R}^T \leq I_d$	$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y$ sii $x \leq y$
(e) asimétrica	$\forall x, y \in A : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}'x$	$\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1} = \emptyset$	$A_\mathcal{R} \odot A_\mathcal{R}^T = 0_{n\times n}$	$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y$ sii $x < y$
(f) transitiva	$\forall x, y, z \in A : (x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$	$\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$	$A_\mathcal{R}^2 \leq A_\mathcal{R}$	$\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X\mathcal{R}Y$ sii $X \subset Y$
(g) antitransitiva	$\forall x, y, z \in A : (x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}'z$	$\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}'$	$A_\mathcal{R}^2 \leq A_{\mathcal{R}'} = J - A_\mathcal{R}$	$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y$ sii $\lvert x - y\rvert = 1$

Siendo $\mathcal{R} \neq \emptyset$: (1) ¿Puede ser simétrica y antisimétrica? (2) ¿simétrica y asimétrica? (3) ¿reflexiva y antitransitiva? (4) ¿reflexiva y asimétrica? (5) ¿transitiva y asimétrica? (6) ¿asimétrica y antisimétrica?

♣ (Resp. parcial) Alcanza ver el significado de cada condición. En la fila (a), por ejemplo, decir $\Delta_A \subset \mathcal{R}$ equivale a decir que para cualquier $x \in A$ es $(x, x) \in \mathcal{R}$ y esto es, justamente, que $\mathcal{R}$ es reflexiva. Decir $I_d \leq A_\mathcal{R}$ es afirmar que $1 \leq A_\mathcal{R}(i, i)$, de modo que $A_\mathcal{R}(i, i) = 1$, lo que (por definición de $A_\mathcal{R}(i, i)$) significa que para cualquier $x \in A$ es $(x, x) \in \mathcal{R}$, esto es, $\mathcal{R}$ es reflexiva. Por supuesto, las recíprocas son inmediatas, si $\mathcal{R}$ es reflexiva entonces $\Delta_A \subset \mathcal{R}, I_d \leq A_\mathcal{R}$. La relación $\forall x, y \in \mathbb{N} : x\mathcal{R}y$ sii $x|y$ del ejemplo es reflexiva trivialmente, ya que $\forall x \in \mathbb{N} : x|x$. Por otra parte, la relación es no irreflexiva, no simétrica, antisimétrica, no asimétrica, transitiva, no antitransitiva, abreviado como $ab'c'de'fg'$.

En (c), decir que $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$ equivale a decir que $(x, y) \in \mathcal{R}$ sii $(y, x) \in \mathcal{R}$, esto es que $\mathcal{R}$ es simétrica. La relación del ejemplo es (probarlo) $a'bcd'e'f'g$. La prueba de la antitransitiva: si $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z$, debn analizarse dos casos: si y es par, debn ser x, z pares, de modo que $x + z$ no es impar; si y es par, deben ser x, z impares, de modo que $x + z$ tampoco es impar.

En (f) $(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ y además $(x, y) \in \mathcal{R}$ y también $(y, z) \in \mathcal{R}$ entonces $(x, z) \in \mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$ esto es que $(x, z) \in \mathcal{R}$, de modo que $\mathcal{R}$ es transitiva. Recíprocamente, si $\mathcal{R}$ es transitiva, un par $(x, z) \in \mathcal{R}^2$ si existe $y \in A$ tal que $(x, y) \in \mathcal{R}$ y también $(y, z) \in \mathcal{R}$, pero siendo $\mathcal{R}$ transitiva, entonces también $(x, z) \in \mathcal{R}$, de modo que $\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$. Así que la transitividad de $\mathcal{R}$ equivale a $\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$. La relación del ejemplo es $ab'c'de'fg'$.

En (g), la relación $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y$ sii $|x - y| = 1$ es, efectivamente, antitransitiva, pues si $(x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z)$ es que $x = y \pm 1, y = z \pm 1$, de modo que o bien $x = z$ o bien $x = z \pm 2$, pero entonces en ningún caso es $|x - z| = 1$. La relación es $a'bcd'e'f'g$.

(1) Sí, (2) No, (3) No, (4) No, (5) Sí (sii es irreflexiva), (6) Sí (sii es irreflexiva).

52. $(-)$ En el conjunto $A = \{a_1, a_2\}$ pueden definirse $2^4 = 16$ relaciones; seis de ellas están definidas por las siguientes matrices de adyacencia $A_\mathcal{R}$ (esto es, $A_\mathcal{R}(k, j)$ es 1 si $a_k \, \mathcal{R} \, a_j$, y es 0 en otro caso). Determinar qué propiedades (reflexividad, irreflexividad, simetría, antisimetría, asimetría, transitividad, antitransitividad) cumple cada relación y representarlas con un grafo orientado (*digraph*). Definir y determinar, además, las clausuras básicas: la clausura reflexiva $\mathrm{ref}(\mathcal{R})$, la clausura simétrica $\mathrm{sim}(\mathcal{R})$, la clausura transitiva $\mathrm{trans}(\mathcal{R})$ (designada como $\mathcal{R}^\star$) y la clausura de equivalencia $\mathrm{equiv}(\mathcal{R})$.

$$(a)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (d)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (e)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (f)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

♣ (Resp. parcial) Los siguientes grafos orientados se corresponden con las relaciones, mientras que la tabla resume las propiedades de cada una de ellas. La clausura de una relación $\mathcal{R}$ respecto de una dada propiedad P es la relación minimal con esa propiedad P, que cubre a la relación dada. De allí resulta (probarlo) que $\mathrm{ref}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \Delta, \mathrm{sim}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \mathcal{R}^{-1}, \mathcal{R}^\star = \mathcal{R} + \mathcal{R}^2 + \cdots$

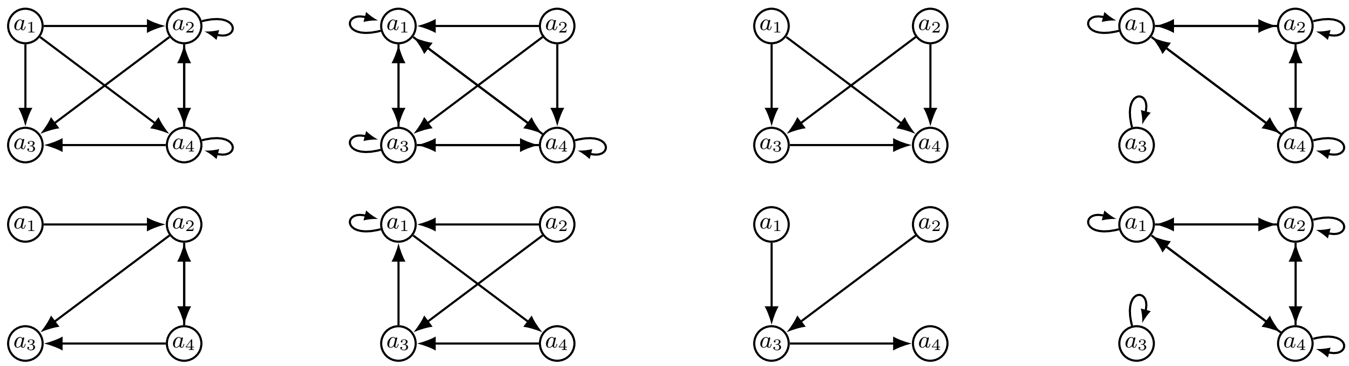
La clausura reflexiva de (a) es (b) y coincide con sus restantes clausuras. La clausura reflexiva de (d) es (e) y coincide con su clausura transitiva, mientras que su clausura de equivalencia es (f). Cualquier clausura de (f) es la misma (f).
Observación. La clausura respecto de una propiedad P de una relación que ya posee esa propiedad P coincide con la misma relación. Es el caso de, por ejemplo, la relación (b), que es reflexiva, simétrica y transitiva (esto es, es una relación de equivalencia), de modo que ella misma es igual a la de cualquiera de sus clausuras. Lo propio sucede, por supuesto, con la relación (f), que es ya una relación de equivalencia.

