Tutorial Simulación de Montecarlo

Tutorial Simulación de Montecarlo

El tutorial contiene pistas de audio; requiere conectar audífonos o parlantes

El tema debe estudiarse junto con:

- Taha: Investigación de Operaciones
- Coss Bu: Simulación un enfoque práctico
- Guía de TP

Tutorial Simulación de Montecarlo

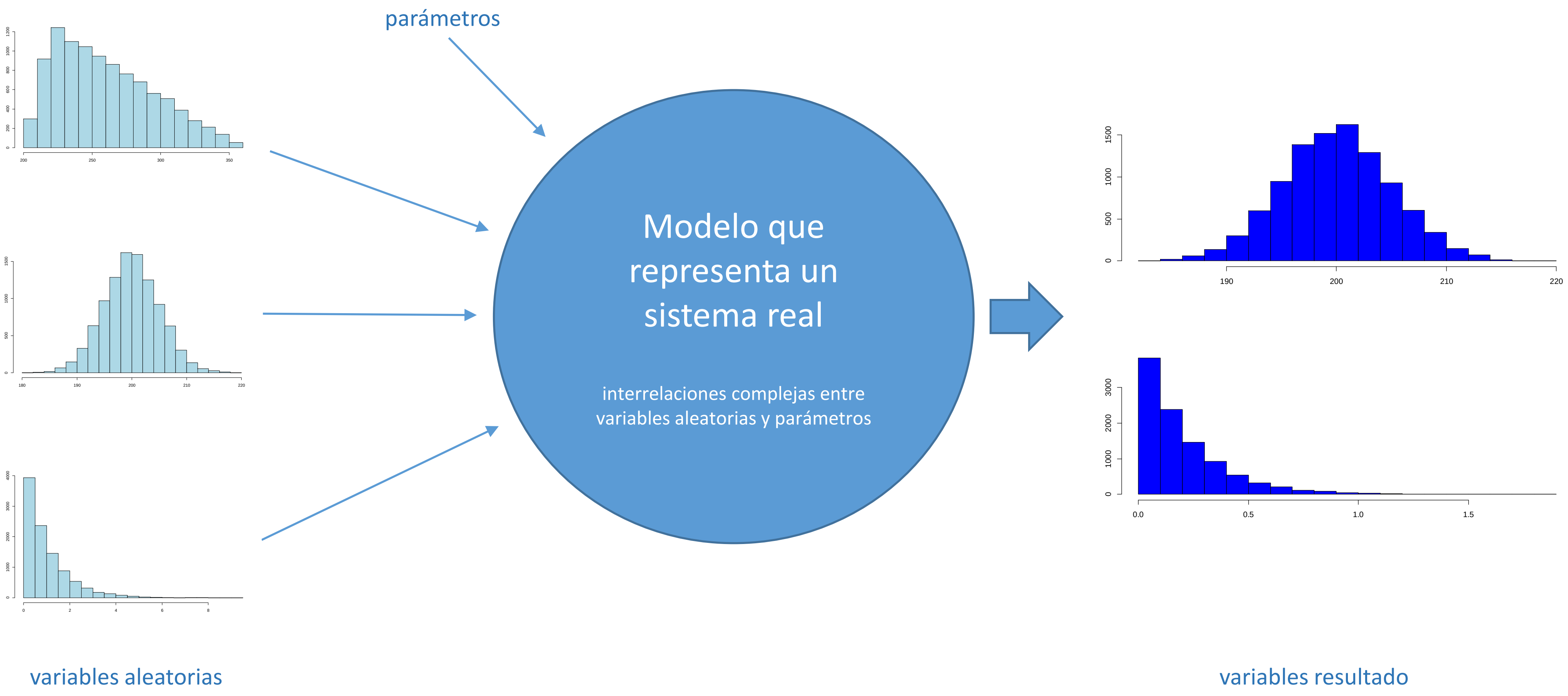
El tutorial contiene pistas de audio; requiere conectar audífonos o parlantes

Temario:

- Introducción
- Generación de variables aleatorias
  - Método de la transformada inversa
  - Método de composición
  - Métodos especiales
- Intervalo de confianza
- Ejemplo de aplicación
- Aplicaciones

Tutorial Simulación

Introducción

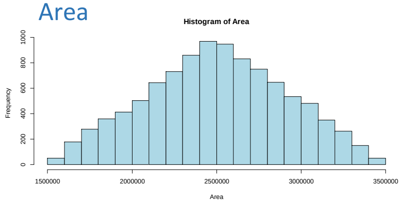


Tutorial Simulación

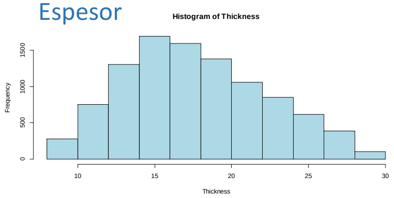
Introducción: Oil Initially In Place

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

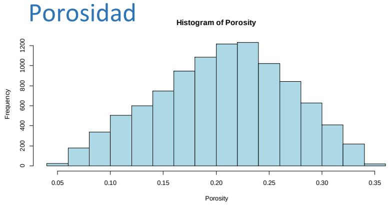
Area



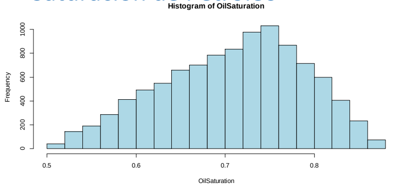
Espesor



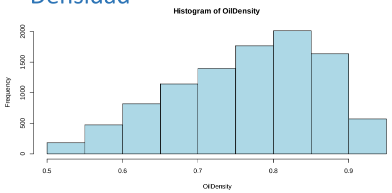
Porosidad



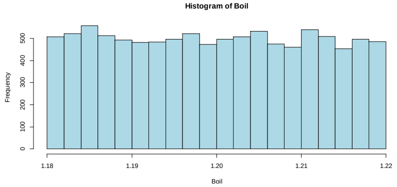
Saturación de Petróleo



Densidad

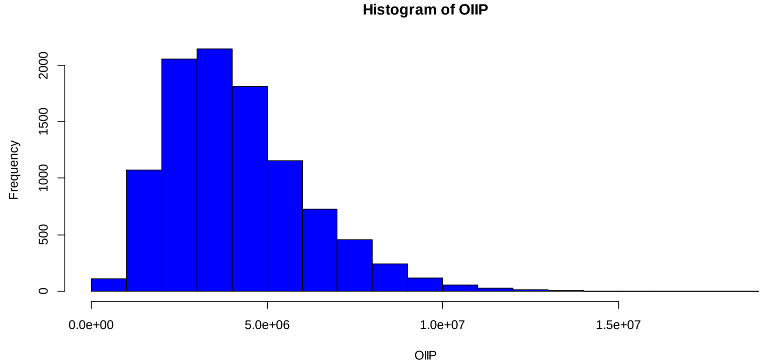


Factor de Volumen



Modelo que representa un sistema real

$$OIIP = \frac{V.\emptyset.(1 - S_{wc})}{B_{oi}}.\delta$$



$V = Area\,.\,Espesor$

$Porosidad\colon\ \emptyset$

$Saturación\ de\ petróleo\colon\ (1 - S_{wc})$

$Densidad\colon\ \delta$

$Factor\ de\ volumen\colon\ B_{oi}$

Tutorial Simulación

Introducción

Simulación es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital.
Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos
que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos
a través de largos períodos de tiempo *(H.Maisel-G.Gnugnoli)*

Tutorial Simulación

Introducción

Simulación es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital.
Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos
que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos
a través de largos períodos de tiempo *(H.Maisel-G.Gnugnoli)*

