Sistema de inecuaciones

X1 : Producción mensual de televisores (televisores/mes)

X2 : Producción mensual de radios (radios/mes)

1 (h/t) . X1 (t/m) + 4 (h/r) . X2 (r/m) < 32.000 (h/m)

4 (p/t) . X1 (t/m) + 3 (p/r) . X2 (r/m) < 37.000 (p/m)

3 ($/t) . X1 (t/m) - 2 ($/r) . X2 (r/m) < 15.000 ($/m)

2 (hh/t) . X1 (t/m) + 1 (hh/r) . X2 (r/m) > 4.000 (hh/m)

X1>0 ; X2 > 0

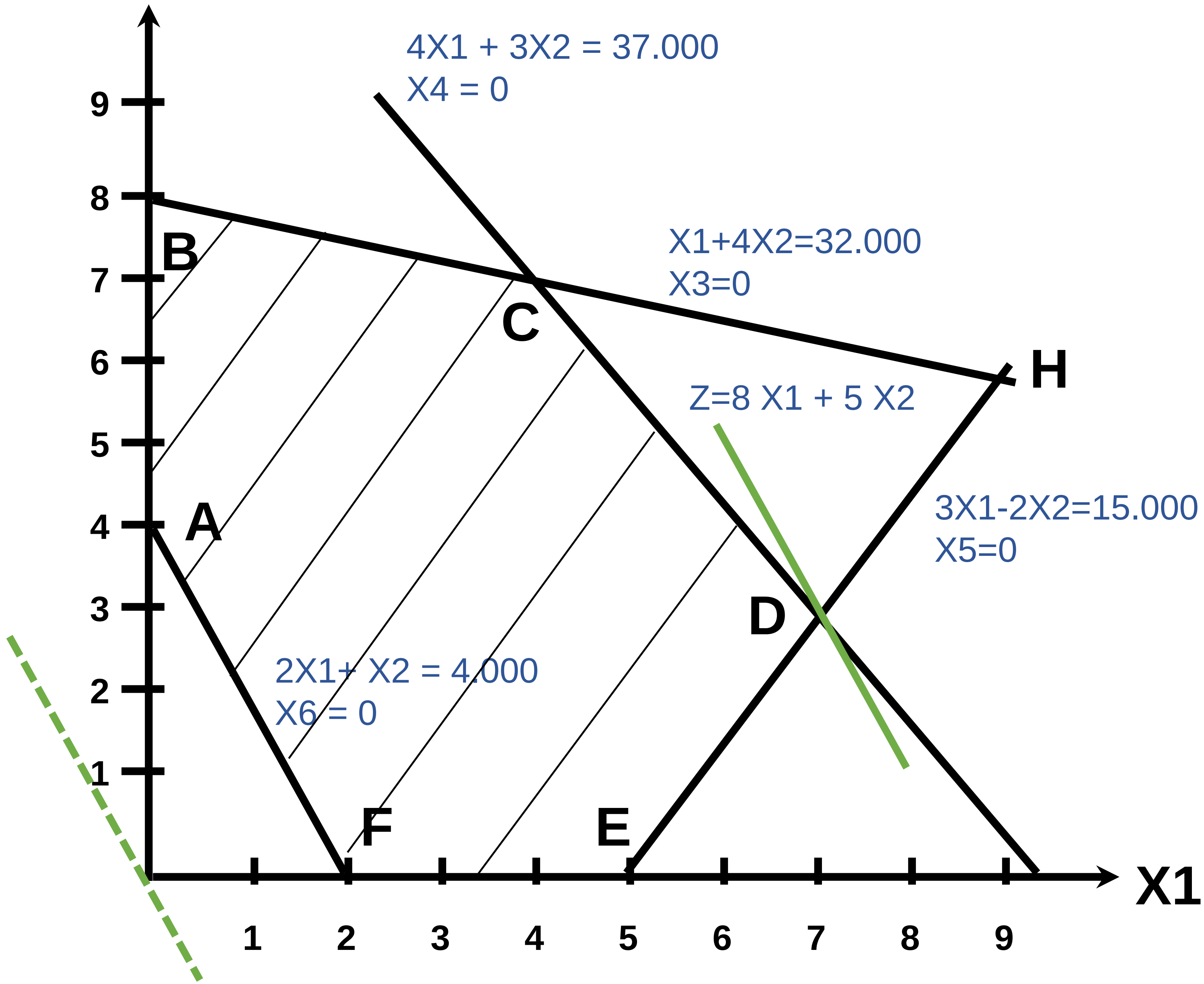
Z = 8 ($/t) . X1 (t/m) + 5 ($/r) . X2 (r/m) Máximo

Sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{lllllll}
1\,X1 + 4\,X2 + X3 & & & & = 32.000 \\
4\,X1 + 3\,X2 & + X4 & & & = 37.000 \\
3\,X1 - 2\,X2 & & + X5 & & = 15.000 \\
2\,X1 + 1\,X2 & & & - X6 & = 4.000
\end{array}
$$

$X1 > 0; X2 > 0 ; X3 > 0 ; X4 > 0 ; X5 > 0; X6 > 0$

$Z = 8\,X1 + 5\,X2 + 0\,X3 + 0\,X4 + 0\,X5 + 0\,X6$


4X1 + 3X2 = 37.000
X4 = 0
X1+4X2=32.000
X3=0
Z=8 X1 + 5 X2
3X1-2X2=15.000
X5=0
2X1+ X2 = 4.000
X6 = 0
A
B
C
D
E
F
H
X1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Método Simplex

- El problema de PL puede presentarse de la siguiente forma:

B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	u
32,000	1	4	1	0	0	0	0
37,000	4	3	0	1	0	0	0
15,000	3	-2	0	0	1	0	0
4,000	2	1	0	0	0	-1	1

m (filas) ↓ ; n (columnas) →

- Se requieren 4 vectores para formar una base. Inicialmente se recurre a la base canónica (A3; A4; A5; u), en ella puede expresarse el vector B y cualquiera de los vectores no básicos Aj.

- $$\sum_{\substack{i:variable\\ básica}} A_i . X_i = B$$ Donde los Ai son los vectores básicos elegidos.

$$\begin{vmatrix} 32.000 \\ 37.000 \\ 15.000 \\ 4.000 \end{vmatrix} = 32.000 \times \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 37.000 \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 15.000 \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + 4.000 \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

- Expresión que indica que en el primer paso con X1 y X2 iguales a cero los sobrantes equivalen a toda la disponibilidad

Método Simplex

- Los vectores no básicos pueden expresarse en función de los vectores de la base hallando los x_{ij} adecuados:

- $\sum_{\substack{i:variable \\ básica}} x_{ij}.A_i = A_j$ Donde los Ai son los vectores básicos y los Aj los no básicos

- Para el Vector A1 en el primer paso:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

- Se tratará ahora de generar una nueva base a partir de la actual. Esto permitirá “recorrer” los vértices del polígono de soluciones.

Método Simplex

- Tomamos la expresión que nos permite expresar los vectores no básicos y multiplicamos ambos miembros por una cierta magnitud θ

$$\sum_i x_{ij}.A_i = A_j \longrightarrow \theta.\sum_i x_{ij}.A_i = \theta.A_j$$

$$\longrightarrow \theta.A_j - \theta.\sum_i x_{ij}.A_i = 0$$

- Sumamos la expresión anterior a: $\sum_i A_i.X_i = B$ y queda:

$$\sum_i A_i.X_i + \theta.A_j - \theta.\sum_i x_{ij}.A_i = B \longrightarrow \sum_i (X_i - \theta x_{ij})A_i + \theta.A_j = B$$

Método Simplex

- Supongamos que deseamos introducir en la base el vector A1. Ya se han calculado los coeficientes x_{ij} que permiten expresar el vector en términos de la primera base: 1;4;3;2.

$$\sum_i (X_i - \theta x_{ij}) A_i + \theta . A_j = B \qquad \longrightarrow$$

$$(X_3 - \theta . x_{31}). A_3 + (X_4 - \theta . x_{41}). A_4 + (X_5 - \theta . x_{51}). A_5 + (X_u - \theta . x_{u1}). A_u + \theta . A_1 = B$$

$$(32.000 - \theta .1). \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + (37.000 - \theta .4). \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + (15.000 - \theta .3). \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + (4.000 - \theta .2). \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \theta . \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 32000 \\ 37.000 \\ 15.000 \\ 4.000 \end{vmatrix}$$