Relación $\mathcal{R}$ en A	a	b	c	d	e	f
(a) reflexiva	×	✓	✓	×	✓	✓
(b) irreflexiva	✓	×	×	×	×	×
(c) simétrica	✓	✓	✓	×	×	✓
(d) antisimétrica	✓	✓	×	✓	✓	×
(e) asimétrica	✓	×	×	×	×	×
(f) transitiva	✓	✓	×	✓	✓	✓
(g) antitransitiva	✓	×	×	×	×	×

53. Para cada caso, $A_\mathcal{R}$ es la matriz de adyacencia de la relación $\mathcal{R}$ en el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Estudiar para cada relación $\mathcal{R}$ y su correspondiente $(\mathcal{R})'$ reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad, hallar su clausura transitiva y efectuar un *digraph* de cada relación. Para las de equivalencia, indicar el conjunto cociente $A/\mathcal{R}$. Rehacer, para la suma $\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b$ (¡unión!), producto $\mathcal{R}_a \, \mathcal{R}_b$ (¡intersección!) y composición $\mathcal{R}_a \circ \mathcal{R}_b$ de las relaciones del caso (a) y (b).

$$(a)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (c)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d)\ A_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

♣ (Resp. parcial) La figura muestra los *digraphs* de (a), (b), (c), (d) y de sus clausuras transitivas. ¿Cómo se "suman", "multiplican" o "componen" los *digraphs*?¿Cómo se construye el *digraph* de $\mathcal{R}'$ a partir del de $\mathcal{R}$?

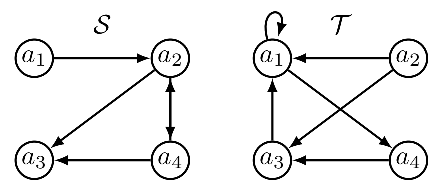


54. $(-)$ Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones binarias de X en Y y $\mathcal{T}$ una relación de Y en Z. Probar cada una de las siguientes proposiciones. ¿Cómo se escriben en el lenguaje de matrices de adyacencia?

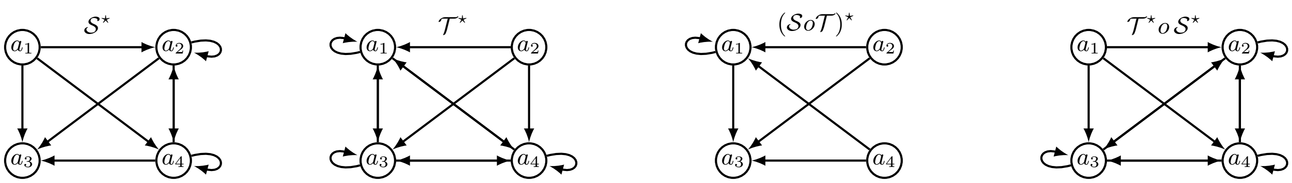
   (*a*) $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$ (*b*) $(\mathcal{R}')^{-1} = (\mathcal{R}^{-1})'$ (*c*) $(\mathcal{R} + \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} + \mathcal{S}^{-1}$ (*d*) $(\mathcal{R}\,\mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}\,\mathcal{S}^{-1}$
   (*e*) $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{S}^{-1}$ sii $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ (*f*) $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{S}^{-1}$ sii $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ (*g*) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$

   ♣ (Resp. parcial) Para probar (g), $\mathcal{S} \circ \mathcal{T}$ es de X en Z, de modo que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1}$ es de Z en X. Si $(z, x) \in (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1}$, entonces $(x, z) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{T}$, de modo que para algún $y \in Y$ debe ser $x\,\mathcal{S}\,y,\ y\,\mathcal{T}\,z$, o lo que es lo mismo, $y\,\mathcal{S}^{-1}\,x,\ z\,\mathcal{T}^{-1}\,y$. Pero esto significa que $(z, x) \in \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$, de modo que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1} \subset \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$ (del mismo modo se prueba $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} \subset (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1}$). La expresión (a) se escribe $(A_{\mathcal{R}}^T)^T = A_{\mathcal{R}}$; (g) se escribe $(A_{\mathcal{S}}\,A_{\mathcal{T}})^T = A_{\mathcal{T}}^T\,A_{\mathcal{R}}^T$.

55. *Probar* que si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son dos relaciones binarias en A, se cumple $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$ y mostrar (exhibiendo las operaciones parciales) el cumplimiento de la igualdad para las relaciones en el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ definidas por los *digraphs* de la figura. Para la clausura transitiva ¿vale que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^\star = \mathcal{T}^\star \circ \mathcal{S}^\star$?



   ♣ Resp. parcial. $\mathcal{S} \circ \mathcal{T}$ es de A en A, de modo que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1}$ es de A en A. Si $(z, x) \in (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1}$, entonces $(x, z) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{T}$, de modo que para algún $y \in A$ debe ser $x\,\mathcal{S}\,y,\ y\,\mathcal{T}\,z$, o lo que es lo mismo, $y\,\mathcal{S}^{-1}\,x,\ z\,\mathcal{T}^{-1}\,y$. Pero esto significa que $(z, x) \in \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$, de modo que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1} \subset \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$ (del mismo modo se prueba $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} \subset (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1}$). Queda como ejercicio mostrar la secuencia de las operaciones mediante digrafos, para las relaciones $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ de las figuras.



   Las figuras muestran las clausuras de las relaciones $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ y de su composición, por un lado (tercera figura), y la composición de sus clausuras (cuarta figura) que prueba la invalidez de la igualdad propuesta. Se recomienda rehacer este ejercicio en el lenguaje matricial, estableciendo las correspondencias entre las matrices que representan cada relación y las operaciones involucradas con la composición y la clausura.

56. $(+)$ Analizar en cada caso si la relación definida es de equivalencia y determinar su conjunto cociente.