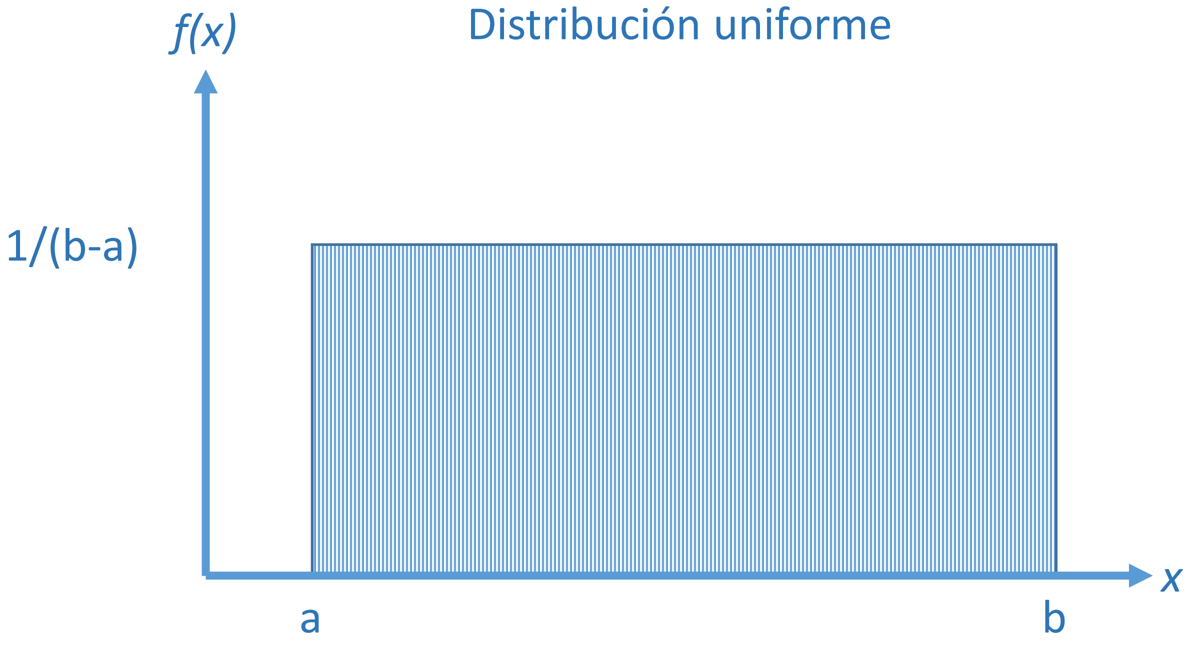
- La simulación debe entenderse como un experimento estadístico. Sus resultados son observaciones sujetas a error experimental.

- Difiere de un experimento de laboratorio en que puede desarrollarse íntegramente en una computadora.

- Es un recurso extremo al que se recurre cuando no es posible plantear modelos matemáticos debido a la complejidad del problema

