# El Problema General de Programación Lineal

Encontrar el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{X}} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ que minimice (o maximice) la función objetivo

**Z** = $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_jx_j + \cdots + c_nx_n$ 1.1

Sujeta a las restricciones lineales:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots a_{1n}x_n = b_1$ 1.2

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots a_{2n}x_n = b_2$

…………………………………………………………………….

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots a_{in}x_n = b_i$

…………………………………………………………………….

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots a_{mn}x_n = b_m$

y

$x_j \geq 0 \quad j = 1,2, \dots . n$ 1.3

$a_{ij}; b_j; c_j\ constantes$

$m < n$

## Propiedades de una solución al problema de Programación Lineal

**Definición 1**: Una *solución factible* al problema de programación lineal, es un vector $\overrightarrow{\boldsymbol{X}} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ el cual satisface las condiciones 1.2 y 1.3.

**Definición 2a**: Una *solución básica* para 1.2 es una solución obtenida al hacer *n-m* variables igual a cero y resolver para las *m* variables remanentes, siempre que el determinante de los coeficientes de estas *m* variables no sea cero. Las *m* variables se llaman variables básicas.

**Definición 2b:** Una *solución básica factible* es una *solución básica* que también satisface 1.3; esto es, todas las variables básicas son no negativas.

**Definición 3:** Una *solución básica factible no degenerada* es una solución *básica factible* con exactamente *m* variables $x_i$ positivas; esto es, todas las variables básicas son positivas.

**Definición 4:** Una *solución mínima* (máxima) *factible*, es una solución *factible* que también minimiza (maximiza) 1.1

**Teorema 1:** El conjunto de todas las *soluciones factibles* al problema de programación lineal es un conjunto convexo.

**Teorema 2:** La función objetivo 1.1 alcanza su mínimo (máximo) en un punto extremo del conjunto convexo **K** generado por el conjunto de *soluciones factibles* al problema de programación lineal. Si alcanza este mínimo (máximo) en más de un punto extremo, entonces toma el mismo valor para toda combinación convexa de estos puntos particulares.

**Teorema 3:** Si puede encontrarse un conjunto $k \leq m$ de vectores $P_1, P_2, \dots P_k$ que es linealmente independiente y tal que $x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots x_kP_k = P_0$ y todas las $x_i \geq 0$, entonces el punto $\vec{\boldsymbol{X}} = (x_1, x_2, \dots x_k, 0, \dots \dots .0)$ es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles. En este caso, $\vec{\boldsymbol{X}}$ es un vector n-dimensional cuyos últimos n-k elementos son cero.

**Teorema 4**: Si $\vec{\boldsymbol{X}} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ es un punto extremo de **K**, entonces los vectores asociados con las $x_i$positivas, forman un conjunto linealmente independiente. De esto sigue que a lo sumo, m de las $x_i$ son positivas.

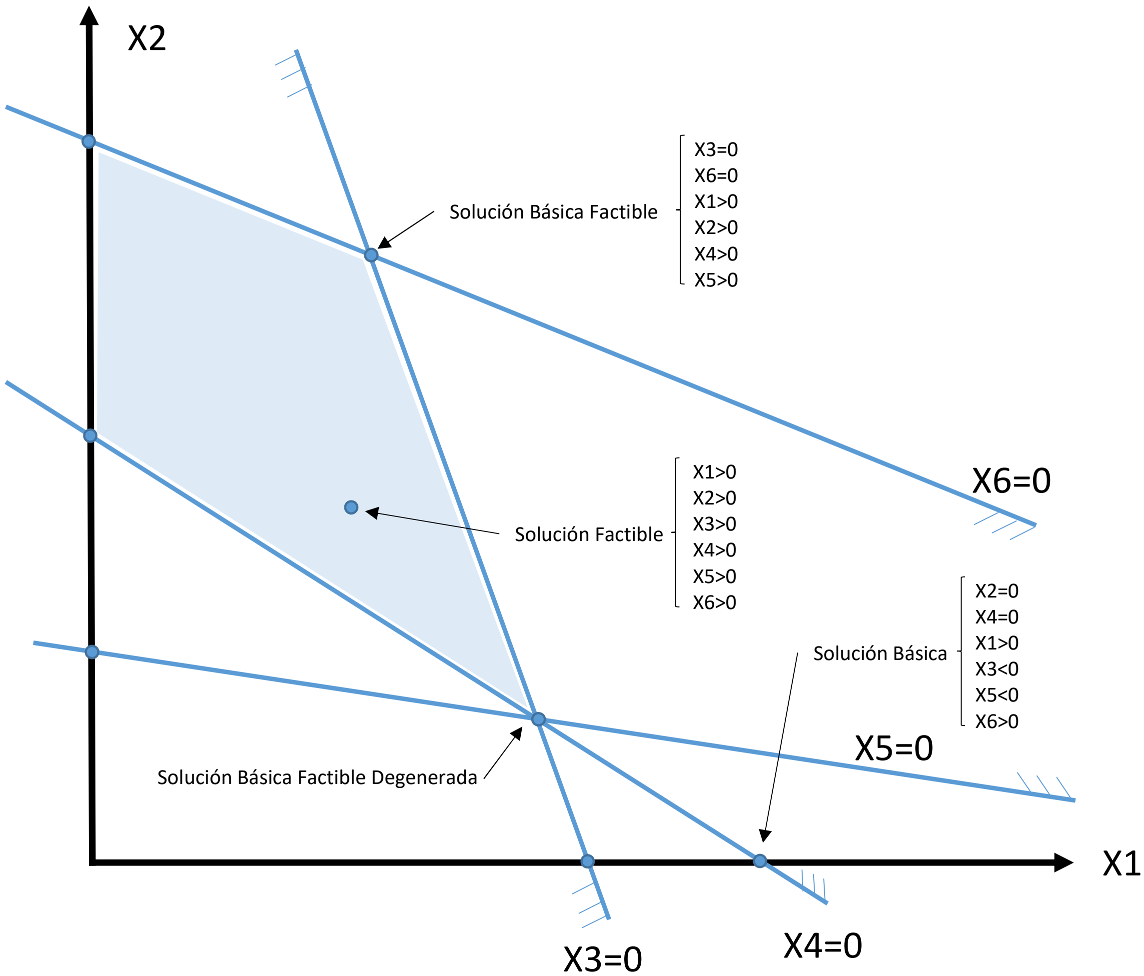
**Teorema 5**: $\vec{\boldsymbol{X}} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ es un punto extremo de **K**, si y sólo si, las $x_j$positivas son coeficientes de vectores linealmente independientes $P_j$ en $\sum_{j=1}^{n} x_jP_j = P_o$

**<u>Síntesis:</u>**

1. **Existe un punto extremo de K en el cual la función objetivo tiene su mínimo (máximo).**

2. **Cada solución *básica factible* corresponde a un punto extremo de K.**

3. **Cada punto extremo de K, tiene asociados con él a *m* vectores linealmente independientes del conjunto *n* vectores asociados con él.**


X2
X1
X3=0
X6=0
X1>0
X2>0
X4>0
X5>0
Solución Básica Factible
X1>0
X2>0
X3>0
X4>0
X5>0
X6>0
Solución Factible
X6=0
X2=0
X4=0
X1>0
X3<0
X5<0
X6>0
Solución Básica
X5=0
Solución Básica Factible Degenerada
X3=0
X4=0