   (a) Con $n \in \mathbb{N}$ fijo, en $\mathbb{Z}, x\,\mathcal{R}\,y$ sii $x = y \pmod n$ (b) Con $f \in B^A$ fija, en $A, x\,\mathcal{R}\,y$ sii $f(x) = f(y)$
   (c) En $\mathbb{R}, x\,\mathcal{R}\,y$ sii $x^2 + 2y = 2x + y^2$ (d) En $\mathbb{Z}, x\,\mathcal{R}\,y$ sii $x^2 = y^2 \pmod 7$ (e) En $\mathbb{Z}, x\,\mathcal{R}\,y$ sii $xy \geq 0$
   (f) En $\mathcal{P}(X), X_1\,\mathcal{R}\,X_2$ sii $X_1 X_2 = X_1 + X_2$ (g) En $\mathcal{P}(X), X_1\,\mathcal{R}\,X_2$ sii $X_1 + X_2' = X$
   (h) En un álgebra de Boole $(B, +, \cdot, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}), x\,\mathcal{R}\,y$ sii $x + y = xy$ (i) En $\mathbb{R}^I, f\,\mathcal{R}\,g$ sii $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_I g(t)\mathrm{d}t$
   (j) Con $n, m \in \mathbb{N}$ fijos, en $\mathbb{Z}, x\,\mathcal{R}\,y$ sii $x = y \pmod n$ y además $x = y \pmod m$
   (k) Dado $X = \{1, 2, 3\}$, en $\mathcal{P}(X), X_1\,\mathcal{R}\,X_2$ sii $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$
   (l) En $\mathbb{Z}, n\,\mathcal{R}\,m$ sii $\cos(n\pi/3) - \cos(m\pi/3) = 0$
   (m) En $M = \{0, 1\}^{2\times 2}, A\mathcal{R}B$ sii $\sum_1^2 \sum_1^2 A(i, j) = \sum_1^2 \sum_1^2 B(i, j)$

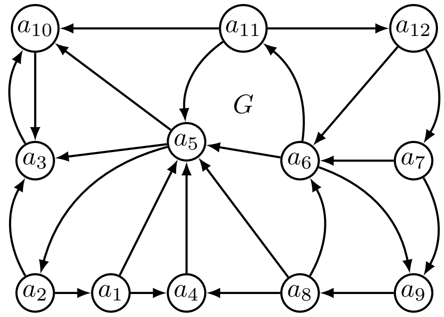
   ♣ (Resp. parcial) Las únicas que no son de equivalencia: (e), (g) y (k): la (e) es reflexiva y simétrica pero no transitiva: $(1, 0) \in \mathcal{R}, (0, -1) \in \mathcal{R}$, pero $(1, -1) \notin \mathcal{R}$; la (g) es reflexiva pero no es simétrica; la (k) es reflexiva y simétrica, pero no transitiva. El conjunto cociente en (a) tiene n elementos: $[0], [1], \ldots, [n-1]$. Las clases de equivalencia en (b) son los subconjuntos maximales de A donde la función es constante, o lo que es lo mismo, para cada $x \in A$ es $[x] = f^{-1}(f(x))$. La (c) responde al tipo (b) si se hace $f(x) = x^2 - 2x$, la clase de cada número real a es $[a] = \{a, 2 - a\}$. En (d) el conjunto cociente tiene cuatro elementos: $[0], [1], [2], [3]$.

En (f) el conjunto cociente tiene $|\mathcal{P}(X)|$ clases y cada clase es unitaria. En (h) el conjunto cociente tiene $|B|$ clases y cada clase es unitaria. En (i), siendo I un intervalo real, el conjunto cociente tiene infinitas clases (tantas como números reales), y a su vez, cada clase tiene infinitas funciones (¡más que reales!). El conjunto cociente en (j) tiene $\text{mcm}(n, m)$ elementos. El conjunto cociente en (l) es $\mathbb{Z}/\mathbb{R} = \{[0], [1], [2], [3]\}$, siendo $[n] = \pm n + 6k, k \in \mathbb{Z}$. En (m) el conjunto cociente tiene cinco clases, dos de ellas son unitarias, otras dos tienen cuatro elementos, la restante tiene seis elementos; por ejemplo, la clase de $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ es $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$.

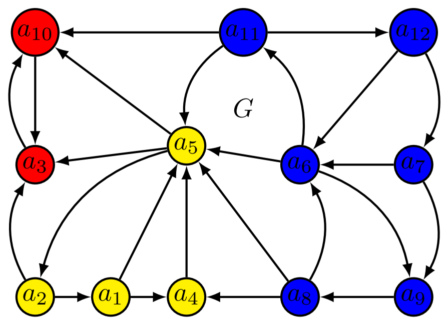
57. (+) Dados los enteros positivos a, b, m probar que $\alpha \in \mathbb{Z}$ es una solución de la ecuación $ax = b \pmod m$ sii cualquier elemento de $[\alpha] \in \mathbb{Z}_m$ es una solución de la misma ecuación y determinar el conjunto $X = \{x \in \mathbb{Z} : 6x = 12 \pmod 9, 12x = 24 \pmod{18}\}$.

♣ Resp. Parcial. (a) Si α es una solución de la ecuación $ax = b \pmod m$ entonces existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a\alpha - b = k_1 m$; para tal α, es $[\alpha] = \{u \in \mathbb{Z} : u = \alpha + km, \text{con}\, k\, \text{entero}\}$, y para cualquiera de estos u es $au - b = a(\alpha + km) - b = (a\alpha - b) + akm = k_1 m + akm = (k_1 + ak)m = k'm$ (llamando k' al entero $k_1 + ak$). De esta manera, cualquiera sea $u \in [\alpha]$ existe $k' \in \mathbb{Z}$ tal que $au - b = k'm$, esto es que u es una solución de la ecuación $ax = b \pmod m$ (resta probar la recíproca). Toda solución de $6x = 12 \pmod 9$ es solución de $12x = 24 \pmod{18}$ (¡justificarlo!), de modo que basta resolver la primera que tiene ($\pmod 9$) tres soluciones (el $\text{mcd}(6, 9) = 3$ divide a 12) de modo que, por lo probado antes, $X = [2] + [5] + [8]$, siendo $[2], [5], [8]$ tres clases de equivalencia en $\mathbb{Z}_9$.

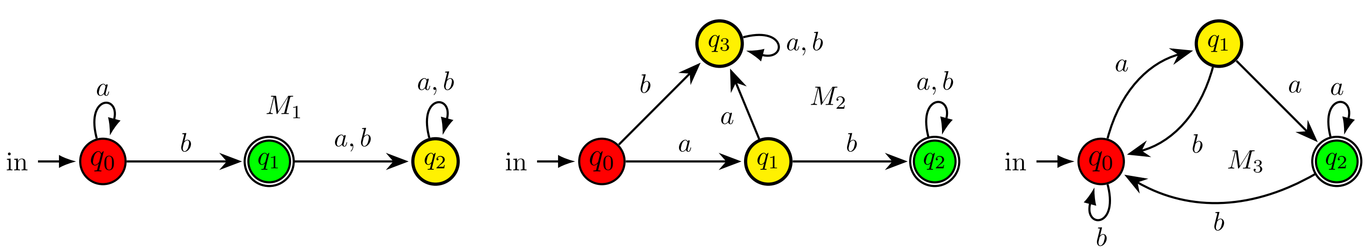
58. Dado el *digraph* $G = (V(G), E(G))$ de la figura, se define en su conjunto de vértices $V(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\}$ la relación $\mathcal{R}$ por $a_i \mathcal{R} a_j$ sii existe un camino orientado de a_i hasta a_j y un camino orientado de a_j hasta a_i. Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $V(G)$, y determinar el conjunto cociente $V(G)/\mathcal{R}$. Resolver el problema de hallar todos los $X \subset V(G)$ tales que $[a_2]X = ([a_6] + [a_9])X$. Señalar claramente en el gráfico las clases de equivalencia. ¿Puede suprimirse alguna arista en el grafo sin que $\mathcal{R}$ deje de ser una relación de equivalencia? Si así fuera, rehacer el ejercicio con tal arista suprimida.