Tutorial Simulación

Generación de Variables Aleatorias

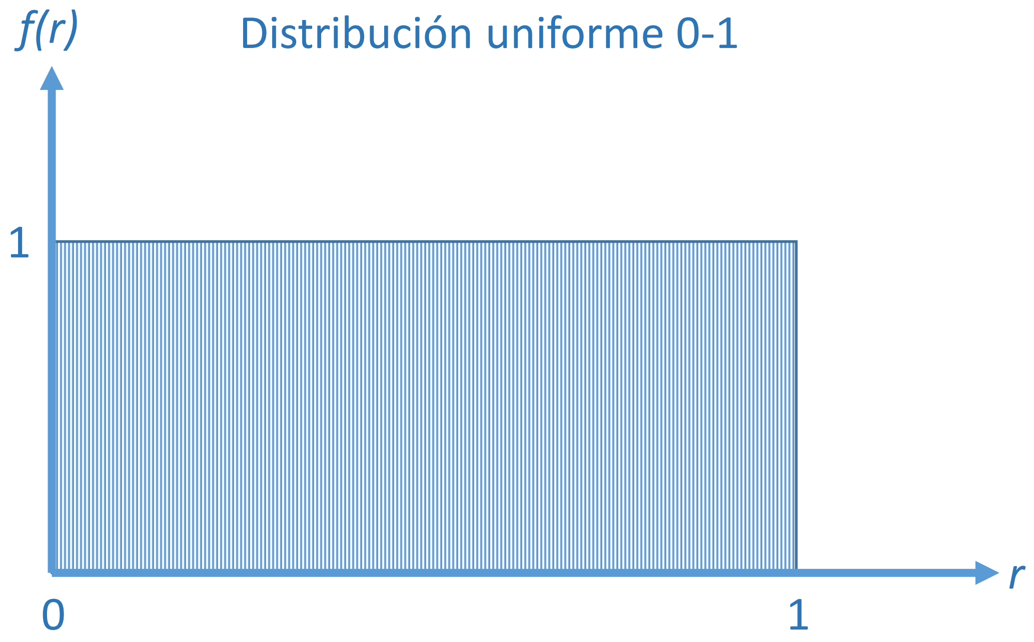


$$E(x) = (b - a)/2$$

$$\sigma^2 = (b - a)^2/12$$

Tutorial Simulación

Generación de Variables Aleatorias

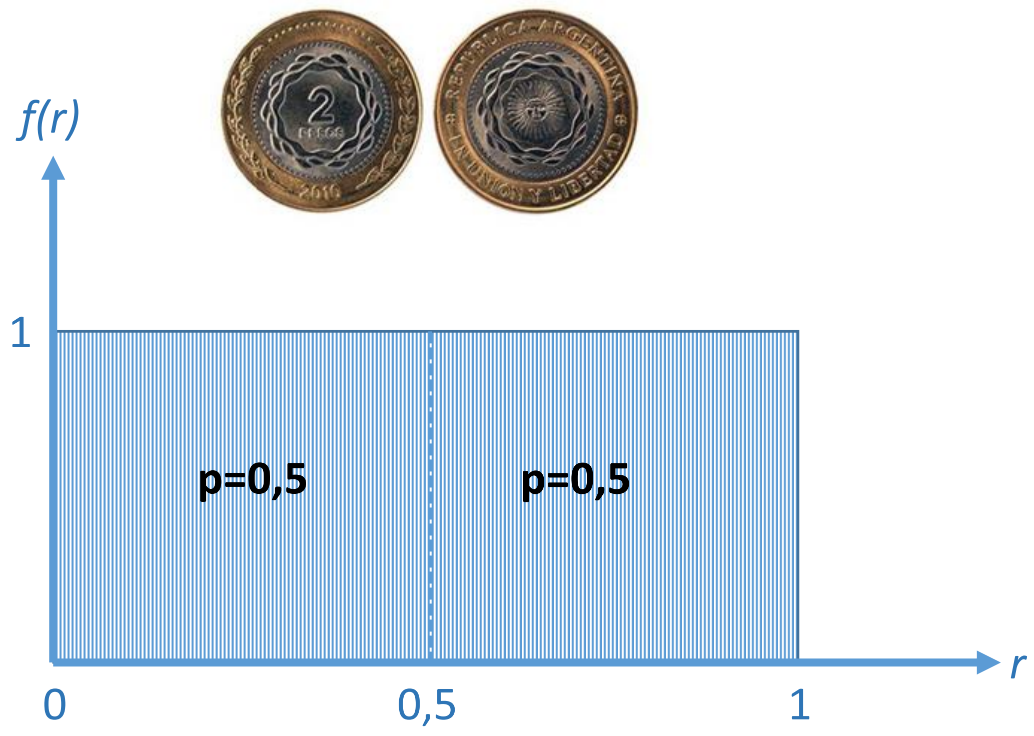


$$E(r) = 1/2$$

$$\sigma^2 = 1/12$$

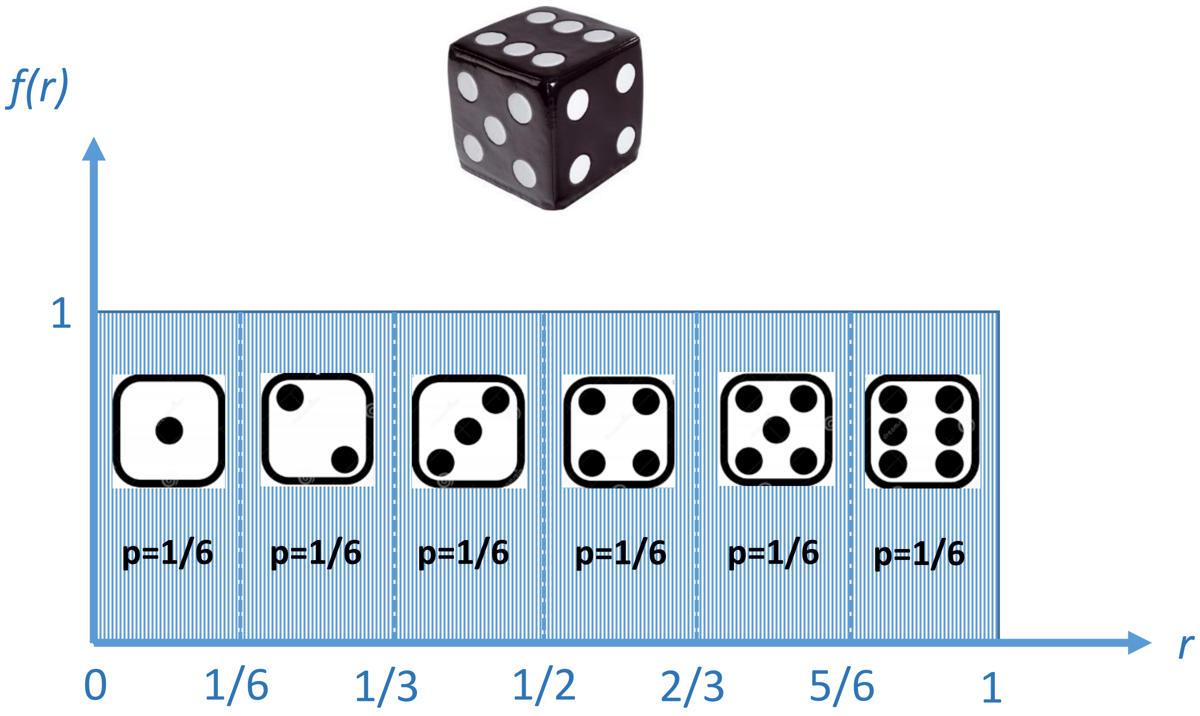
Tutorial Simulación

Generación de variables aleatorias



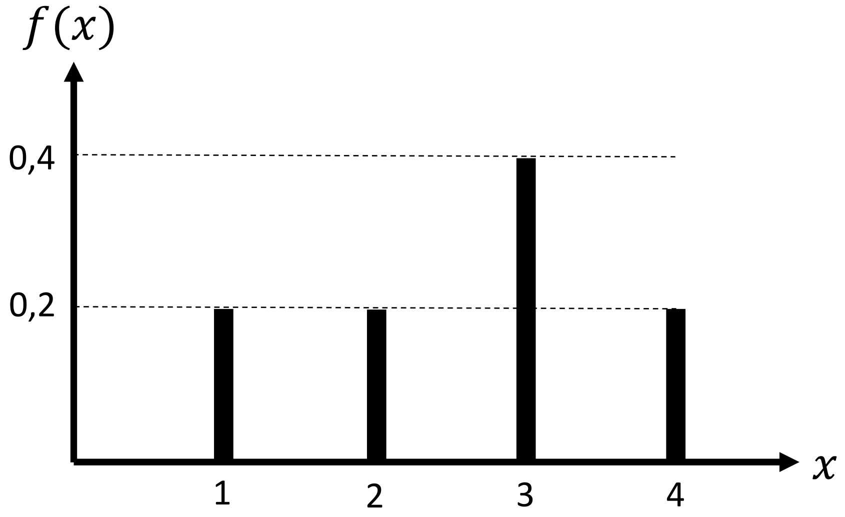
Tutorial Simulación