- θ debe elegirse de modo que alguno de los paréntesis se anule para eliminar uno de los vectores de la base anterior. Simultaneamente se debe cumplir que ninguno de los paréntesis (y por tanto ninguna de las variables del próximo paso) se transforme en negativa. De este modo se garantiza que el nuevo vértice pertenezca a uno de los extremos del polígono.
- Elegimos por tanto de entre los posibles $\theta_j = \frac{X_i}{x_{ij}}$ el menor positivo

Método Simplex

- Con θ = 2.000 se anula el vector correspondiente a la variable u y queda:

$$30.000\begin{vmatrix}1\\0\\0\\0\end{vmatrix}+29.000\begin{vmatrix}0\\1\\0\\0\end{vmatrix}+9.000\begin{vmatrix}0\\0\\1\\0\end{vmatrix}+2.000\begin{vmatrix}1\\4\\3\\2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}32.000\\37.000\\15.000\\4.000\end{vmatrix}$$

SOBRANTE + USO = DISPONIBILIDAD

- En el segundo paso la base queda conformada por los vectores A3, A4, A5 y A1. Los valores de las variables son:

- X1=2.000 Básica
- X2=0 No básica
- X3=30.000 Básica
- X4=29.000 Básica
- X5=9.000 Básica
- X6=0 No básica

Método Simplex

- Los vectores no básicos A2 y A6 pueden expresarse en la nueva base:

$$A_2 = (7/2)\begin{vmatrix}1\\0\\0\\0\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0\\1\\0\\0\end{vmatrix} - (7/2)\begin{vmatrix}0\\0\\1\\0\end{vmatrix} + (1/2)\begin{vmatrix}1\\4\\3\\2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4\\3\\-2\\1\end{vmatrix}$$

$$A_6 = (1/2)\begin{vmatrix}1\\0\\0\\0\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}0\\1\\0\\0\end{vmatrix} + (3/2)\begin{vmatrix}0\\0\\1\\0\end{vmatrix} - (1/2)\begin{vmatrix}1\\4\\3\\2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\\-1\end{vmatrix}$$

- La tabla en el segundo paso contiene los nuevos valores de las variables y los coeficientes que permiten expresar los vectores Ai en la nueva base. Estos últimos coeficientes pueden obtenerse por condensación pivotal a partir de la primera tabla.

Xi	A1	A2	A3	A4	A5	A6
30,000	0	7/2	1	0	0	1/2
29,000	0	1	0	1	0	2
9,000	0	-7/2	0	0	1	3/2
2,000	1	1/2	0	0	0	-1/2

Método Simplex

- Definamos una nueva magnitud Z_k que indique el valor del funcional en cada paso:

$$Z_k = \sum_i X_i . c_i$$

- En el primer paso su valor es:

$$Z_0 = 32.000 \times 0 + 37.000 \times 0 + 15.000 \times 0 - 4.000 \times M = -4.000. M$$

- Definamos también la magnitud Z_j como: $Z_j = \sum_i x_{ij} . c_i$

- Se puede demostrar que el funcional toma en el siguiente paso el valor Z dado por:

$$Z_{k+1} = Z_k - \theta . (Z_j - c_j)$$

- La magnitud Zj-cj define entonces si es posible aumentar el funcional. Dado que θ es positivo si la magnitud de Zj-cj es negativa es aún posible mejorar el funcional, caso contrario se habrá alcanzado el máximo.