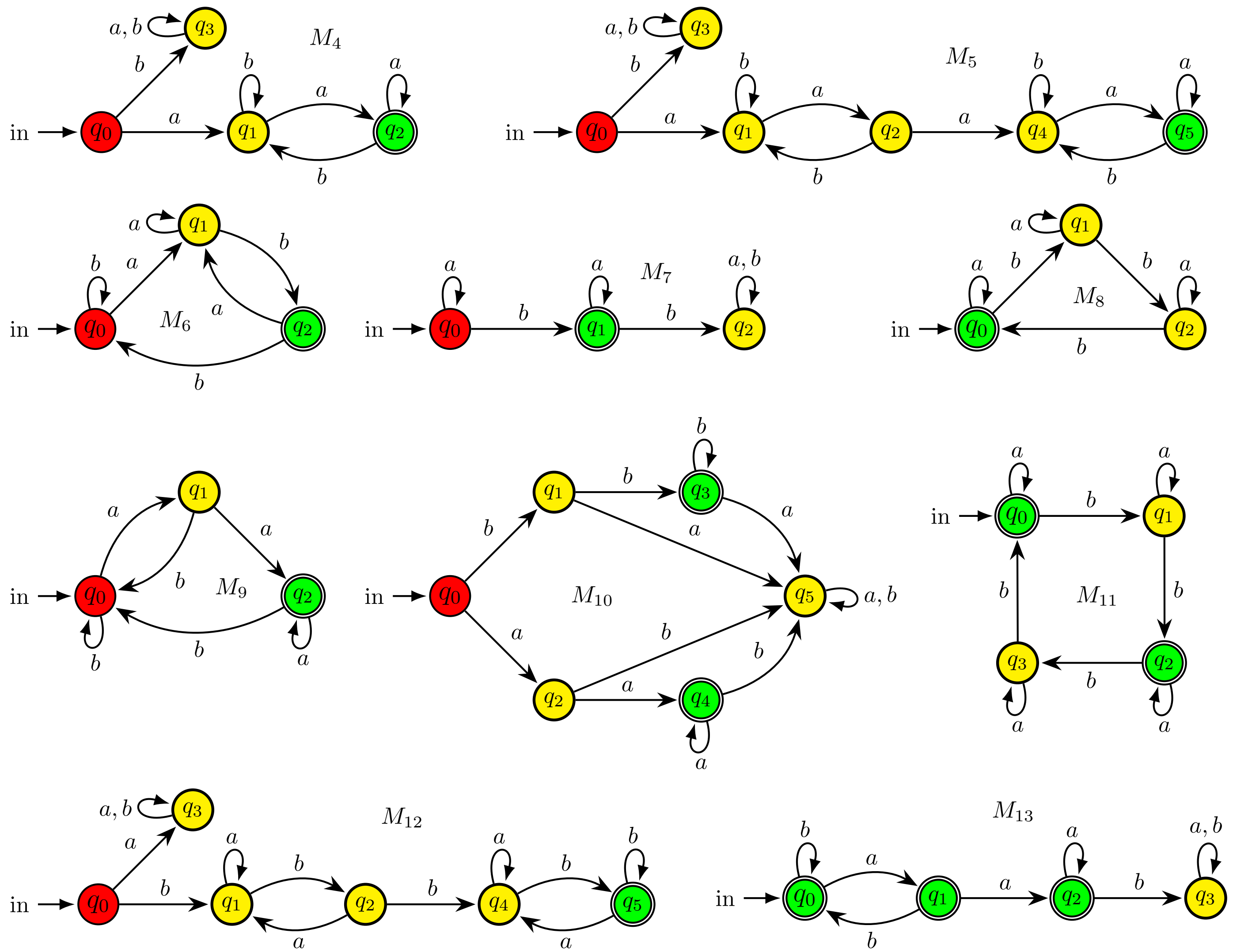


♣ Resp. Parcial. La relación $\mathcal{R}$ es reflexiva, pues para cualquier $i = 1, 2, \ldots, 12$ se tiene $a_i \mathcal{R} a_i$ (todo nodo está conectado consigo mismo con el camino nulo); es también simétrica, por definición de $\mathcal{R}$ y es transitiva, pues si existe un camino de a_i a a_j y un camino de a_j a a_i, y también existe un camino de a_j a a_k y un camino de a_k a a_j, basta construir el camino de a_i a a_k (y de a_k a a_i) de la manera obvia (detallarla). El conjunto cociente $V(G)/\mathcal{R} = \{[a_1], [a_3], [a_6]\}$se muestra en la figura asignando un color a cada clase de equivalencia, siendo $[a_1] = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}, [a_3] = \{a_3, a_{10}\}, [a_6] = \{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}\}$, de modo que la ecuación $[a_2]X = ([a_6] + [a_9])X$ equivale a la ecuación $[a_1]X = [a_6]X$ cuya solución es cualquier subconjunto $X \subset [a_1]'[a_6]' = [a_3]$ de modo que se tienen las siguientes cuatro soluciones: $X_1 = \phi, X_2 = \{a_3\}, X_3 = \{a_{10}\}, X_4 = [a_3]$.



59. Se designa con $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$ el *autómata finito* determinista (DFA = *deterministic finite automata*), con *alfabeto* Σ, conjunto de *estados* Q, estado inicial q_0 (rojo, in), *función de transición* $\Upsilon : Q \times \Sigma \to Q$ y conjunto de *aceptación* $F \subset Q$ (verde, doble círculo)). Para cada autómata con alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ escribir la tabla de transiciones que explicita Υ y determinar el lenguaje reconocido por M (esto es $L(M) = \{x \in \Sigma^\star : \Upsilon^\star(q_0, x) \in F\}$ (donde $\Upsilon^\star : Q \times \Sigma^\star \to Q$ es la función de transición generalizada que lleva el autómata a un nuevo estado al recibir como estímulo una palabra del lenguaje: por ejemplo, para el autómata M_1 es $\Upsilon^\star(q_0, aaababa) = q_2$).