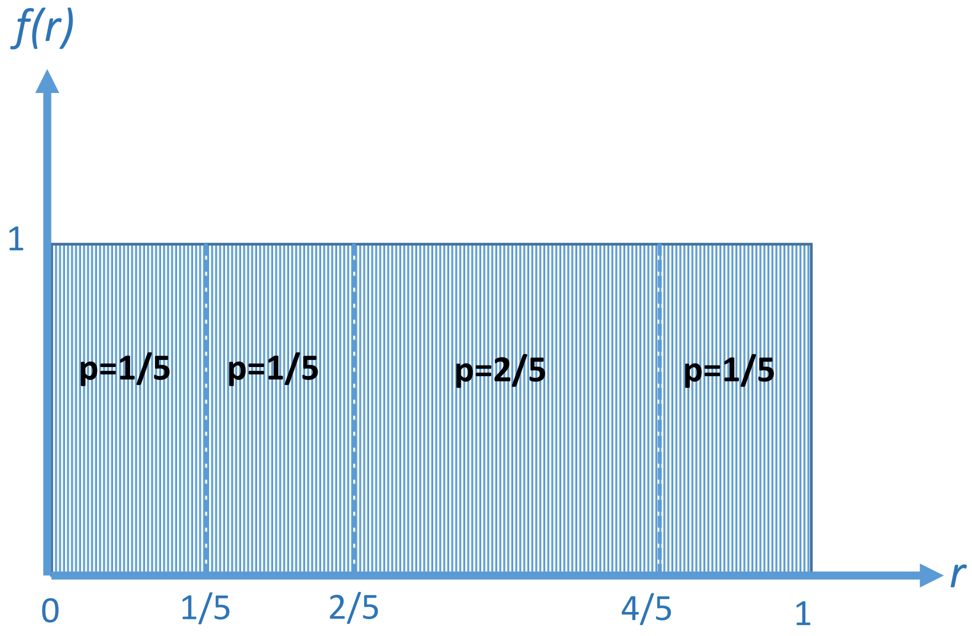
Generación de variables aleatorias



Tutorial Simulación

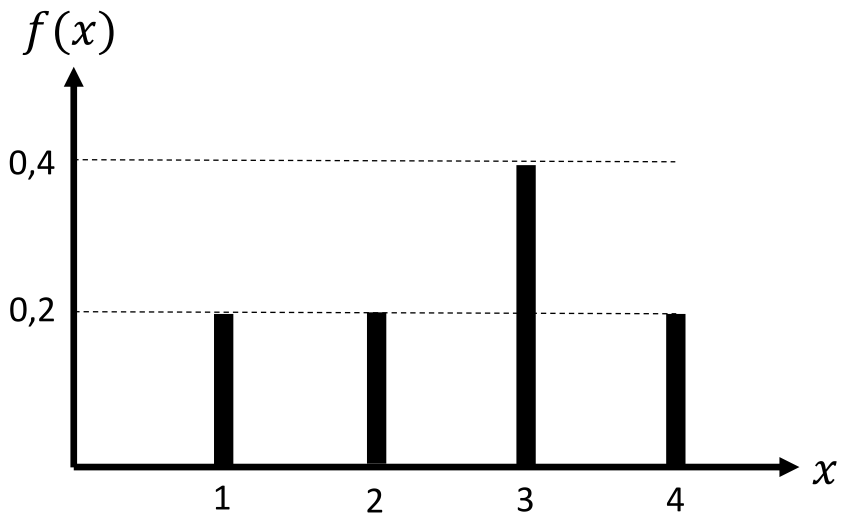
Generación de variables aleatorias

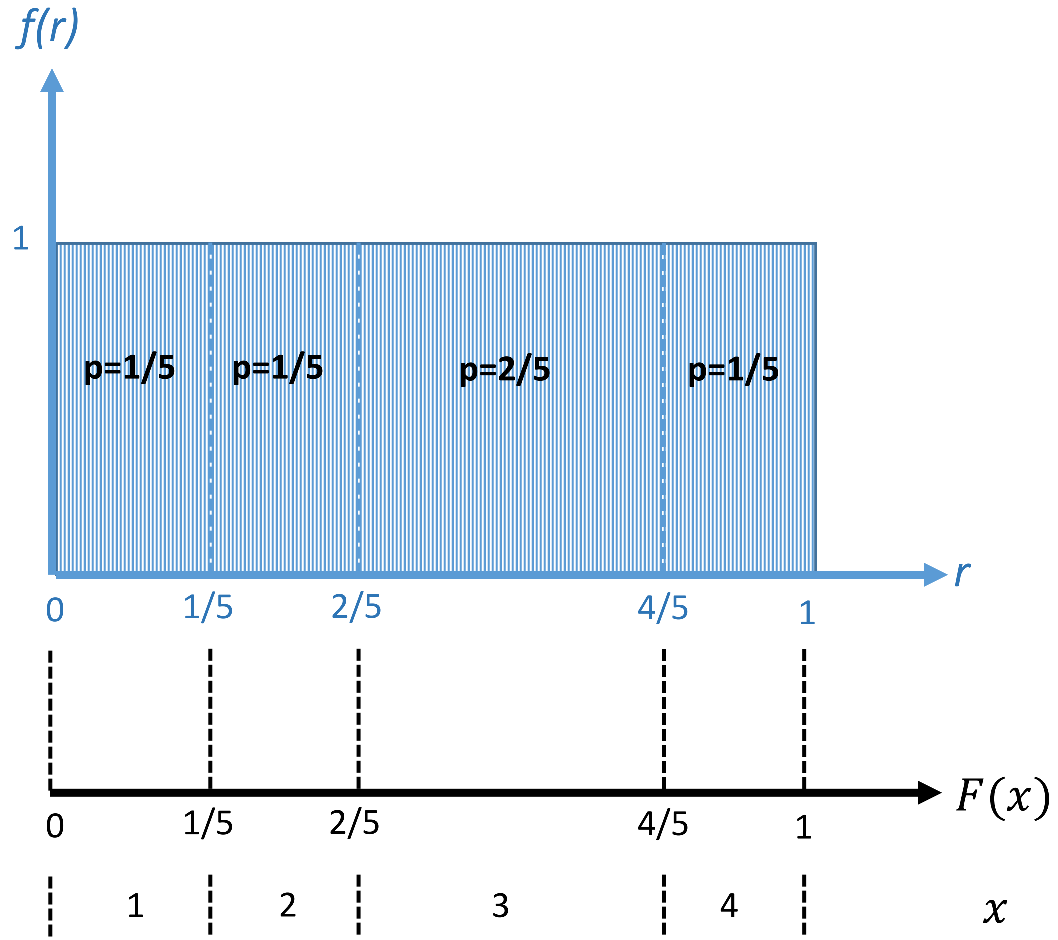




Tutorial Simulación

Generación de variables aleatorias

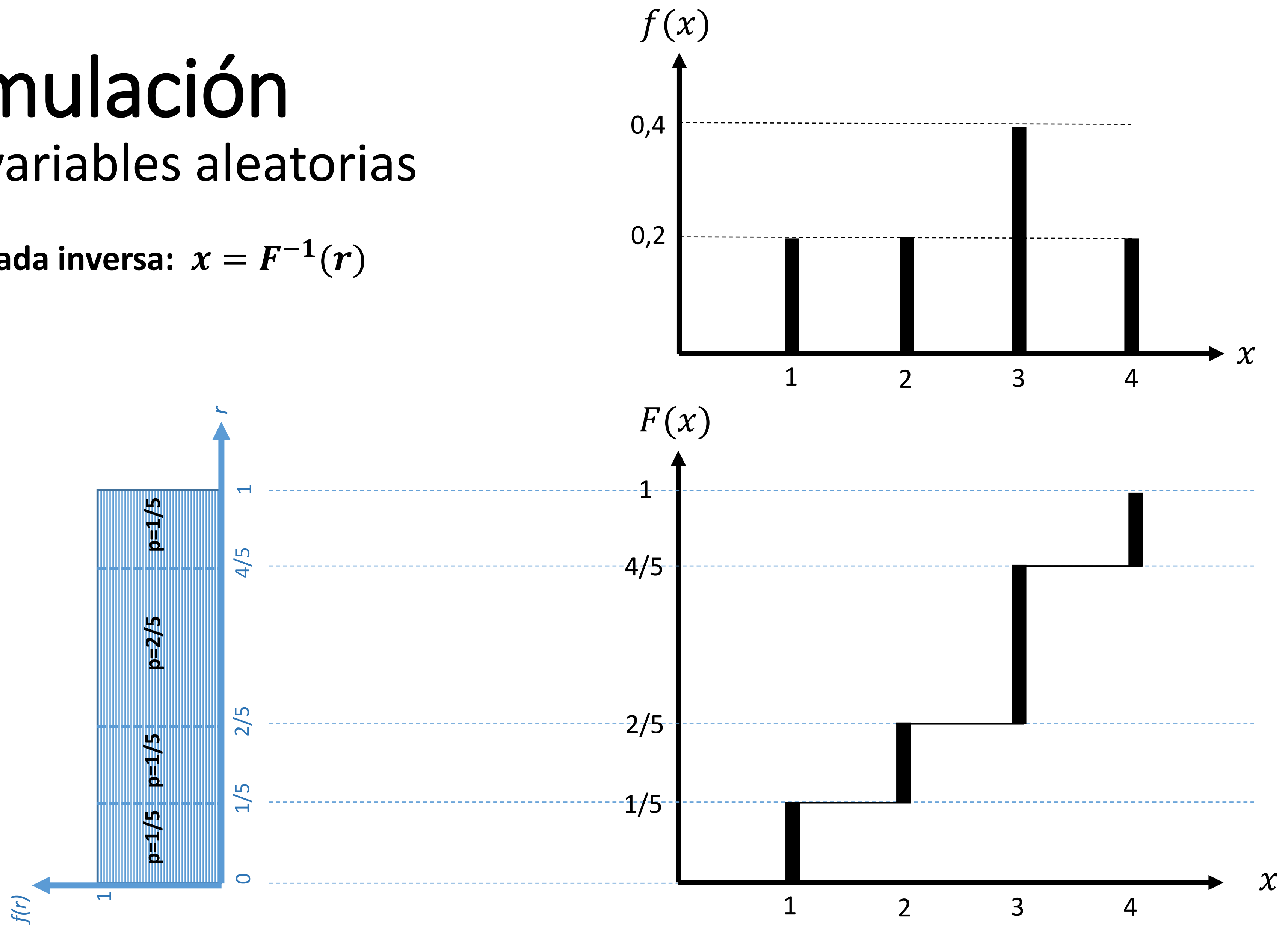




Tutorial Simulación

Generación de variables aleatorias

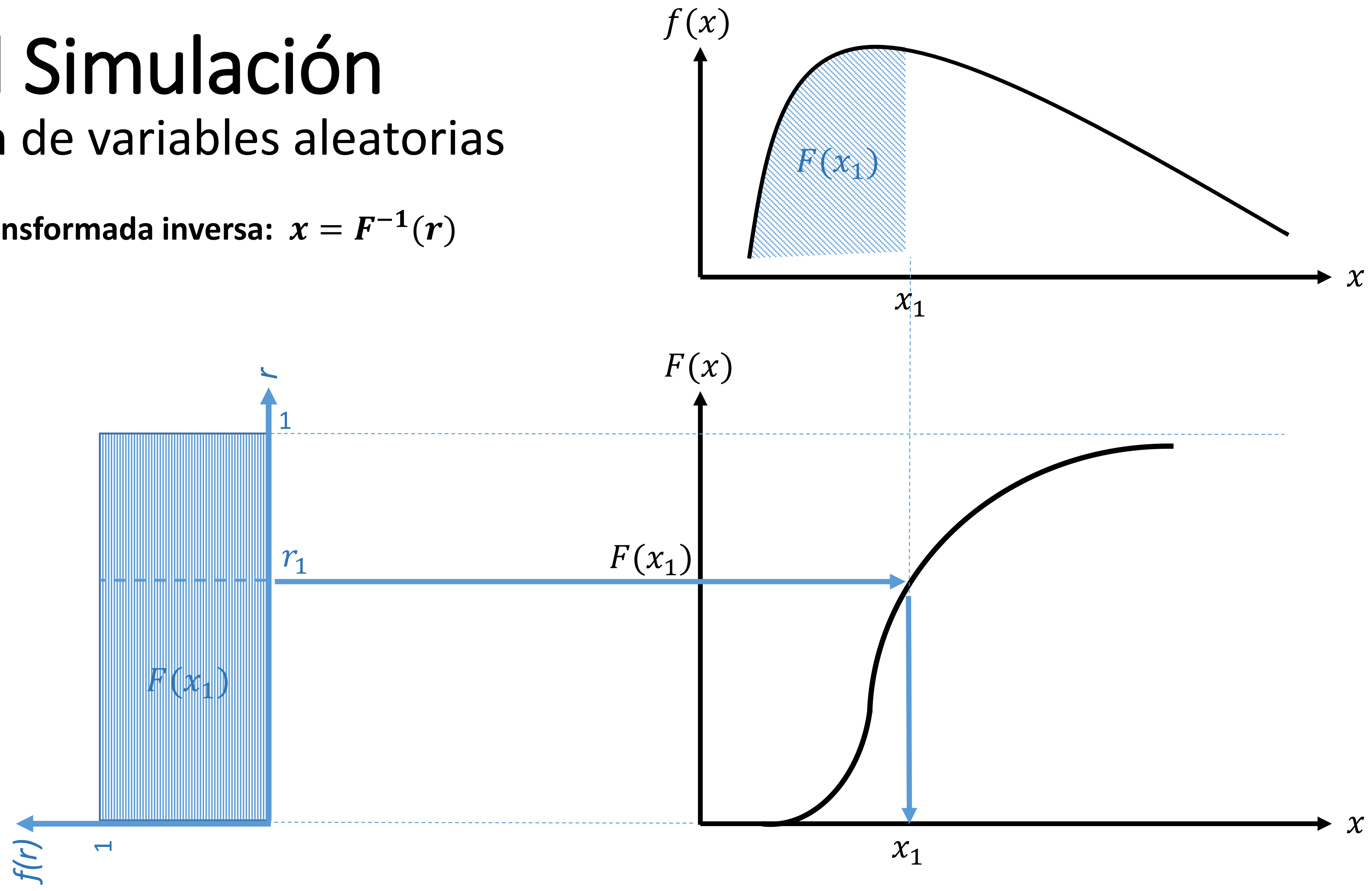
Método de la transformada inversa: $x = F^{-1}(r)$



