EL PROBLEMA DUAL DE PROGRAMACION LINEAL

Se desarrollará el planteo del problema dual del ejercicio 4.3 de la guía de trabajos prácticos cuyo planteo directo es:

$$X2 \leq 3 \qquad \text{recurso 1}$$
$$4.X1 + 6.X2 \leq 24 \qquad \text{recurso 2}$$
$$4.X1 - 3.X2 \leq 12 \qquad \text{recurso 3}$$

$$Z = 5.X1 + 2.X2 \qquad \text{Máximo}$$

Se define como "Valor marginal" de un recurso a la variación del funcional por unidad de variación de la disponibilidad de ese recurso. Sean Y1, Y2 e Y3 los valores marginales de los recursos 1, 2 y 3 respectivamente.

" Costo de oportunidad " de un producto es lo que empeora el funcional cuando se fuerza al sistema a producir una unidad de un producto no básico. Sean Y4 e Y5 los Costos de Oportunidad de los productos 1 y 2.

El Costo de Oportunidad tiene dos componentes: por un lado al retirar recursos asignados a los otros productos para producir la unidad marginal del producto en cuestión, se empeora el funcional en una magnitud equivalente al producto de los valores marginales de los recursos por las cantidades necesarias para producir esa unidad marginal de producto (Costo Marginal). Por el otro al incorporar a la producción una unidad marginal del producto, se recibirá su Beneficio Marginal. En otras palabras:

Costo de Oportunidad = Costo Marginal del Producto - Beneficio Marginal

Alcanzado el óptimo los recursos se habrán asignado de modo que para un determinado producto se verifique que:

- Se está produciendo alguna unidad del producto, y entonces se estarán produciendo tantas como para que el Costo Marginal del producto haya igualado al Beneficio Marginal del producto, y por tanto el Costo de Oportunidad sea nulo, ó

- No se está produciendo unidad alguna del producto debido a que el Costo Marginal del producto excede su Beneficio Marginal, y por tanto el Costo de Oportunidad será positivo.

En el óptimo el costo marginal del Producto 1 es:

Costo Marginal Producto 1 = 0.Y1 + 4.Y2 + 4.Y3 ....y el beneficio marginal es:
Beneficio Marginal Producto 1 = 5

De modo que el Costo de Oportunidad del Producto 1 (Y4) es:

$$Y4 = 0.Y1 + 4.Y2 + 4.Y3 - 5 \qquad \text{............ó}$$

$$0.Y1 + 4.Y2 + 4.Y3 - Y4 = 5$$

Como Y4 en el óptimo es positiva[i] o nula, también puede escribirse que

$$\boxed{0.Y1 + 4.Y2 + 4.Y3 \geq 5} \qquad \text{........(1)}$$

Daniel Rigou
Notas de clase (agosto 1999)

Repitiendo el desarrollo para el Producto 2

Costo Marginal Producto 2 = $1.Y1+6.Y2-3.Y3$
Beneficio Marginal Producto 2 = 2
Por tanto, el Costo de Oportunidad del Producto 2 (Y5) puede escribirse como

$$Y5 = 1.Y1 + 6.Y2 - 3.Y3 - 2$$

$$1.Y1 + 6.Y2 - 3.Y3 - Y5 = 2$$

Como Y5 en el óptimo es positiva o nula, también puede escribirse que

$$\boxed{1.Y1 + 6.Y2 - 3.Y3 \geq 2} \quad ....(2)$$

Las ec. (1) y (2) conforman las restricciones del problema dual.

Por otra parte la asignación de los recursos será óptima cuando el Valor Marginal del total de los recursos disponibles sea mínimo, o sea que

$$Z = 3.Y1 + 24.Y2 + 12.\ Y3 \qquad \text{Mínimo}$$

El problema dual del ejercicio 4.3 queda entonces formado de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{array}{l} 0.Y1 + 4.Y2 + 4.Y3 \geq 5 \\ 1.Y1 + 6.Y2 - 3.Y3 \geq 2 \\ \\ Z = 3.Y1 + 24.Y2 + 12.\ Y3 \qquad \text{Mínimo} \end{array}}$$

---

[i] En el desarrollo del problema directo las variables Y1, Y2 .... Y5 comienzan siendo negativas o nulas ya que se trata de un problema de maximización. En el óptimo deben ser positivas o nulas indicando que la solución no puede mejorarse. En el problema dual las variables Y1, Y2 .... Y5 son positivas en todos los pasos de la búsqueda de la solución.