♣ Resp. parcial. $L(M_1) = \{x = a^n b, n \in \mathbb{N}_0\}; L(M_2) = \{x = abw, w \in \Sigma^\star\}; L(M_3) = \{x = waa, w \in \Sigma^\star\}; L(M_4) = \{x = awa, w \in \Sigma^\star\}; L(M_5) = \{x = auaawa, u, w \in \Sigma^\star\}; L(M_6) = \{x = uab, u \in \Sigma^\star\}; L(M_7) = \{x = a^n ba^m, n, m \in \mathbb{N}_0\}; L(M_8) = \{x \in \Sigma^\star : |x|_b = 0 \mod (3)\}$ [o también, generado por $E_8 = a^\star + (a^\star ba^\star ba^\star ba^\star)^\star$]; $E_9 = (a+b)^\star aa; E_{10} = aaa^\star + bbb^\star; E_{11} = a^\star + (a^\star ba^\star ba^\star)^\star; L(M_{12}) = \{x = bubbwb, u, w \in \Sigma^\star\}; L(M_{13})$: cualquier palabra que no contenga la subcadena aab.

Observación 1: El lenguaje del autómata M_5 es el producto cartesiano del lenguaje del autómata M_4 por sí mismo, esto es $L(M_5) = (L(M_4))^2$, lo que puede observarse casi directamente atendiendo sus respectivos esquemas. Por otra parte, M_{12} es esencialmente el mismo autómata que M_5 con una permutación de las letras del alfabeto.

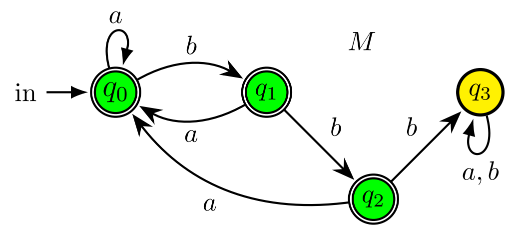
Observación 2: Si en el autómata M_{13} se pasan todos los estados de aceptación (es decir, q_0, q_1, q_2) a estados normales, mientras que el estado normal q_3 se pasa a estado de aceptación, ¿qué sucede?: el lenguaje aceptado por al autómata así modificado es ahora el complemento del lenguaje que era aceptado por el autómata original, luego se tiene un autómata que acepta cualquier palabra que contenga a la subcadena aab.

60. (-) Dado el autómata $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$ con alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, conjunto de estados $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, estado inicial q_0 y conjunto de aceptación $F = \{q_0, q_1, q_2\}$, determinar el cardinal de $S = \{x \in L(M) : |x| \leq 4\}$.

$\Upsilon : Q \times \Sigma \to Q$

	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_0	q_0	q_0	q_3
b	q_1	q_2	q_3	q_3

♣ Resp. Parcial. El lenguaje puede resumirse diciendo que acepta cualquier palabra que no tenga una cadena de tres letras b seguidas (¡probarlo!). Del total de palabras de longitud a lo sumo cuatro (que son $2^4+2^3+2^2+2+1=31$) deben descontarse las cuatro que contienen la cadena prohibida: $bbb, abbb, bbba, bbbb$, luego $|S| = 31-4 = 27$.



61. (+) Sea $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$ con $\Sigma = \{a,b\}, Q = \{q_0,q_1,q_2,q_3\}, F = \{q_2\}$, con la función de transición Υ indicada, y lenguaje aceptado L. Determinar, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, el cardinal de los conjuntos $X_n = \{x \in L : |x| = n\}, S_n = \{x \in L : |x| \leq n\}$. ¿Para cuántos valores de n el cardinal de S_n es par?
Se define el autómata complemento M' como $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F')$, esto es con conjunto de aceptación complementario $F' = Q - F$. Determinar L', el lenguaje aceptado por M' y el cardinal de los conjuntos $X'_n = \{x \in L' : |x| = n\}, S'_n = \{x \in L' : |x| \leq n\}$.

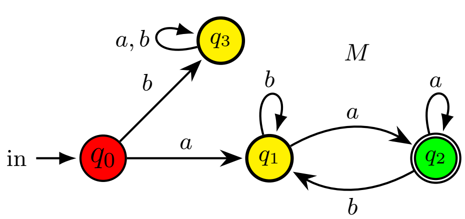
$\Upsilon : Q \times \Sigma \to Q$

	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_2	q_2	q_3
b	q_3	q_1	q_1	q_3

♣ Resp. parcial. El lenguaje aceptado por el autómata M es (¡dar detalles!) $L = \{x = aua, u \in \Sigma^\star\}$, en lenguaje coloquial el lenguaje se constituye de palabras (de longitud al menos 2) que inician y terminan con la letra a (y entonces, $|S_0| = |S_1| = 0$). Para cualquier $n \geq 2$ una palabra de longitud exactamente n tiene entonces la forma $a\underbrace{\ldots}_{n-2}a$, y siendo los $n-2$ caracteres libres, hay entonces exactamente 2^{n-2} palabras de longitud n, de modo que $|X_n| = 2^{n-2}, n \geq 2$ (desde luego, $|X_n| = 0$ con $n = 0,1$); ahora, el cardinal de S_n es 0 si $n = 0,1$ y para $n \geq 2$ es:

$$\forall n \geq 2 : |S_n| = \sum_{k=2}^{n} 2^{k-2} = 1+2+4+\cdots+2^{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i = \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n-1}-1$$

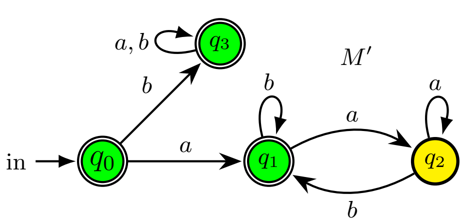
La figura muestra el *digraph* correspondiente al autómata y resume la información del cardinal de S_n . Dado que $2^{n-2}-1$ es impar, solo para dos valores de n el cardinal de S_n toma valores pares: $n = 0$ y $n = 1$.



$$L = \{x = aua, u \in \Sigma^\star\}, \quad |S_n| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0,1 \\ 2^{n-1}-1 & \text{si} \quad n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

Observación. En la obtención del resultado se supone conocido que la suma de la serie geométrica $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^p$ es $(q^{p+1}-1)/(q-1)$, lo que se ha aplicado en este caso con $q = 2, p = n-2$.

En cuanto a M', por definición del conjunto de aceptación F' es inmediato que $x \in L'$ sii $x \notin L$, de modo que L' es el complemento de L, esto es $L' = \Sigma^\star - L$ (lo que hace consistente la notación), de modo que el lenguaje aceptado por M' se constituye de todas las palabras que no empiezan y terminan con la letra a, por ejemplo $X'_0 = \{\lambda\}, X'_1 = \{a,b\}, X'_2 = \{ab, ba, bb\}, X'_3 = \{aab, abb, baa, bba, bab, bbb\}, \ldots$ Como en total hay 2^n palabras en $\Sigma^\star$, siendo X_n, X'_n disjuntos, debe se $|X_n| + |X'_n| = 2^n$, lo que para $n \geq 2$ es $2^{n-2} + |X'_n| = 2^n$, resultando $|X'_n| = 2^n - 2^{n-2} = 2^{n-2}(2^2-1) = 3 \cdot 2^{n-2}$ (y ya se vio que $|X'_0| = 1, |X'_1| = 2$). Procediendo del mismo modo (detallar) se obtiene $|S'_n| = 3 \cdot 2^{n-1}$ para $n \geq 1$, mientras que $|S'_0| = 1$.



$$L' = \Sigma^\star - L, \quad |S'_n| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 3 \cdot 2^{n-1} & \text{si} \quad n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

La figura anterior resume los resultados para el autómata complemento y la tabla muestra los cardinales de cada conjunto y sus relaciones; es buen ejercicio examinar la tabla y comprobar, explicitando, los objetos mismos (no su cantidad) recorriendo alguna columna, por ejemplo la correspondiente a $n = 3$; observar que, para cada n, es $|X_n| + |X'_n| = 2^n$. *Observación*: las relaciones entre un autómata y su complemento se aprovechan cuando uno tiene un conjunto de aceptación muy poblado, en cuyo caso será más sencillo estudiar el complemento.