Tutorial Simulación

Generación de variables aleatorias

Método de la transformada inversa: $\boldsymbol{x = F^{-1}(r)}$



Tutorial Simulación

Generación de variables aleatorias

Método de la transformada inversa: $\boldsymbol{x = F^{-1}(r)}$

Ejemplo 1: Distribución exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = r = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - r$$

$$e^{-\lambda x} = r$$

Si ***r*** sigue una distribución uniforme; entonces ***1-r*** también es una distribución uniforme

$$\boxed{x = -\frac{1}{\lambda} \ln(r)}$$

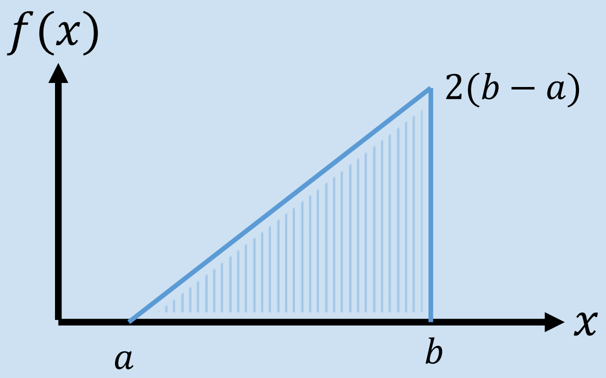
Tutorial Simulación

Generación de variables aleatorias

Método de la transformada inversa: $\boldsymbol{x = F^{-1}(r)}$

Ejemplo 2: Distribución triangular (rectangular creciente)

$$f(x) = \frac{2}{(b-a)^2}(x-a)$$



$$f(x) = \frac{2}{(b-a)^2}(x-a)$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{2}{(b-a)^2}(x-a)\,dx$$

$$F(x) = \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^x (x-a)\,dx =$$

$$F(x) = \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}$$

$$r = \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} \longrightarrow \sqrt{r} = \frac{(x-a)}{(b-a)}$$

$$x = a + (b-a).\sqrt{r}$$

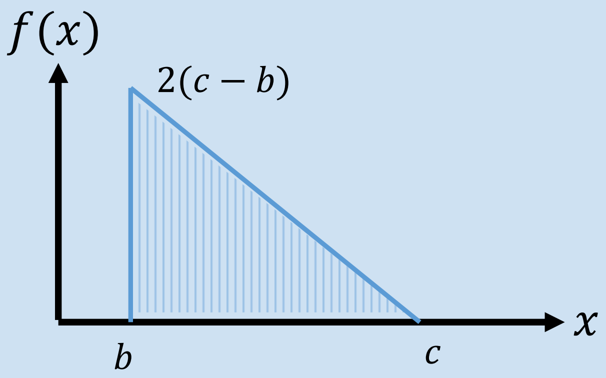
Tutorial Simulación

Generación de variables aleatorias

Método de la transformada inversa: $\boldsymbol{x = F^{-1}(r)}$

Ejercicio: Distribución triangular (rectangular decreciente)

$$f(x) = \frac{2}{(c-b)^2}(c-x)$$



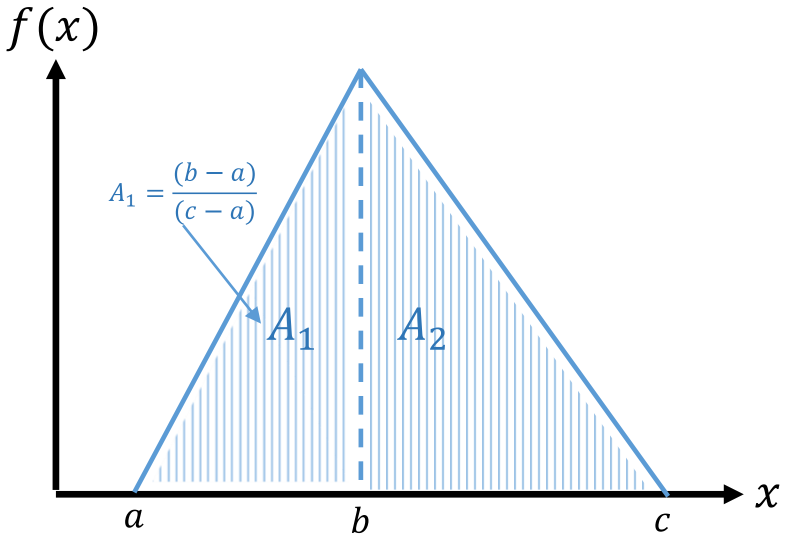
Demostrar que la variable aleatoria ***f(x)*** puede generarse a partir de la distribución uniforme de esta forma