Método Simplex

			8	5					-M	
Ck	Xk	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	u	θ
0	X3	32,000	1	4	1	0	0	0	0	32000
0	X4	37,000	4	3	0	1	0	0	0	9250
0	X5	15,000	3	-2	0	0	1	0	0	5000
-M	u	4,000	2	1	0	0	0	-1	1	2000
Z = -4000 M			-2M-8	-M-5	0	0	0	M	0	

Variable que sale

Variable que entra

			8	5					-M	
Ck	Xk	Xi	A1	A2	A3	A4	A5	A6	u	θ
0	X3	30,000	0	7/2	1	0	0	1/2		60000
0	X4	29,000	0	1	0	1	0	2		14500
0	X5	9,000	0	-7/2	0	0	1	3/2		6000
8	X1	2,000	1	1/2	0	0	0	-1/2		< 0
Z = 16,000			0	-1	0	0	0	-4		

El funcional aumenta en: $-\theta.(Z_j - c_j)$

Zj-cj negativos indican que aún es posible mejorar el funcional

Método Simplex

			8	5					-M	
Ck	Xk	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	u	
0	X3	32,000	1	4	1	0	0	0	0	32000
0	X4	37,000	4	3	0	1	0	0	0	9250
0	X5	15,000	3	-2	0	0	1	0	0	5000
-M	u	4,000	2	1	0	0	0	-1	1	2000
Z = -4000 M			-2M-8	-M-5	0	0	0	M	0	

			8	5					-M	
Ck	Xk	Xi	A1	A2	A3	A4	A5	A6	u	
0	X3	30,000	0	7/2	1	0	0	1/2		60000
0	X4	29,000	0	1	0	1	0	2		14500
0	X5	9,000	0	-7/2	0	0	1	3/2		6000
8	X1	2,000	1	1/2	0	0	0	-1/2		< 0
Z = 16,000			0	-1	0	0	0	-4		

			8	5					-M	
Ck	Xk	Xi	A1	A2	A3	A4	A5	A6	u	
0	X3	27,000	0	14/3	1	0	-1/3	0		5786
0	X4	17,000	0	17/3	0	1	-4/3	0		3000
0	X6	6,000	0	-7/3	0	0	2/3	1		< 0
8	X1	5,000	1	-2/3	0	0	1/3	0		< 0
Z = 40,000			0	-31/3	0	0	8/3	0		

			8	5					-M
Ck	Xk	Xi	A1	A2	A3	A4	A5	A6	u
0	X3	13,000	0	0	1	-14/17	13/17	0	
5	X2	3,000	0	1	0	3/17	-4/17	0	
0	X6	13,000	0	0	0	7/17	2/17	1	
8	X1	7,000	1	0	0	2/17	3/17	0	
Z = 71,000			0	0	0	31/17	4/17	0	

Método Simplex

- La base final quedó definida por los vectores A3; A2; A6; y A1
- Un vector no básico como el A4 puede escribirse en términos de la base final como:

$$A_4 = (-14/17).\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + (3/17).\begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} + (7/17).\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} + (2/17).\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- O en forma matricial:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -14/17 \\ 3/17 \\ 7/17 \\ 2/17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$[A].A_4^* = A_4 \longrightarrow [A]^{-1}.A_4 = A_4^*$$

- Expresión que permite obtener cualquier vector transformado a partir de la tabla inicial

$$\begin{vmatrix} 1 & -14/17 & 13/17 & 0 \\ 0 & 3/17 & -4/17 & 0 \\ 0 & 7/17 & 2/17 & -1 \\ 0 & 2/17 & 3/17 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14/17 \\ 3/17 \\ 7/17 \\ 2/17 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -14/17 & 13/17 & 0 \\ 0 & 3/17 & -4/17 & 0 \\ 0 & 7/17 & 2/17 & -1 \\ 0 & 2/17 & 3/17 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 32.000 \\ 37.000 \\ 15.000 \\ 4.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13.000 \\ 3.000 \\ 13.000 \\ 7.000 \end{vmatrix}$$

Método Simplex

CONCLUSIONES:

- **El método Simplex permite generar una nueva base a partir de una base dada. De este modo se “recorren” uno a uno los vértices del polígono de soluciones.**

- **Permite identificar en cada paso si se ha alcanzado el óptimo, en caso contrario da una indicación de la o las variables que pueden introducirse en la base para mejorar la solución.**

- **Provee un criterio para evitar generar bases que no pertenezcan al convexo de soluciones identificando qué variable debe quitarse de la base.**