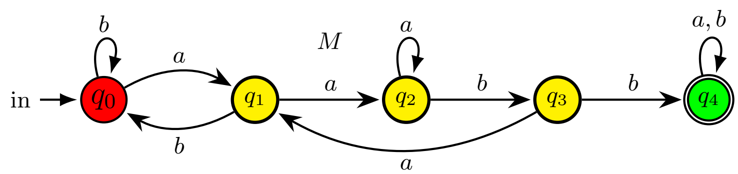
n	0	1	2	3	4	5	6
$\|X_n\|$	0	0	1	2	4	8	16
$\|X'_n\|$	1	2	3	6	12	24	48
$\|X_n + X'_n\|$	1	2	4	8	16	32	64
$\|S_n\|$	0	0	1	3	7	15	31
$\|S'_n\|$	1	3	6	12	24	48	96
$\|S_n + S'_n\|$	1	3	7	15	31	63	127

62. (+) El autómata $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$ con alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, conjunto de estados $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, estado inicial q_0 y conjunto de aceptación $F = \{q_4\}$, reconoce el lenguaje L. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ el conjunto $S_n = \{x \in L : |x| \leq n\}$. Deterrminar los conjuntos S_n para $n \leq 5$, y los cardinales de S_n para todo n.

$\Upsilon : Q \times \Sigma \to Q$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
a	q_1	q_2	q_2	q_1	q_4
b	q_0	q_0	q_3	q_4	q_4

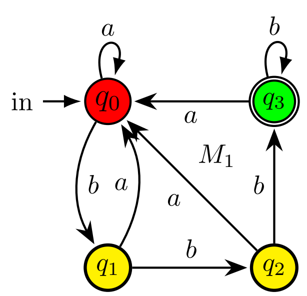
♣ Resp. parcial. El lenguaje aceptado por M se constituye por las palabras que contienen la cadena $aabb$ (probarlo), y entonces es inmediato que $S_n = \emptyset$ para $n = 0, 1, 2, 3$, también es directo que $S_4 = \{aabb\}, S_5 = \{aabb, aaabb, baabb, aabba, aabbb\}$. Los primeros cardinales no nulos son $|S_4| = 1, |S_5| = 1 + 4 = 5, |S_6| = 1 + 4 + 12 = 17, |S_7| = 1 + 4 + 12 + 32 = 49$, de donde puede obtenerse la expresión general... Puede ayudar un esquema para el razonamiento de cómo contar las palabras de, por ejemplo, 7 letras, con las bolitas comodines que pueden ser ocupadas por las dos letras del alfabeto: $\bullet\bullet\bullet\, aabb$, $\bullet\bullet\, aabb\, \bullet$, $\bullet\, aabb\, \bullet\bullet$, $aabb\, \bullet\bullet\bullet$

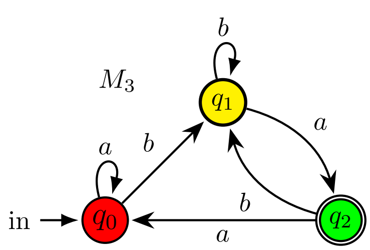


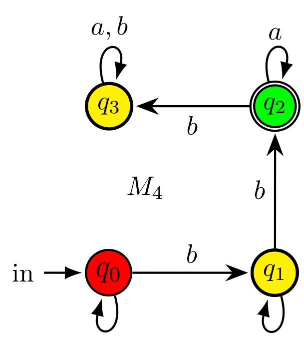
$L = \{x = uaabbv, u, v \in \Sigma^\star\}$

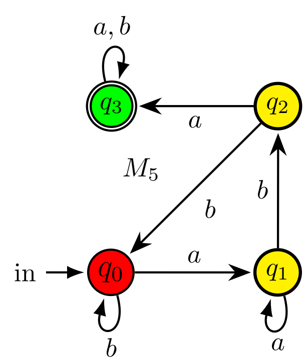
63. (+) Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, para cada uno de los lenguajes L, definir un autómata $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$ tal que $L = \{x \in \Sigma^\star : \Upsilon^\star(q_0, x) \in F\}$. (1) $L = \{x \in \Sigma^\star : x = ubbb, u \in \Sigma^\star\}$; (2) $L = \{x \in \Sigma^\star : x = abu, u \in \Sigma^\star\}$; (3) $L = \{x \in \Sigma^\star : x = uba, u \in \Sigma^\star\}$; (4) $L = \{x \in \Sigma^\star : |\, x\, |_b = 2\}$ (esto es, palabras con exactamente 2 letras b); (5) $L = \{x \in \Sigma^\star : x = uabav, u, v \in \Sigma^\star\}$; (6) expresión regular $a^\star b(a^\star b^\star)^\star$; (7) expresión regular $a^\star(baaba^\star)^\star$; (8) expressión regular $b(a+b)^\star aa$; (9) $L = \{x \in \Sigma^\star : |\, x\, |_b = 1 \mod (2)\}$ (palabras con un número impar de letras b); (10) palabras cuya letra inicial sea distinta de la letra final; (11) palabras cuya longitud no sea múltiplo de tres; (12) palabras con exactamente una letra "a".