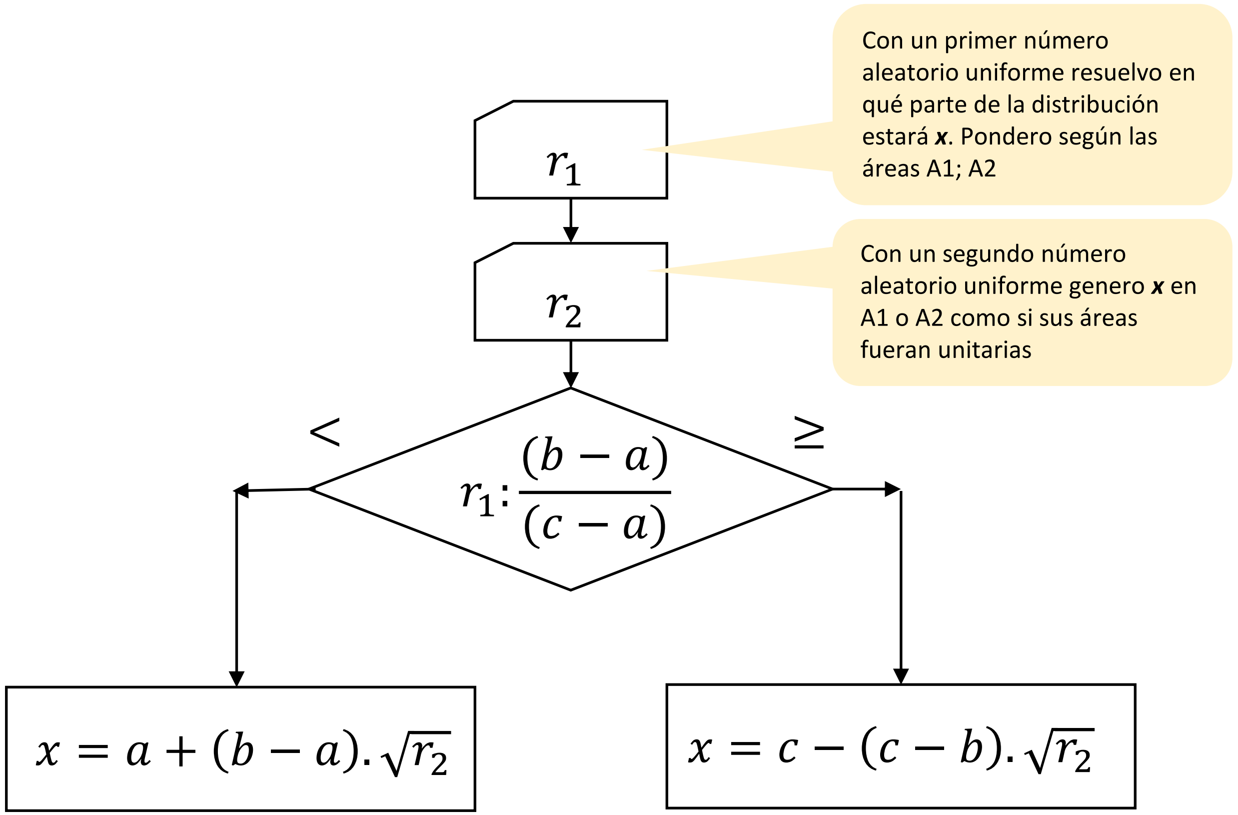
$$x = c - (c-b).\sqrt{r}$$

Tutorial Simulación

Generación de variables aleatorias

Método de composición





Tutorial Simulación

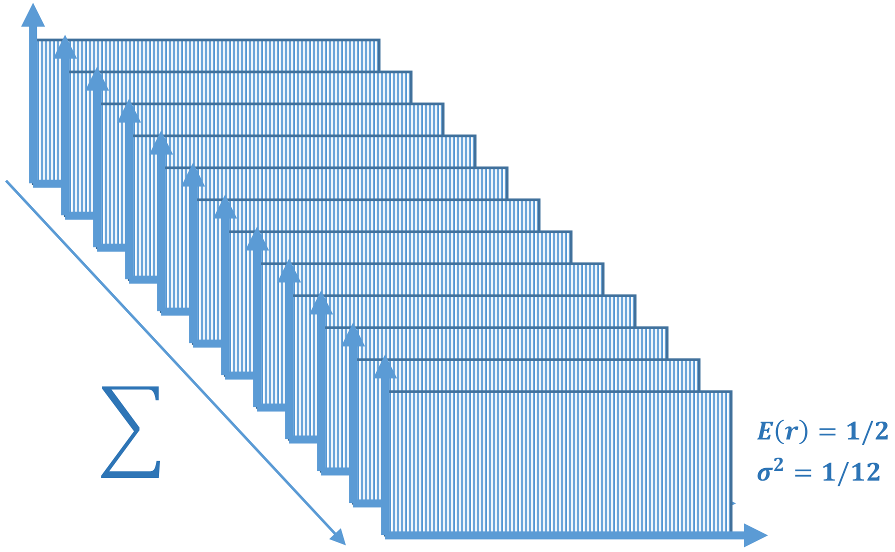
Generación de variables aleatorias

Métodos especiales: Distribución normal

La distribución normal no es integrable; por tanto no es posible aplicar el método de la transformada inversa.

Podemos hacer uso del teorema central del límite:

La suma de $n \to \infty$ variables aleatorias independientes se aproxima a una variable aleatoria normal cuya media es la suma de las medias de n las variables aleatorias y la varianza es la suma de las varianzas.



$$x = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6$$

$$\left.\begin{array}{l} E(x) = 12\,.\,0{,}5\; - 6 = 0 \\[2ex] \sigma_x^2 = 12\,.\,\dfrac{1}{12} = 1 \end{array}\right\} \to x = N(0{,}1)$$

Tutorial Simulación

Intervalo de confianza para la media de la variable estudiada

Media de la variable
que se quiere estimar

$$Prob\left\{\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

Tutorial Simulación

Intervalo de confianza para la media de la variable estudiada

Estimador del desvío de la variable en estudio

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Media de la variable que se quiere estimar

Nivel de significado

$$Prob\left\{\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

Media de los valores observados de la variable en estudio

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$$

Número de iteraciones

Tutorial Simulación

Ejemplo de aplicación

Oil Initialy in Place (OIIP)

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

$V = Area\,.Espesor$

$Porosidad:\ \emptyset$

$Saturación\ de\ petróleo:\ (1 - S_{wc})$

$Densidad:\ \delta$

$Factor\ de\ volumen:\ B_{oi}$

Modelo que representa un sistema real

$$OIIP = \frac{V.\emptyset.(1 - S_{wc})}{B_{oi}}.\delta$$

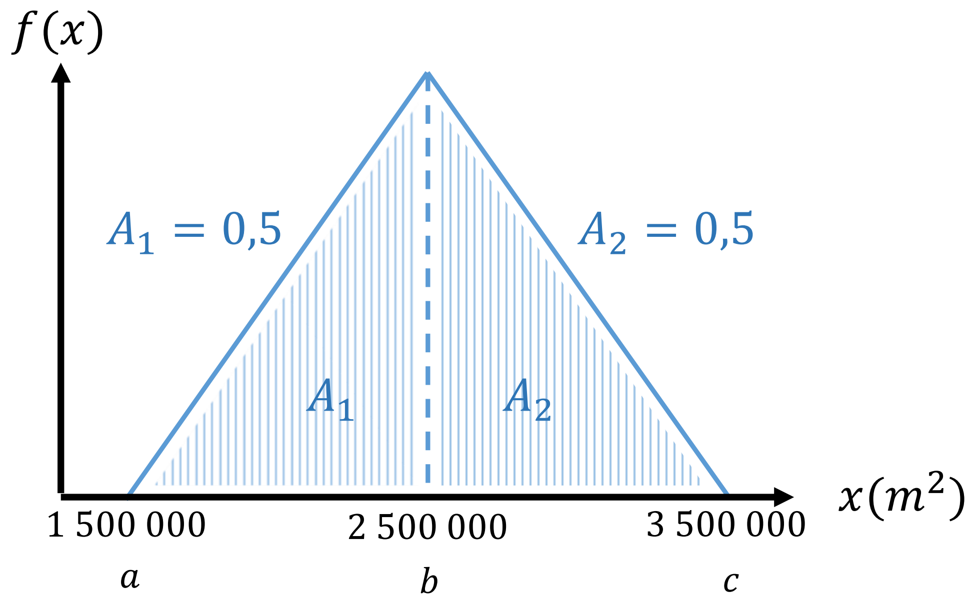
Tutorial Simulación

Ejemplo de aplicación

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

Oil Initialy in Place (OIIP)

1 Área



$r_1 = 0,03991$

< 0,5; el valor simulado corresponde a A1

$r_2 = 0,38555$

$$x = a + (b - a).\sqrt{r_2}$$

$$Area = 1\,500\,000 + (2\,500\,000 - 1\,500\,000).\sqrt{0,38555}$$

$$Area = 2\,120\,927\ m^2$$

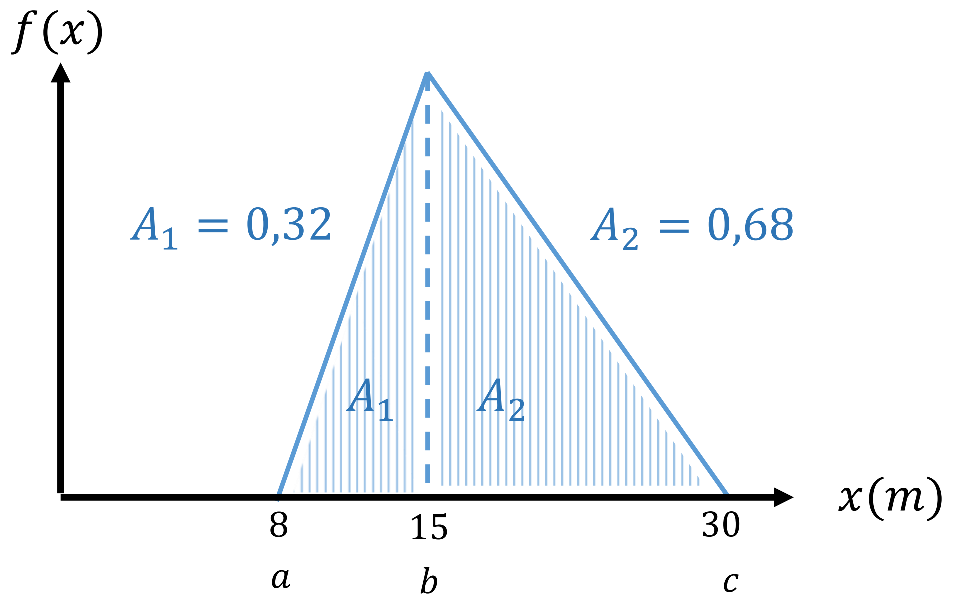
Tutorial Simulación

Ejemplo de aplicación

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

Oil Initialy in Place (OIIP)