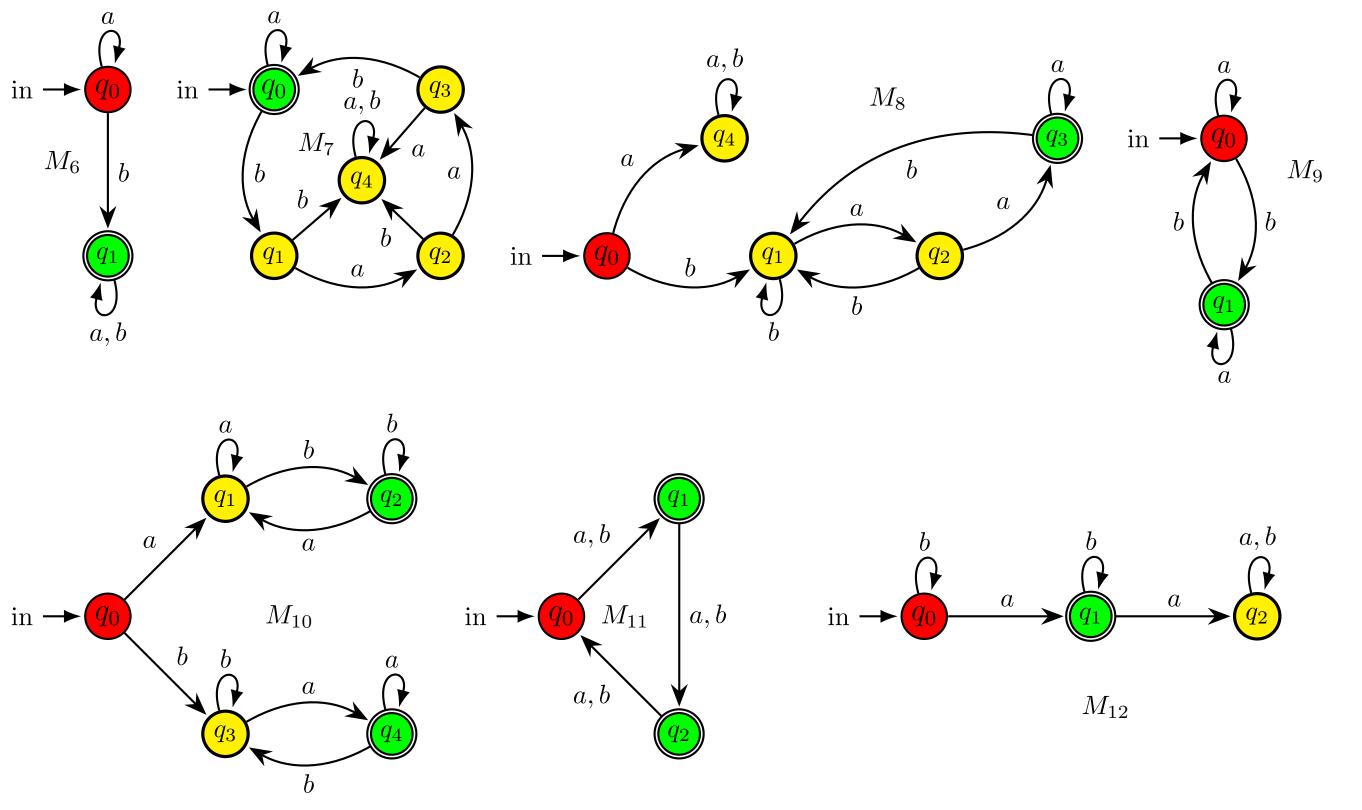
♣ (Resp. parcial) Las figuras muestran autómatas que satisfacen lo pedido (¿son únicos?).