2 Espesor



$$r_1 = 0,69572$$

> 0,32; el valor simulado corresponde a A2

$$r_2 = 0,17546$$

$$x = c - (c - b).\sqrt{r_2}$$

$$Espesor = 30 - (30 - 15).\sqrt{0,17546}$$

$$Espesor = 23,7\ m$$

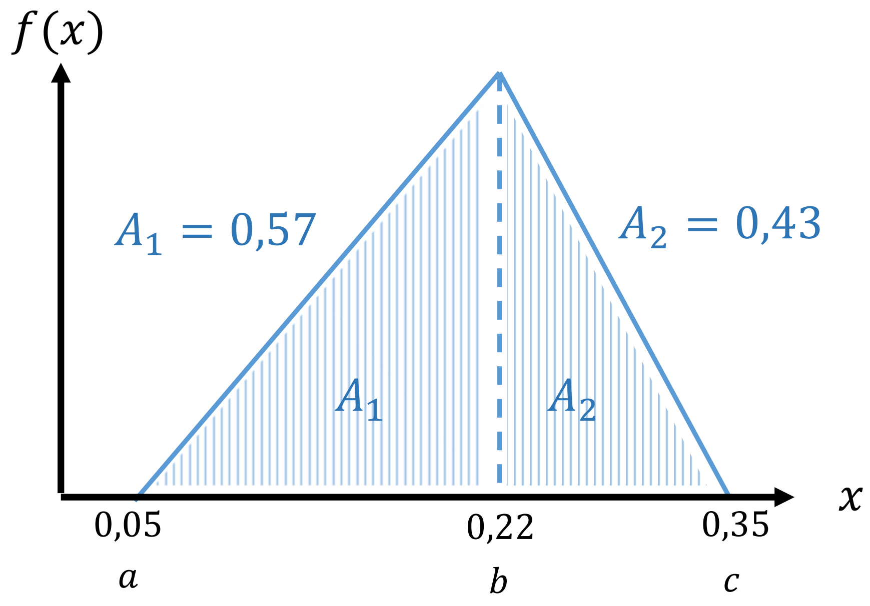
Tutorial Simulación

Ejemplo de aplicación

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

Oil Initialy in Place (OIIP)

3 Porosidad



< 0,57; el valor simulado corresponde a A1

$$r_1 = 0,24122$$

$$r_2 = 0,61196$$

$$x = a + (b - a).\sqrt{r_2}$$

$$Porosidad = 0,05 + (0,22 - 0,05).\sqrt{0,61196}$$

$$Porosidad = 0,183$$

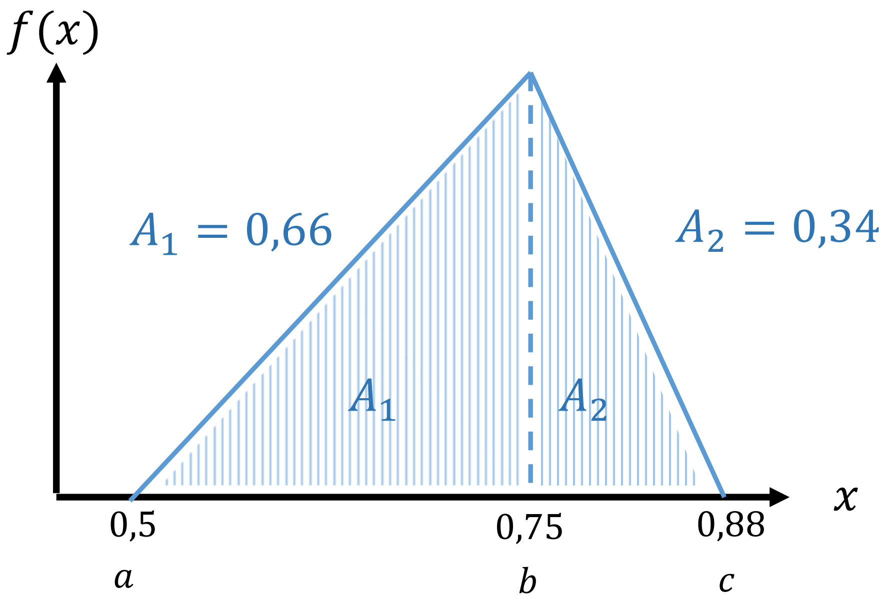
Tutorial Simulación

Ejemplo de aplicación

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

Oil Initialy in Place (OIIP)

4 Saturación de petróleo



< 0,66; el valor simulado corresponde a A1

$$r_1 = 0,30532$$

$$r_2 = 0,29594$$

$$x = a + (b - a).\sqrt{r_2}$$

$$Saturación\ de\ petróleo = 0,5 + (0,75 - 0,5).\sqrt{0,29594}$$

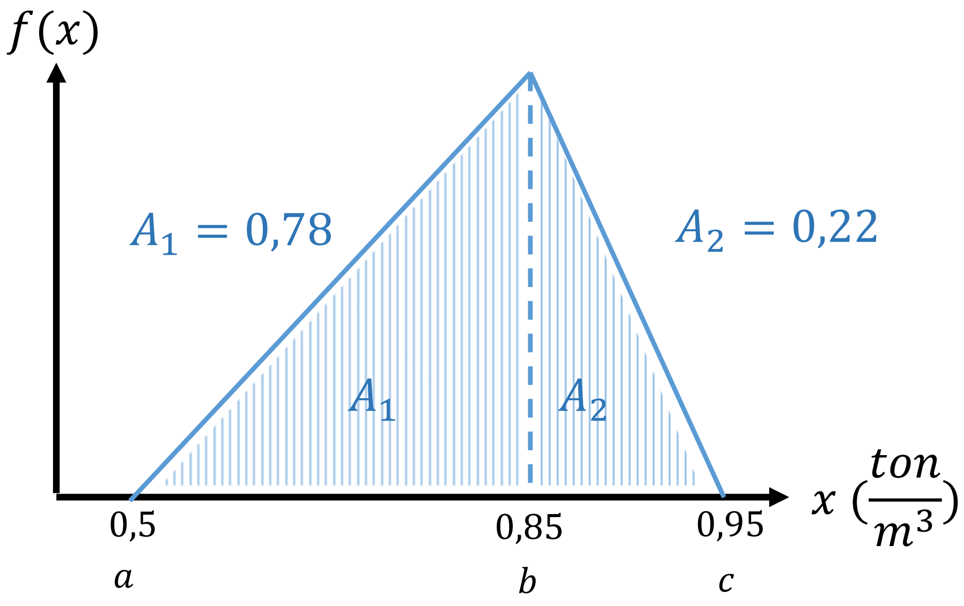
$$Saturación\ de\ petróleo = 0,636$$

Tutorial Simulación
Ejemplo de aplicación

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

Oil Initialy in Place (OIIP)

5 Densidad



< 0,78; el valor simulado corresponde a A1

$$r_1 = 0,48228$$

$$r_2 = 0,88618$$

$$x = a + (b - a).\sqrt{r_2}$$

$$Densidad = 0,5 + (0,85 - 0,5).\sqrt{0,88618}$$

$$Densidad = 0,83\ ton/m^3$$

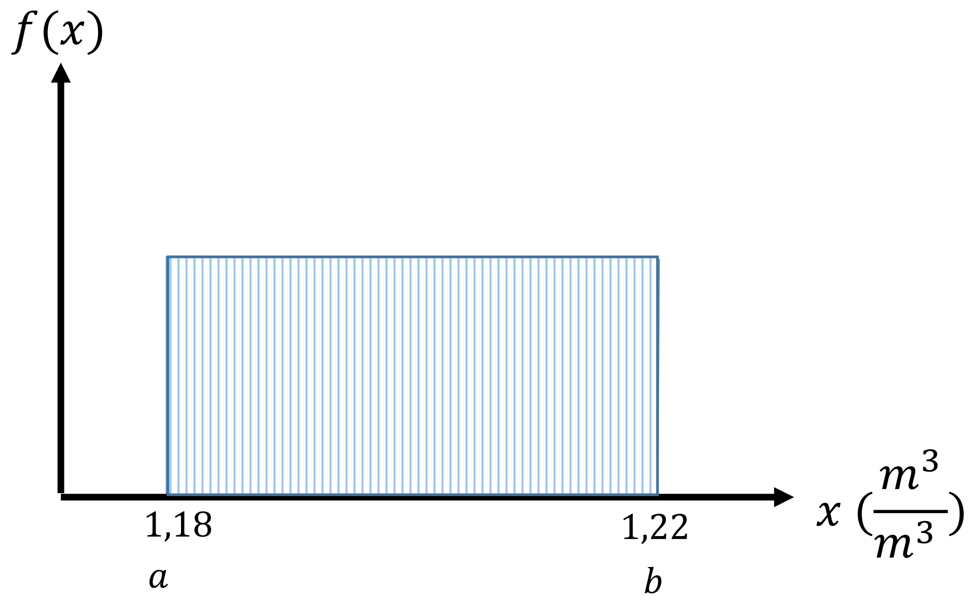
Tutorial Simulación

Ejemplo de aplicación

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

Oil Initialy in Place (OIIP)

6 Factor de volumen



$$r = 0{,}71299$$

$$x = a + (b - a).r$$

$$Factor\ de\ volumen = 1{,}18 + (1{,}22 - 1{,}18).\,0{,}71299$$

$$Factor\ de\ volumen = 1{,}21\ m^3/m^3 \quad (*)$$

(*) m^3 en reservorio / m^3en condiciones estándares

Tutorial Simulación

Ejemplo de aplicación

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

Oil Initialy in Place (OIIP)

7 OIIP

Iteración #1

$$\left.\begin{aligned} Area &= 2\,120\,927\ m^2 \\ Espesor &= 23{,}7\ m \end{aligned}\right\} V = Area\,.\,Espesor$$

$$Porosidad(\emptyset) = 0{,}183$$

$$Saturación\ de\ petróleo(1 - S_{wc}) = 0{,}636$$

$$Densidad\ (\delta) = 0{,}83\ ton/m^3$$

$$Factor\ de\ volumen(B_{oi}) = 1{,}21\ m^3/m^3$$

$$OIIP = \frac{V.\emptyset.(1 - S_{wc})}{B_{oi}}.\delta$$

$$OIIP = \frac{2\,120\,927\ m^2.\,23{,}7\ m\,.\,0{,}183\,.\,0{,}636}{1{,}21\ m^3/m^3}\ 0{,}83\ ton/m^3$$

$$OIIP = 4{,}01\ Mton$$

Tutorial Simulación
Ejemplo de aplicación

	AREA	ESPESOR	POROSIDAD	SATURACIÓN DE PETRÓLEO	DENSIDAD	FACTOR DE VOLUMEN
unidad	m^2	m	ratio	ratio	ton/m^3	m^3/m^3
distribución	triangular	triangular	triangular	triangular	triangular	uniforme
MIN	1.500.000	8	0.05	0.50	0.50	1.18
MAX	3.500.000	30	0.35	0.88	0.95	1.22
MODA	2.500.000	15	0.22	0.75	0.85	-

Oil Initialy in Place (OIIP)

8 OIIP

Se repiten los pasos 1-7 n veces (n=10 000)

$$\overline{x} = 4{,}13\ Mton$$

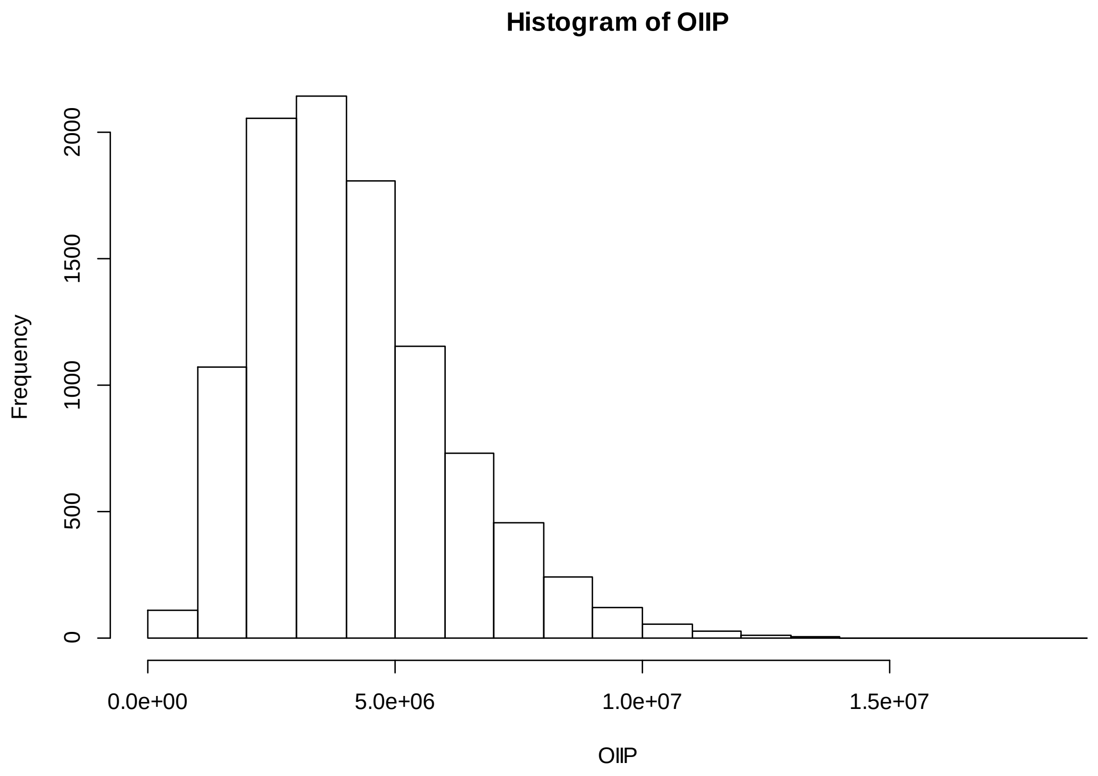
$$S = 1{,}995\ Mton$$

$$\alpha = 0{,}05$$

$$t_{9\,999;0{,}025} = 1{,}96$$

$$x^+ = \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = 4{,}17\ Mton$$

$$x^- = \overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = 4{,}09\ Mton$$



Script disponible en el Campus

```
#-----------------------------------------------------------------
# Oil Initially In Place
# Monte Carlo simulation for estimating geologic oil reserves...
# KOSOVA Robert, SHEHU Valentina, NAÇO Adrian,
# XHAFAJ Evgjeni, STANA Alma, YMERI Agim
#-----------------------------------------------------------------
# Requiere cargar el paquete triangle: triangle_0.12.tar.gz
library(triangle)
#-----------------------------------------------------------------
#
N=10000
#
# Oilfield area (m2)
Area<-rtriangle(N,1500000, 3500000, 2500000)
#
# Thickness (m)
Thickness<-rtriangle(N,8,30,15)
#
# Porosity ratio (fraction)
Porosity<-rtriangle(N,0.05,0.35,0.22)
#
# Oil Saturation (fraction)
OilSaturation<-rtriangle(N,0.5,0.88,0.75)
#
# Density of oil (ton/m3)
OilDensity<-rtriangle(N,0.5,0.95,0.85)
#
# Formation Volume Factor (m3 reservoir/m3 std conditions)
Boil<-runif(N,1.18,1.22)
#
# Oil Initially In Place
OIIP<-Area*Thickness*Porosity*OilSaturation*OilDensity/Boil
#-----------------------------------------------------------------
# OIIP (ton)
summary(OIIP)
#-----------------------------------------------------------------
# Intervalo de Confianza 95% para la media
SD=sd(OIIP)
T=qt(p=0.975, df=N-1)
OIIP_MAX=mean(OIIP)+T*SD/sqrt(N)
OIIP_MIN=mean(OIIP)-T*SD/sqrt(N)
mean(OIIP)
OIIP_MAX
OIIP_MIN
#-----------------------------------------------------------------
# Proven reserves P90 (ton)
quantile(OIIP,p=0.1)
# Proven and Possible Reserves (P50) (ton)
quantile(OIIP,p=0.5)
# Proven, Possible and Probable Reserves (P10) (ton)
quantile(OIIP,p=0.9)
#
par(mfrow=c(2,1))
hist(OIIP)
plot(ecdf(OIIP))
#-----------------------------------------------------------------
```

Tutorial Simulación
Aplicaciones

- Sistemas de colas con procesos complejos de arribos y atención.
- Sistemas de inventarios con demanda aleatoria.
- Planeamiento corporativo: proyectos de inversión, pronósticos económicos, análisis de riesgos.
- Administración de proyectos: modelos de camino crítico con actividades de duración aleatoria.
- Modelado de procesos de fabricación.
- Modelado de redes de distribución de productos.
- Análisis de propagación de errores
- Modelado de colisiones de partículas, y procesos de tecnología nuclear.
- Redes de comunicaciones.
- Sistemas biomédicos
- ……….
- ……….

He deals the cards to find the answer
The sacred geometry of chance
The hidden law of a probable outcome
The numbers lead a dance

Shape Of My Heart
Sting