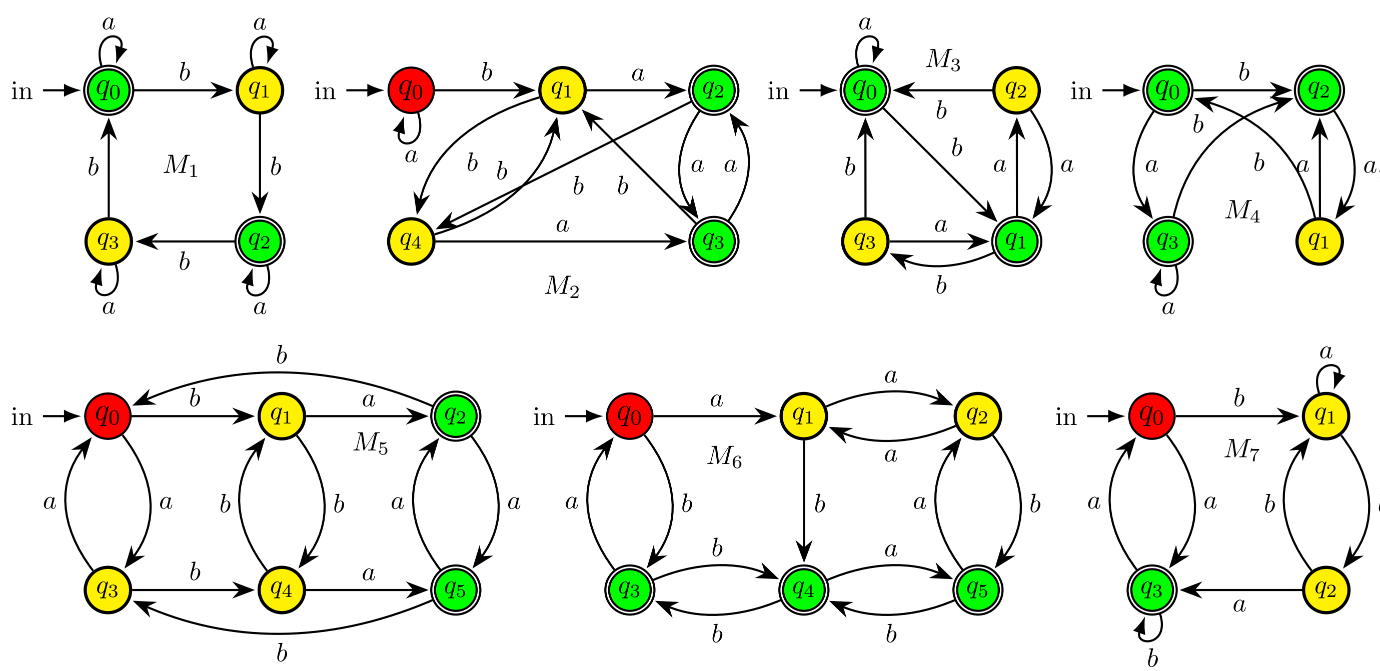




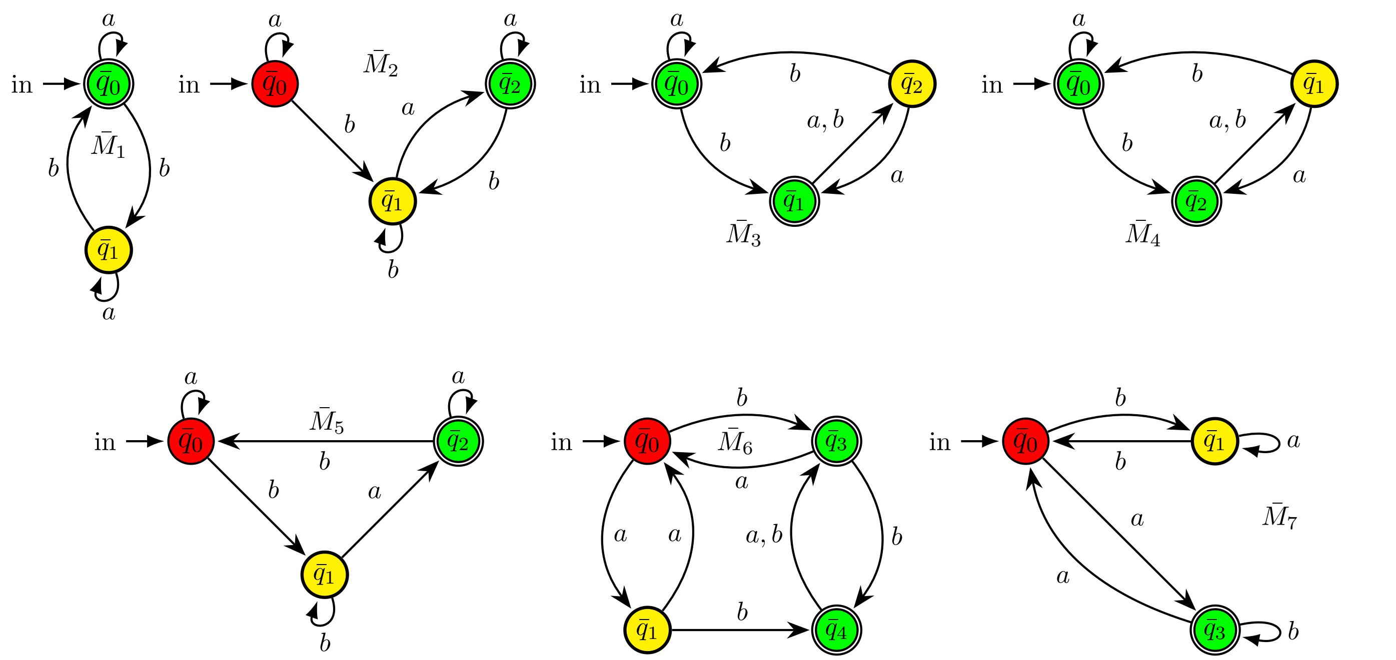




64. (+) En un autómata $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$, dado $k \in \mathbb{N}_0$ se define en Q la relación de *k-equivalencia* $\mathcal{R}_k$ tal que $q\mathcal{R}_k r$ sii para cualquier $x \in \Sigma^\star :| x |\leq k$ se cumple que $\Upsilon^\star(q, x) \in F$ sii $\Upsilon^\star(r, x) \in F$ (con su correspondiente clausura, la *$\star$-equivalencia* $\mathcal{R}_\star$). Para cada uno de los siguientes autómatas, determinar las clases de k-equivalencia, los cocientes $\bar{Q} = Q/\mathcal{R}_\star, \bar{F} = F/\mathcal{R}_\star$, la clase $\bar{q}_0 = [q_0]$, la función $\bar{\Upsilon} : \bar{Q} \times \Sigma \to \bar{Q}$ y el *autómata cociente* $\bar{M} = (\Sigma, \bar{Q}, \bar{q_0}, \bar{\Upsilon}, \bar{F})$ que reconoce el mismo lenguaje que M (esto es $L(\bar{M}) = L(M)$). ¿Cuál es ese lenguaje?



♣ Resp. parcial. Para M_1 las clases 0-equivalentes son $\{q_0, q_2\}, \{q_1, q_3\}$, que coinciden con las 1-equivalentes, y entonces con las $\mathcal{R}_\star$-equivalentes, $\bar{Q} = Q/\mathcal{R}_\star = \{\bar{q}_0, \bar{q}_1\}$, siendo $\bar{q}_0 = \{q_0, q_2\}, \bar{q}_1 = \{q_1, q_3\}, \bar{F} = \bar{q}_0, \bar{\Upsilon}(\bar{q}_0, a) = \bar{q}_0, \bar{\Upsilon}(\bar{q}_0, b) = \bar{q}_1, \bar{\Upsilon}(\bar{q}_1, a) = \bar{q}_1, \bar{\Upsilon}(\bar{q}_1, b) = \bar{q}_0$, con lenguaje $L(\bar{M}) = L(M) = \{x \in \Sigma^\star :| x |_b = 0 \mod (2)\}$; para M_2 las clases 0-equivalentes son $\{q_0, q_1, q_4\}, \{q_2, q_3\}$, las k-equivalentes ($k \geq 1$, y por tanto $\star$-equivalentes) son $\bar{q}_0 = \{q_0\}, \bar{q}_1 = \{q_1, q_4\}, \bar{q}_2 = \{q_2, q_3\}$; para M_3 las clases 0-equivalentes son $\{q_0, q_1\}, \{q_2, q_3\}$, las k-equivalentes ($k \geq 1$, y por tanto $\star$-equivalentes) son $\bar{q}_0 = \{q_0\}, \bar{q}_1 = \{q_1\}, \bar{q}_2 = \{q_2, q_3\}$; para M_5 las clases 0-equivalentes son $\{q_0, q_1, q_3, q_4\}, \{q_2, q_5\}$, las 1-equivalentes son $\{q_0, q_3\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2, q_5\}$, las k-equivalentes ($k \geq 2$, y por tanto $\star$-equivalentes) son $\bar{q}_0 = \{q_0, q_3\}, \bar{q}_1 = \{q_1, q_4\}, \bar{q}_2 = \{q_2, q_5\}$; para M_6 las clases 0-equivalentes son $\{q_0, q_1, q_2\}, \{q_3, q_4, q_5\}$, las 1-equivalentes son $\{q_0, q_1, q_2\}, \{q_3, q_5\}, \{q_4\}$, las k-equivalentes ($k \geq 2$, y por tanto $\star$-equivalentes) son $\bar{q}_0 = \{q_0, q_2\}, \bar{q}_1 = \{q_1\}, \bar{q}_3 = \{q_3, q_5\}, \bar{q}_4 = \{q_4\}$; para M_7 las clases 0-equivalentes son $\{q_0, q_1, q_2\}, \{q_3\}$, las k-equivalentes ($k \geq 1$, y por tanto $\star$-equivalentes) son $\bar{q}_0 = \{q_0, q_2\}, \bar{q}_1 = \{q_1\}, \bar{q}_3 = \{q_3\}$. Observar que los autómatas cociente de M_3 y M_4 son isomorfos, así que M_3 y M_4 son *equivalentes* (esto es, reconocen el mismo lenguaje).



65. ($\rightsquigarrow$) (*Correction code*) Una de las técnicas de reconstrucciones conjeturales de códigos alterados exigen resolver ecuaciones que tienen como incógnitas fragmentos de un código. Por ejemplo, supuesto el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, se requiere hallar todas las palabras $x \in \Sigma^\star$ que concatenadas como prefijo y sufijo del fragmento `011` producen el mismo mensaje. En términos más precisos el problema se formula como el de resolver la siguiente ecuación en la incógnita $x \in \Sigma^\star$.

$$\boxed{\text{x011} = \text{011x}}$$

♣ (Resp. Parcial). Se observa de inmediato que una solución trivial es la palabra nula (de longitud 0), esto es $x = \lambda$ pues (por definición de λ) se cumple $\lambda 011 = 011 = 011\lambda$; también es directo que x no puede tener longitud 1 ni longitud 2 (detallar el argumento que fundamenta esta afirmación). Sea entonces x de longitud al menos tres, y como es prefijo en el miembro izquierdo, debe iniciar necesariamente con 011 (para igualar el prefijo que inicia la palabra del miembro izquierdo de la igualdad), luego debe ser $x = 011y$, con algún $y \in \Sigma^\star$, y entonces la igualdad queda escrita como $011y011 = 011011y$, lo que se cumple sii $x = y011$, esto es que $011y = y011$ (esto significa que y también debe ser solución de la ecuación), lo que proporciona, recursivamente, una solución x: o es la solución nula $x = \lambda$ o es $x = 011y$, donde y es una solución. De todo esto resulta que $x = (011)^n$ es una solución ($n \in \mathbb{N}_0$) para cada n y que toda solución es de esa forma (algunas soluciones son: $\lambda, 011, 011011, 011011011, \ldots$).